УДК 621.313.13

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО МАНИПУЛЯТОРА С ШЕСТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ*

проф. [1]**Карпович С.Е.,** студ. [1]**Войтов А.Ю.,** маг. [1]**Нестеренко В.Н.,** маг. [1]**Манин А.С.**

[1]УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», Минск

Введение. В настоящей статье рассматривается предложенный параллельный манипулятор с шестью степенями свободы на гибридном приводе прямого действия [1, 2], содержащем жёсткое треугольное основание с тремя магнитными направляющими для шести линейных подвижных координатных электромагнитных модулей. Структурно-кинематическая схема параллельного манипулятора приведена на рис. 1.

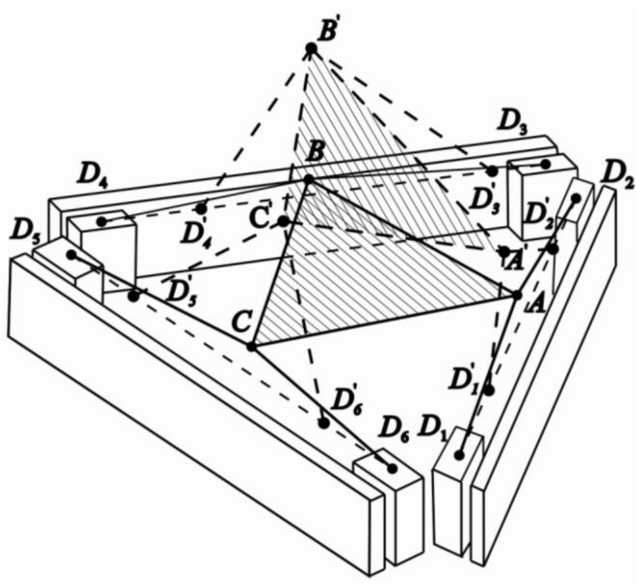

Рис. 1. Схема параллельного манипулятора с шестью степенями свободы

Особенностью схемы является предложенная конфигурация гибридного привода со спаренными координатными модулями на каждой из трёх направляющих, линейные перемещения которых $s_i(i = 1, 2, ,\ldots, 6)$, , как задаваемые функции положения ведущих звеньев исполнительного механизма параллельной кинематики, преобразуются в шесть независимых между собой координатных функций положения подвижного исполнительного элемента, треугольной платформы *ABC*, включая три линейных $x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}$ и три угловых φ, θ, ψ.

Расчётная схема. Формальная постановка прямой задачи [3] состоит в том, что предполагаются заданными в системе координат S_0 фиксированные положения точек *M*, *N* и *P* вершин треугольного гибридного привода, определяющих направляющие *MN*, *NP* и *PM* для подвижных управляемых модулей, положение которых задаётся управляющими функциями положения, соответственно точек $D_i(i = 1, 2, ,\ldots, 6)$. В результате решения прямой задачи необходимо определить функции положения и ориентации платформы ABC в зависимости от управляющих функций и конфигурации механизма параллельной кинематики. Расчётная схема с принятыми для формирования математической модели системами координат S_0 и S_1, связанных со звеньями исполнительного механизма, представлена на рис. 2.

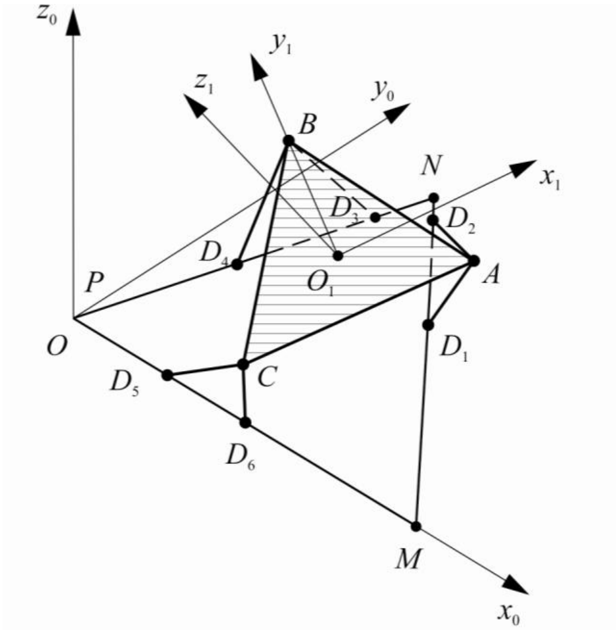

Рис. 2. Расчётная схема параллельного манипулятора

С учётом того, что плоскость треугольника MNP совмещена с координатной плоскостью x_0Oy_0 (рис. 2) получим координатное представление точек M, N, P в виде: $M(x_M, y_M, 0)$, $N(x_N, y_N, 0)$, $P(x_P, y_P, 0)$. Не нарушая общности решения прямой задачи кинематики, примем линейные размеры сторон треугольника ABC равными между собой и равными a. Длины промежуточных звеньев(шатунов) механизма параллельной кинематики, примем тоже равными между собой и равными l. То есть $D_1A = D_2A = D_3B = D_4B = D_5C = D_6C = l$. По этим исходным данным будем решать прямую задачу кинематики, как позиционную параметрическую, заключающуюся, в нашем случае, в нахождении координат положения точек A, B и C подвижной треугольной платформы ABC, выраженных в неподвижной системе координат $S_0(x_0, y_0, z_0)$ в зависимости от параметрического задания положения шести линейных подвижных модулей.

Математическая модель. Для решения поставленной задачи вначале необходимо получить аналитическое параметрическое задание положения шести подвижных линейных модулей, характеризуемых положением точек $D_i (i = 1, 2, ,\dots, 6)$ в системе координат S_0. Для этого в системе координат S_0 зададим направляющие векторы $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ возможных перемещений парных подвижных линейных модулей по направляющим MN, NP и PM в виде:

$$\begin{aligned} \vec{q}_1 &= \overrightarrow{MN} = (x_N - x_M, y_N - y_M, 0), \\ \vec{q}_2 &= \overrightarrow{NP} = (x_P - x_N, y_P - y_N, 0), \\ \vec{q}_3 &= \overrightarrow{PM} = (x_M - x_P, y_M - y_P, 0). \end{aligned} \tag{1}$$

На основании условия коллинеарности соответствующей направляющей и вектора перемещения, расположенного на ней линейного подвижного модуля окончательно получим параметрическое представление положения точек D_i(i = 1, 2, ,…, 6) в виде:

$$
\begin{aligned}
x_{D_1} &= \lambda_1(x_N - x_M) + x_M, \quad y_{D_1} = \lambda_1(y_N - y_M) + y_M, \\
x_{D_2} &= \lambda_2(x_N - x_M) + x_M, \quad y_{D_2} = \lambda_2(y_N - y_M) + y_M, \\
x_{D_3} &= \lambda_3(x_P - x_N) + x_N, \quad y_{D_3} = \lambda_3(y_P - y_N) + y_N, \\
x_{D_4} &= \lambda_4(x_P - x_N) + x_N, \quad y_{D_4} = \lambda_4(y_P - y_N) + y_N, \\
x_{D_5} &= \lambda_5(x_M - x_P) + x_P, \quad y_{D_5} = \lambda_5(y_M - y_P) + y_P, \\
x_{D_6} &= \lambda_6(x_M - x_P) + x_P, \quad y_{D_6} = \lambda_6(y_M - y_P) + y_P,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где λ_i(i = 1, 2, ,…, 6) - параметры, определяющие положения соответствующих точек D_i(i = 1, 2, ,…, 6) на направляющих треугольного гибридного привода. При этом без учёта линейных размеров модулей теоретический диапазон изменения λ_i будет следующим: $0 \le \lambda_i \le 1$. Из условия отсутствия геометрической интерференции парных подвижных модулей при их независимом движении между их параметрами λ_i должны выполняться условия: $\lambda_{2k-1} < \lambda_{2k}$, k = 1, 2, 3. Это значит, что все модули, обозначаемые D_i(i = 1, 2, ,…, 6) с нечётными индексами, будут иметь параметры λ меньшие, чем параметры λ с чётными индексами. Приняв начальные значения всех $\lambda_i^0 = 0$ из выражений (2) получим текущие траекторные задания всех входных переменных s_i, показанных на рис. 2 в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \lambda_1 \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}, \\
s_2 &= \lambda_2 \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}, \\
s_3 &= \lambda_3 \sqrt{(x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2}, \\
s_4 &= \lambda_4 \sqrt{(x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2}, \\
s_5 &= \lambda_5 \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2}, \\
s_6 &= \lambda_6 \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

При заданных входных переменных s_i по формулам (3) могут быть рассчитаны соответствующие параметры λ_i, а затем по ним однозначно рассчитываются координаты всех точек D_i, характеризующих положения подвижных модулей гибридного привода. Положения искомых точек A, B и C зависят одновременно от положения точек $D_i (i = 1,2,...,6)$ и текущей конфигурации реконфигурируемого механизма параллельной кинематики (рис. 1). В рассматриваемом случае механизм параллельной кинематики содержит треугольное звено ABC и шесть связанных с ним подвижных шатунов $AD_1, AD_2, BD_3, BD_4, CD_5, CD_6$. Полное условие замкнутости такой кинематической цепи с замыканием в тачках $D_i (i = 1,2,...,6)$ подвижных управляемых модулей будет иметь вид:

$$
\begin{cases}
(x_{D_1}-x_A)^2+(y_{D_1}-y_A)^2+(z_{D_1}-z_A)^2=l^2\\
(x_{D_2}-x_A)^2+(y_{D_2}-y_A)^2+(z_{D_2}-z_A)^2=l^2\\
(x_{D_3}-x_B)^2+(y_{D_3}-y_B)^2+(z_{D_3}-z_B)^2=l^2\\
(x_{D_4}-x_B)^2+(y_{D_4}-y_B)^2+(z_{D_4}-z_B)^2=l^2\\
(x_{D_5}-x_C)^2+(y_{D_5}-y_C)^2+(z_{D_5}-z_C)^2=l^2\\
(x_{D_6}-x_C)^2+(y_{D_6}-y_C)^2+(z_{D_6}-z_C)^2=l^2\\
(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2=l^2\\
(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2+(z_C-z_B)^2=l^2\\
(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2+(z_A-z_C)^2=l^2
\end{cases}
\qquad (4)
$$

Система нелинейных уравнений (4) содержит 9 уравнений с 9-ю неизвестными. В качестве неизвестных выступают искомые координаты трёх точек *A*, *B*, *C*, положение которых полностью определяется положением задаваемых точек $D_i (i=1,2,...,6)$ на управляемых модулях привода. Решая систему нелинейных уравнений (4) численными методами, например, используя вычислительные инструменты среды MATLAB, окончательно получим искомые координаты $x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$. При решении систем такого размера как (4) возникают сложности, связанные с проблемой сходимости и объёмом вычислений используемых вычислительных алгоритмов, а также многоэкстремальностью целевой функции в области поиска решения. Также надо учитывать, что при разработке алгоритмов решения задач кинематики, предназначенных для встраивания в программное обеспечение реальных систем управления необходимо стремится к высокой адекватности алгоритмов, абсолютной их сходимости и минимальной вычислительной процедуре. В связи с вышесказанным в настоящей работе были проведены аналитические исследования разработанного алгоритма решения прямой задачи кинематики, основанного на системе из девяти нелинейных уравнений (4) с целью сокращения и оптимизации вычислительной процедуры. Для формирования уравнений замкнутости было предложено воспользоваться методом условного размыкания [1], на основании которого были получены расчётные уравнения прямой задачи кинематики с минимальным числом уравнений и неизвестных. Это стало возможным так же благодаря предложенному формализованному математическому описанию отдельных разомкнутых параллельных кинематических цепей, аналитические условия замкнутости которых на сферические шарниры управляемых модулей движения нами формировались через введённые в рассмотрение обобщённые углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, определяющие текущее угловое положение треугольного контура каждой из трёх параллельных кинематических цепей. Расчётная схема задания углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ представлена на рис. 3, на примере отдельного конкретного фрагмента параллельной кинематической цепи D_1AD_2.

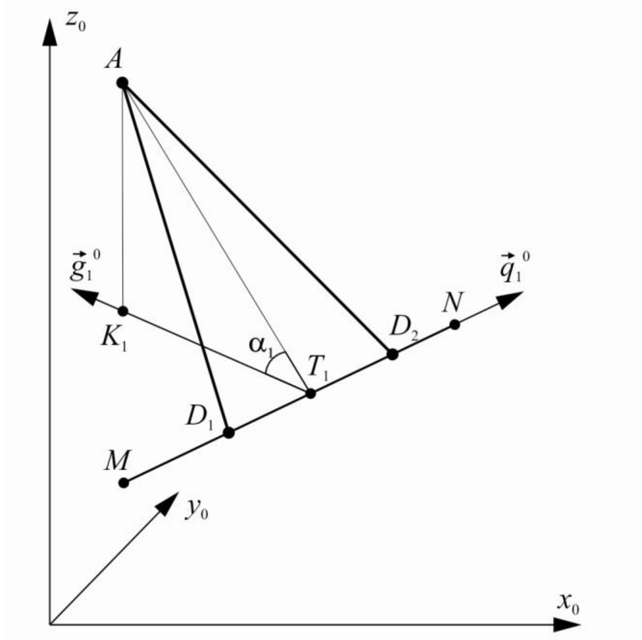

Рис. 3. Векторное представление одного параллельного фрагмента манипулятора

В результате этого стало возможным использование математического описания условия размыкания не всего исполнительного механизма общим условием в виде (4), а выделением параллельных кинематических цепей и формированием отдельно для каждой из них аналитических условий замкнутости, через соответствующие обобщённые углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Для вывода, не нарушая общности решения, рассмотрим конкретный фрагмент параллельной кинематической цепи исполнительного механизма, например D_1AD_2, представленный на рис. 3, из которого следует, что два условия кинематических связей, налагаемых звеньями D_1A и D_2A, вошедшие в виде двух уравнений в систему (4) можно заменить одним аналитическим условием через переменный угол α_1, тем самым сократив в системе уравнений (4) два уравнения и два неизвестных. Аналогичная ситуация и с математическим описанием параллельных кинематических цепей D_3BD_4 и D_5CD_6. Аналитические выражения кинематических связей в этих цепях через соответствующие углы α_2 и α_3 приводят к сокращению ещё четырёх уравнений и четырёх неизвестных в системе (4).

Алгоритмизация прямой задачи кинематики. Таким образом, полное решение прямой задачи кинематики будет сведено к решению системы из трёх вместо девяти нелинейных уравнений с тремя вместо девяти неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. При этом алгебраическая структура уравнений в системе из трёх уравнений и в системе из девяти уравнений практически одинакова. Рассмотрим подробно вывод базовой системы из трёх уравнений на основе алгоритмизации параллельного фрагмента D_1AD_2. Для этого по уже найденному из (1) направляющему вектору $\vec{q}_1$ найдём его орт $\vec{q}_1^{\,0}$ по выражению:

$$\overset{\rightarrow 0}{q}_1 = (m_1, n_1) = (\frac{x_N - x_M}{MN}, \frac{y_N - y_M}{MN}, 0), \tag{5}$$

где $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$.

Аналогично для двух других направляющих из выражения (1) найдём:

$$\overset{\rightarrow 0}{q}_2 = (m_2, n_2) = (\frac{x_P - x_N}{PN}, \frac{y_P - y_N}{PN}, 0), \tag{6}$$

где $PN = \sqrt{(x_N - x_P)^2 + (y_N - y_P)^2}$.

А также получим:

$$\overset{\rightarrow 0}{q}_3 = (m_3, n_3) = (\frac{x_M - x_P}{MP}, \frac{y_M - y_P}{MP}, 0), \tag{7}$$

где $MP = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2}$.

Для представления расчётной модели решения прямой задачи кинематики через обобщённый переменный угол α_1, согласно рис. 3, необходимо задать в середине переменного отрезка D_1D_2 в точке T_1 вектор $\vec{g}_1$, а лучше орт этого вектора $\overset{\rightarrow 0}{g}_1$, перпендикулярный орту $\overset{\rightarrow 0}{q}_1$. Из условия ортогональности этих ортов $(\overset{\rightarrow 0}{q}_1 \perp \overset{\rightarrow 0}{g}_1)$ получим: $\overset{\rightarrow 0}{g}_1 = (-n_1, m_1)$. Аналогично этому получим, что орты $\overset{\rightarrow 0}{g}_2$ и $\overset{\rightarrow 0}{g}_3$ будут равны: $\overset{\rightarrow 0}{g}_2 = (-n_2, m_2)$ и $\overset{\rightarrow 0}{g}_3 = (-n_3, m_3)$. С учётом найденных ортов по расчётной модели, представленной на рис. 2 и рис. 3 окончательно получим искомые координаты точек *A*, *B* и *C* через им соответствующие обобщённые углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Так для точки *A* будет справедливо следующее векторное её представление:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_M + \overrightarrow{MT}_1 + \overrightarrow{T_1A}, \tag{8}$$

или в координатном представлении в системе координат S_0 из (8) окончательно получим:

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{1}{2}(x_{D_1} + x_{D_2}) - n_1 AT_1 \cos\alpha_1, \\ y_A &= \frac{1}{2}(y_{D_1} + y_{D_2}) + m_1 AT_1 \cos\alpha_1, \\ z_A &= AT_1 \sin\alpha_1, \end{aligned} \tag{9}$$

где $AT_1 = \sqrt{AD_1^2 - \frac{1}{4}((x_{D_1} - x_{D_2})^2 + (y_{D_1} - y_{D_2})^2)}$.

Аналогично для точки B окончательно получим её координаты:

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{1}{2}(x_{D_3} + x_{D_4}) - n_2 BT_2 \cos\alpha_2, \\ y_B &= \frac{1}{2}(y_{D_3} + y_{D_4}) + m_2 BT_2 \cos\alpha_2, \\ z_B &= BT_2 \sin\alpha_2, \end{aligned} \tag{10}$$

где $BT_2 = \sqrt{AD_3^2 - \frac{1}{4}((x_{D_3} - x_{D_4})^2 + (y_{D_3} - y_{D_4})^2)}$.

Координата точки С окончательно найдём из следующих выражений:

$$x_C = \frac{1}{2}(x_{D_5} + x_{D_6}) - n_3 CT_3 \cos\alpha_3,$$
$$y_C = \frac{1}{2}(y_{D_5} + y_{D_6}) + m_3 CT_3 \cos\alpha_3, \quad (11)$$
$$z_C = CT_3 \sin\alpha_3,$$

где $CT_3 = \sqrt{CD_5^2 - \frac{1}{4}((x_{D_5} - x_{D_6})^2 + (y_{D_5} - y_{D_6})^2)}$.

Из трёх выражений (9)-(11) видно, что координаты всех трёх точек зависят только от переменных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, которые, в свою очередь, определяются замыканием соответствующих трёх параллельных кинематических цепей на вершины треугольника *ABC*. С учётом этого условия кинематического замыкания будут выражаться тремя уравнениями вида:

$$\begin{cases} (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = a^2 \\ (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 = a^2 \\ (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = a^2, \end{cases} \quad (12)$$

где $x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$ - координаты соответствующих точек *A*, *B*, *C* получаемые по выражениям (9)-(11) через искомые обобщённые углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Так как система (12) представляет собой систему из трёх нелинейных трансцендентных уравнений с тремя неизвестными углами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, которая не имеет аналитического точного решения, то решать её необходимо численными методами. Проведенный анализ и тестовый и расчёт показали, что численные методы, реализованные в среде MATLAB, вполне обеспечивают решение системы (12) с высокой сходимостью результатов и значительно меньшим объемом вычислений чем при решении системы (4). Далее получаемые в результате численного решения углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ необходимо подставить в выражения (9)-(11) и получить текущие координаты точек $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ и $C(x_C, y_C, z_C)$, однозначно определяющие положение платформы *ABC* в системе координат S_0.

Работа выполнялась в рамках гранта БРФФИ № Т16-М108 «Мехатронные системы параллельной кинематики на кольцевом приводе прямого действия».

SUMMARY

Mathematical model is developed and algorithmization for solving of direct problem of kinematics of the parallel manipulator on six coordinates linear drive of direct action in MATLAB is performed.

РЕЗЮМЕ

Разработана математическая модель и выполнена алгоритмизация для решения в среде MATLAB прямой задачи кинематики параллельного манипулятора на шестикоординатном линейном приводе прямого действия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпович, С.Е. Системы перемещений на основе привода прямого действия : моногр. / С.Е. Карпович, В.В. Жарский, И.В. Дайняк. – Минск : БГУИР, 2008. – 239 с.

2. Математическая модель кинематики для системы перемещений на кольцевом приводе прямого действия / С.Е. Карпович, А.Ю. Войтов, В.В. Кузнецов, В.В. Поляковский // Теоретическая и прикладная механика. – 2016. – №31. – С. 156–161.

3. Heimann, B. Mechatronika. Komponenty, metody, przyklady / B. Heimann, W. Gerth, K. Popp. – Warzawa : PWN, 2001. – 351 s.

РЕФЕРАТ

УДК 621.313.13

Карпович С.Е., Войтов А.Ю., Нестеренко В.Н., Манин А.С. **Математическая модель и алгоритмизация прямой задачи кинематики параллельного манипулятора с шестью степенями свободы**

Разработана математическая модель и выполнена алгоритмизация для решения в среде MATLAB прямой задачи кинематики параллельного манипулятора на шестикоординатном линейном приводе прямого действия. – Ил. 3. Библиогр. 4.

ABSTRACT

UDC 621.313.13

Karpovich S.E., Voitau A.U., Nesterenka V.N., Manin A.S. **Mathematical model and algorithmization of direct problem of kinematics of the parallel manipulator with six degrees of freedom**

Mathematical model is developed and algorithmization for solving of direct problem of kinematics of the parallel manipulator on six coordinates linear drive of direct action in MATLAB is performed. – Fig. 3. Ref.: 4 titles.