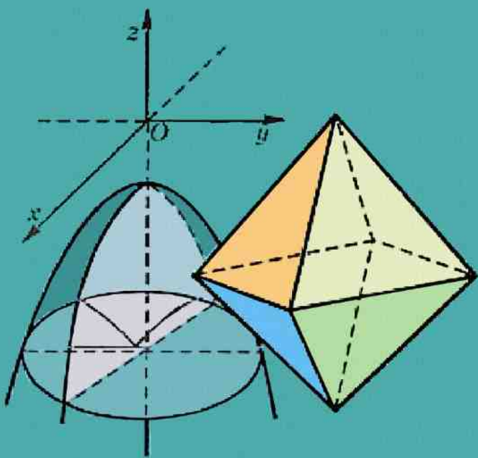
Справочные материалы

Л.И. Майсеня

Справочник по математике

Основные понятия и формулы



Л.И. Майсеня

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

Основные понятия и формулы

2-е издание,
переработанное и дополненное

МИНСК
"ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА"

ПРЕДИСЛОВИЕ

Справочное пособие содержит материал курсов элементарной математики, традиционно изучаемой в средней школе, и высшей математики, изучаемой в колледжах и университетах. Комплексное представление информации из этих математических дисциплин является особенностью данного издания, что создает возможность долгосрочного его использования на образовательном пути школа – колледж – университет.

Изложение материала начинается с базовых понятий – множества, высказывания и операций над ними, а также методов доказательства теорем. Этот материал является фундаментом для усвоения логики математической теории.

Основные понятия и формулы элементарной математики приведены в объеме ее углубленного изучения в школах, гимназиях, лицеях и колледжах, а высшей математики – в объеме, определенном программой изучения данной дисциплины в колледжах и университетах технического профиля.

Поскольку основные понятия и формулы математики представлены достаточно полно и систематизированно, а вместе с ними в книге содержится описание основных методов решения уравнений и неравенств различных типов, то предлагаемое пособие может быть использовано при подготовке к вступительным экзаменам в колледж, а также к централизованному тестированию по математике.

В пособии широко используются иллюстрации, поясняющие математические понятия, утверждения, методы решения и т.д. В ряде случаев теоретический материал сопровождается решением типовых примеров.

Первое издание книги, вышедшее в 2008 г., подверглось значительной переработке. Материал дополнен определениями и формулами, внесен ряд уточнений, учтены пожелания читателей.

Данное справочное пособие будет полезно широкому кругу учащейся молодежи и всем тем, кто интересуется математикой.

Все отзывы и предложения просьба направлять по адресу: 220048, Минск, проспект Победителей, 11, издательство «Вышэйшая школа».

Автор

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$=$	–	равно
$\neq$	–	не равно
$\approx$	–	приближенно равно
$>$	–	больше
$<$	–	меньше
$\geq$	–	больше или равно
$\leq$	–	меньше или равно
$!$	–	факториал
$\smile$	–	дуга
$\angle$	–	угол
$\perp$	–	перпендикуляр
$\backsim$	–	знак подобия
$\sim$	–	знак эквивалентности
$^\circ$	–	градус
$'$	–	минута
$''$	–	секунда
∞	–	бесконечность
$\sum$	–	сумма
$\equiv$	–	тождественно равно
$\mathbf{N}$	–	множество натуральных чисел
$\mathbf{Z}$	–	множество целых чисел
$\mathbf{Q}$	–	множество рациональных чисел
$\mathbf{I}$	–	множество иррациональных чисел
$\mathbf{R}$	–	множество действительных чисел
$\mathbf{C}$	–	множество комплексных чисел
$\in$	–	знак принадлежности элемента
$\subset$	–	знак включения множества
$\subseteq$	–	знак включения или равенства множеств
$\cup$	–	знак объединения множеств
$\cap$	–	знак пересечения множеств
$\setminus$	–	знак разности множеств
$\forall$	–	для всякого
$\|a\|$	–	модуль (абсолютная величина) числа a
const	–	постоянная
НОД (a, b)	–	наибольший общий делитель чисел a, b
НОК (a, b)	–	наименьшее общее кратное чисел a, b
ОДЗ	–	область допустимых значений
$k = \overline{1, n}$	–	k принимает значения $1, 2, \ldots, n$

1

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

1.1. Множества

Основные понятия. Множество, элемент множества – понятия первичные. Под *множеством* понимают совокупность (группу, набор) элементов, объединенных общим свойством. Множества обозначают прописными буквами латинского алфавита: $A, B, X, \ldots$. Если элемент a принадлежит множеству A (является его элементом), пишут: $a \in A$. Если b не принадлежит множеству A, то пишут: $b \notin A$.

Конечное множество – это множество с конечным количеством элементов.

Пустое множество ($\varnothing$) – это множество, которому не принадлежит ни один элемент.

Бесконечное множество – это множество, которое не является ни конечным, ни пустым.

Способы задания множеств:

1) запись элементов множества в фигурных скобках, например $A = \{a, b, c, d\}$;

2) задание общей характеристики свойств элементов множества, например $B = \{x \mid x \in [-1, 2]\}$.

Множества изображают *диаграммами Эйлера – Венна* (рис.1.1).

Два множества A и B называются *равными* (пишут: $A = B$), если каждый элемент множества A принадлежит множеству B и каждый элемент множества B принадлежит множеству A.

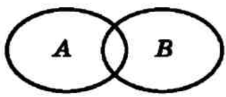
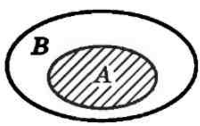


Рис. 1.1

Множество A называется *подмножеством множества* B (или *множество A включено в множество B*), если каждый элемент множества A является элементом множества B (пишут: $A \subset B$). Определенная таким образом зависимость между множествами называется *включением* (рис. 1.2).



$A \subset B$

Рис. 1.2

Для всякого множества A выполняется $\varnothing \subset A$ и $A \subset A$.

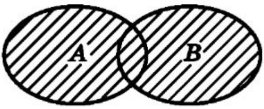
Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то A называется *собственным подмножеством множества* B.

Если $A \subset B$ или $A = B$, то пишут: $A \subseteq B$.

Операции над множествами. *Объединением множеств* A, B называется множество $A \cup B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат или множеству A, или множеству B (рис. 1.3).

Элемент $a \in A \cup B$ тогда и только тогда, когда он принадлежит хотя бы одному из множеств A, B.

Пересечением множеств A, B называется множество $A \cap B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B (рис. 1.4). Пересечение – это общая часть множеств (совокупность их общих элементов).

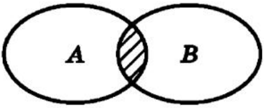


$A \cup B$

Рис. 1.3

Операции объединения и пересечения множеств распространяются на любое количество множеств.

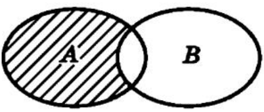
Непересекающиеся множества – это множества, не имеющие ни одного общего элемента.



$A \cap B$

Рис. 1.4

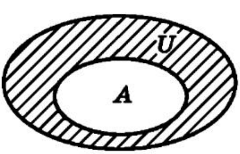
Разностью множеств A, B называется множество $A \setminus B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B (рис. 1.5).



$A \setminus B$

Рис. 1.5

Если $A \subseteq U$, то *дополнением множества* A до множества U называется множество $\overline{A} = U \setminus A$ (рис. 1.6). Дополнение обозначают также A'.



$\overline{A}$

Рис. 1.6

Свойства операций над множествами:

1) если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$;

2) если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$;

3) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;

4) $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$;

5) $A \setminus A = \varnothing$, $A \setminus \varnothing = A$;

6) $A \cup B = B \cup A$ – коммутативность объединения;

7) $A \cap B = B \cap A$ – коммутативность пересечения;

8) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – ассоциативность объединения;

9) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – ассоциативность пересечения;

10) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – дистрибутивность пересечения относительно объединения;

11) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – дистрибутивность объединения относительно пересечения;

12) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ – дистрибутивность пересечения относительно разности.

Принцип двойственности (законы де Моргана):

$$(\overline{A \cap B}) = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad (\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Пусть множества A и B содержат конечное количество элементов. Если $m(A)$ – количество элементов множества A, $m(B)$ – количество элементов множества B, то справедлива формула

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

1.2. Высказывания

Под *высказыванием* (*простым высказыванием*) понимают утверждение (повествовательное предложение), в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно (но не то и другое вместе).

Высказывания обозначают прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, … , их значения *истина* и *ложь* – соответственно «И», «Л». *Сложные высказывания* получают из простых с помощью логических операций, к которым относятся отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность (эквиваленция).

Если A – высказывание, то *отрицание высказывания* A определяется как такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание A ложно. Отрицание высказывания A обозначается $\overline{A}$ (или $\neg A$) и читается: «не A».

Истинность или ложность операции отрицания выражает истинностная таблица 1.1.

Таблица 1.1

A	$\overline{A}$
И	Л
Л	И

Конъюнкцией двух высказываний называется такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда оба составляющих ее высказывания истинны. Если A, B – высказывания, то их конъюнкция обозначается $A \wedge B$

Таблица 1.2

A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

(или A & B) и читается: «A и B». Конъюнкции соответствует истинностная таблица 1.2.

Дизъюнкцией двух высказываний называется такое высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда оба составляющих ее высказывания ложны. Если A, B – два высказывания, то их дизъюнкция обозначается $A \vee B$ и читается: «A или B». Союз «или» здесь используется в соединительном, а не в разделительном смысле, т.е. для истинности высказывания $A \vee B$ допускается также случай истинности обоих высказываний A, B. Операции дизъюнкции соответствует истинностная таблица 1.3.

Таблица 1.3

A	B	$A \vee B$
И	И	И
Л	И	И
И	Л	И
Л	Л	Л

Импликация высказываний A, B определяется как такое высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда высказывание A истинно, а B ложно. Импликация двух высказываний A, B обозначается $A \Rightarrow B$ и читается: «если A, то B». Высказывание A называется *посылкой импликации*, а B – *заключением*. Импликации соответствует истинностная таблица 1.4.

Таблица 1.4

A	B	$A \Rightarrow B$
И	И	И
Л	И	И
И	Л	Л
Л	Л	И

Эквивалентность двух высказываний A, B определяется как высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывания A, B оба истинны или оба ложны. Эквивалентность двух высказываний обозначается $A \Leftrightarrow B$ и читается: «A тогда и только тогда, когда B» («если A, то B, и если B, то A», «A есть необходимое и достаточное условие для B»). Значения эквивалентности определены в истинностной таблице 1.5.

Таблица 1.5

A	B	$A \Leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Если теорема сформулирована в виде $A \Rightarrow B$, то она называется *признаком* или *достаточным условием* для B, где A, B – некоторые высказывания.

Теорема типа $B \Rightarrow A$ называется *обратной* к теореме $A \Rightarrow B$.

Если теорема имеет вид $A \Leftrightarrow B$, то она называется *критерием* или *необходимым и достаточным условием* для B. Теорема такого типа объединяет прямую и обратную теоремы.

Теорема типа $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ называется *противоположной к обратной теореме*.

Высказывание $A \Rightarrow B$ истинно тогда и только тогда, когда истинно высказывание $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. На этом факте основан *метод доказательства от противного*.

Системой двух утверждений A, B называется утверждение «A и B», которое записывают с помощью фигурной скобки: $\begin{cases} A, \\ B. \end{cases}$

Совокупностью двух утверждений A, B называется утверждение «A или B», которое записывают с помощью квадратной скобки: $\left[\begin{array}{l} A, \\ B. \end{array}\right.$

Можно рассматривать системы и совокупности трех (и более) утверждений, а также совокупности систем или системы совокупностей утверждений. В качестве утверждений могут быть уравнения, неравенства и т.д.

2

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

2.1. Множество натуральных чисел

Основные понятия. Множество натуральных чисел обозначается $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Формула четных чисел: $2n \ (n \in \mathbf{N})$.

Формула нечетных чисел: $2n - 1 \ (n \in \mathbf{N})$.

На множестве натуральных чисел определены действия сложения и умножения. Результат остальных основных арифметических действий над натуральными числами (вычитание и деление) может не быть натуральным числом.

Компоненты действий:

$a + b$ называется *суммой*, a, b – *слагаемыми*;

$a \cdot b$ называется *произведением*, a, b – *множителями* или *сомножителями* (произведение обозначают также ab и $a \times b$).

Свойства операций сложения и умножения. Пусть $a,\ b \in \mathbf{N}$. Тогда:

1) $a + b = b + a$ – переместительный закон сложения (коммутативность сложения);

2) $ab = ba$ – переместительный закон умножения (коммутативность умножения);

3) $a + (b + c) = (a + b) + c$ – сочетательный закон сложения (ассоциативность сложения);

4) $a(bc) = (ab)c$ – сочетательный закон умножения (ассоциативность умножения);

5) $a(b + c) = ab + ac$ – распределительный закон (дистрибутивность).

Формула деления числа a на число b:

$$\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b} \text{ или } a = bc + r, \tag{2.1}$$

где a – *делимое*; b – *делитель*; k – *частное*; r – *остаток*; $a,\ b,\ c \in \mathbf{N}$, $r = 0, 1, \ldots$.

Если в формуле (2.1) $r = 0$, то число a делится на число b нацело (без остатка). В таком случае говорят, что c – *полное частное*. Число a называется *кратным* числу b.

Если в формуле (2.1) $r \neq 0$, то число a делится на число b с остатком. В таком случае говорят, что c – *неполное частное*.

Для всякого числа $a \in \mathbf{N}$ определена *степень с натуральным показателем n*:

$$a^n = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Степень с другим числовым показателем может не быть натуральным числом.

Десятичная система счисления. Наиболее употребительна запись натуральных чисел с помощью *позиционной десятичной системы счисления.* В основании системы лежит число 10. Это означает, что счет ведется единицами, десятками, сотнями (десятками десятков), тысячами (десятками сотен) и т.д. Для записи используются десять знаков – *цифр*: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

В десятичной системе счисления каждое натуральное число может быть записано в виде

$$a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

или

$$\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0},$$

где $a_0 a_1, \ldots, a_k$; $a_k \neq 0$.

Значение k определяет разряд цифры: a_0 – цифра единиц, a_1 – цифра десятков, a_2 – цифра сотен и т.д.

Например:

$$\overline{ab} = 10a + b, \quad \overline{abc} = 100a + 10b + c.$$

Признаки делимости. Пусть натуральные числа a, b записаны в десятичной системе счисления и a делится на b без остатка.

На 2 делится число, последняя цифра которого или четная, или нуль.

На 4 делится число, две последние цифры которого нули или образуют число, делящееся на 4.

На 3 делится число, сумма цифр которого делится на 3.

На 5 делится число, последняя цифра которого 5 или 0.

На 6 делится число, которое делится и на 2, и на 3.

На 7 делится число, у которого разность между числом, выраженным тремя последними цифрами, и числом, выраженным остальными цифрами, делится на 7.

На 8 делится число, три последние цифры которого нули или образуют число, делящееся на 8.

На 9 делится число, сумма цифр которого делится на 9.

На 10 делится число, последняя цифра которого нуль.

На 11 делится число, у которого разность суммы цифр, занимающих четные места, и суммы цифр, занимающих нечетные места, делится на 11.

На 13 делится число, у которого разность между числом, выраженным тремя последними цифрами, и числом, выраженным остальными цифрами, делится на 13.

На 25 делится число, две последние цифры которого нули или образуют число, делящееся на 25.

На 125 делится число, три последние цифры которого нули или образуют число, делящееся на 125.

Простые и составные числа. Натуральное число a называется *простым*, если его делителями являются только единица и само число a. Натуральные числа, имеющие и другие делители, называют *составными.* Число 1 не относится ни к простым, ни к составным. Простых чисел бесконечно много. Ниже приведены простые числа, не превосходящие 1000:

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719
727	733	739	743	751	757	761	769
773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881
883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997

Основная теорема арифметики. Каждое составное число может быть представлено в виде произведения простых чисел, и притом единственным образом.

Представление числа в виде произведения простых чисел называется *разложением на простые множители.* Оно производится с помощью признаков делимости.

Например, разложим на простые множители число 1050:

$$\begin{array}{r|l} 1050 & 2 \\ 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Поэтому $1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. *Общим делителем* нескольких чисел называется число, на которое делится без остатка каждое из чисел. Общих делителей может быть несколько.

Правило нахождения наибольшего общего делителя чисел a, b, ... , c (обозначают НОД (a, b, ..., c)):

1) числа a, b, ... , c разлагают на простые множители;

2) в качестве НОД записывают произведение всех тех множителей, которые входят в разложение каждого из чисел, причем с наименьшим из имеющихся показателей.

Общим кратным нескольких чисел называется число, делящееся на каждое из них. Общих кратных бесконечно много.

Правило нахождения наименьшего общего кратного чисел a, b, ... , c (обозначают НОК (a, b, ... , c)):

1) числа a, b, ... , c разлагают на простые множители;

2) в качестве НОК записывают произведение всех тех множителей, которые входят в разложение хотя бы одного из чисел, причем с наибольшим из имеющихся показателей.

Например:

$$\text{НОД}\,(1050, 540) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30,$$
$$\text{НОК}\,(1050, 540) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 18\,900.$$

Для всяких чисел $a, b \in \mathbf{N}$ верна формула

$$ab = \text{НОД}\,(a, b) \cdot \text{НОК}\,(a, b).$$

Числа a, b $(a, b \in \mathbf{N})$ называются *взаимно простыми*, если НОД $(a, b) = 1$.

Наибольший общий делитель двух чисел a, b можно найти также с помощью *алгоритма Евклида*, который состоит в следующем. Если даны два натуральных числа a и b $(a > b)$, то производится последовательное деление:

$$a = nb + b_1,\ b = n_1 b_1 + b_2,\ b_1 = n_2 b_2 + b_3, \dots, b_{k-2} = \\ = n_{k-1} b_{k-1} + b_k,\ \ b_{k-1} = n_k b_k,$$

где n, n_i – положительные числа; $0 \le b_1 < b$; $0 \le b_i < b_{i-1}$, $i = 2, \dots, k$, $k \in \mathbf{N}$. Последний положительный остаток b_k является наибольшим общим делителем чисел a и b.

Например, для нахождения НОД (1050, 540) применяем алгоритм Евклида. Выполняя последовательное деление, получаем:

$$1050 = 1 \cdot 540 + 510,$$
$$540 = 1 \cdot 510 + 30,$$
$$510 = 17 \cdot 30.$$

Последним отличным от нуля остатком является число 30. Значит, НОД $(1050, 540) = 30$.

Метод математической индукции. Для доказательства истинности некоторого утверждения $A(n)$ при всех значениях натуральной переменной n, от которой оно зависит (начиная с n_0 $n_0 \in \mathbf{N}$), часто используют ***метод математической индукции***. Для этого необходимо осуществить следующие три шага:

1) непосредственной проверкой убедиться в истинности $A(n_0)$;

2) допустить, что $A(k)$ истинно для любого $k \ge n_0$;

3) доказать, что $A(k+1)$ истинно для всех $k \in \mathbf{N}$, $k \ge n_0$.

Например, методом математической индукции можно доказать следующие утверждения, справедливые для всякого числа $n \in \mathbf{N}$:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2,$$

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3},$$

$$\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+...+\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)},$$

$$3^n+5^n+7^n+9^n \text{ кратно } 4.$$

Двоичная система счисления. Основанием двоичной системы счисления является число 2. Для записи используются лишь две цифры: 0 и 1.

Записать число в двоичной системе счисления – значит представить его в виде суммы степеней числа 2. Для перевода числа из десятичной системы счисления в двоичную его делят на 2 и записывают остаток (0 или 1), результат снова делят на 2 и новый остаток записывают слева от первого и т.д. Когда в частном получается число 1, то оно приписывается слева к последовательности остатков. Эта последовательность и есть двоичная запись данного числа.

Например, для записи числа 23 в двоичной системе счисления осуществляем последовательное деление на 2. В верхней строке записываем соответствующие частные (предыдущее частное является делимым для следующего шага), располагая результаты справа налево, в нижней строке пишем остатки:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 5 & 11 & 23 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1. & \end{array}$$

Поэтому $23_{10}=10111_2$.

Сложение и умножение двоичных чисел производят согласно *таблицам сложения* и *умножения* (соответственно табл. 2.1 и 2.2):

Таблица 2.1

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Таблица 2.2

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Аналогично вводится система счисления с основанием p, в которой p цифр: $0, 1, 2, \ldots, p-1$. Каждое число записывается в виде

$$a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \ldots + a_1 p^1 + a_0 p^0.$$

2.2. Множество целых чисел

Основные понятия. Множество целых чисел обозначается $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Для изображения чисел используют *числовую прямую* (*числовую ось*) – прямую, на которой заданы точка 0, направление и единица масштаба (рис. 2.1).

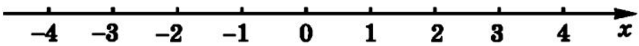


Рис. 2.1

Два числа называются *противоположными*, если они расположены вправо и влево от точки 0 на одинаковом расстоянии.

Противоположные числа имеют противоположные знаки: a и $-a$.

Числа, противоположные натуральным, называются *целыми отрицательными числами*. Их множество обозначают $\mathbf{N}_-$ или $\mathbf{Z}_-$. Натуральные числа называются *целыми положительными числами*. Их множество обозначают $\mathbf{N}$ или $\mathbf{Z}_+$.

Число 0 не является ни положительным, ни отрицательным. Целые положительные числа и число 0 называют *целыми неотрицательными числами*. Целые отрицательные числа и число 0 называют *целыми неположительными числами*.

Множество целых чисел определяется как объединение множества всех натуральных чисел, им противоположных, и нуля:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \mathbf{N}_- \cup \{0\} \quad \text{или} \quad \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbf{Z}_+.$$

Множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$.

Из любых двух целых чисел большее число то, которое изображается на числовой оси точкой, расположенной правее.

Модулем (*абсолютной величиной*) *положительного числа* (а также числа 0) называется само это число, а *модулем* (*абсолютной величиной*) *отрицательного числа* – противоположное ему положительное число. Модуль числа a обозначают $|a|$.

Например, $|5| = 5$, $|-5| = 5$.

Геометрический смысл: модуль числа a – это расстояние от точки 0 до точки a на числовой оси:

$$|a| \geq 0 \text{ для любого } a \in \mathbf{Z}.$$

Действия над целыми числами. На множестве $\mathbf{Z}$ всегда выполнимы операции сложения, вычитания, умножения.

Сложение. При сложении двух чисел с одинаковыми знаками складываются их модули и перед суммой ставится общий знак чисел. При сложении двух чисел с разными знаками из модуля одного из них вычитается модуль другого (меньший из большего) и в результате ставится знак того числа, у которого модуль больше.

Вычитание. Вычитание одного числа из другого можно заменить сложением; при этом уменьшаемое берется со своим знаком, а вычитаемое – с обратным.

Умножение. При умножении двух чисел умножаются их модули и перед произведением ставится знак «+», если знаки сомножителей одинаковы, и «–», если они разные (табл. 2.3).

При перемножении нескольких сомножителей знак произведения положителен, если количество отрицательных сомножителей четно, и отрицателен, если нечетно.

Деление. При делении одного числа на другое (делитель не равен нулю) делят абсолютную величину делимого на абсолютную величину делителя и перед частным ставят знак «+», если знаки делимого и делителя одинаковы, и «–», если они разные (табл. 2.3).

Таблица 2.3

a	b	ab	$\frac{a}{b}$
+	+	+	+
+	–	–	–
–	+	–	–
–	–	+	+

Например:

$$-10-5=-15, \quad -10+5=-5, \quad 10-5=5,$$

$$(-10)(-5)=50, \quad (-10)\cdot 5=-50, \quad 10(-5)=-50,$$

$$(-10):(-5)=2, \quad (-10):5=-2, \quad 10:(-5)=-2.$$

В результате деления целых чисел не всегда получается целое число.

Натуральная степень числа $a \in \mathbf{Z}$ есть целое число:

$$a^n = \underbrace{aa\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ раз}} \ (n \in \mathbf{N}).$$

Для всякого $a \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$, определена степень с показателем 0: $a^0 = 1$.

Для операций сложения и умножения целых чисел справедливы *переместительное, сочетательное* и *распределительное свойства* (т.е. коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность).

2.3. Множество рациональных чисел

Понятие обыкновенных дробей. Число, записанное в виде $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbf{Z}$ и $q \in \mathbf{N}$, называется *обыкновенной дробью.*

Дробь, числитель и знаменатель которой – взаимно простые числа, называется *несократимой.*

Дробь, числитель которой меньше знаменателя (по модулю), называется *правильной дробью.* Дробь, числитель которой больше знаменателя (по модулю) или равен ему, называется *неправильной дробью.*

Основное свойство дроби:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \ (c \neq 0).$$

Сравнение дробей. Пусть $a, b, c, d \in \mathbf{N}$. Тогда:

1) из двух дробей с равными знаменателями больше та, у которой числитель больше: $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, если $a > b$;

2) из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше: $\dfrac{a}{b} > \dfrac{a}{c}$, если $b < c$;

3) если даны две дроби $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{c}{d}$, то, для того чтобы выполнялись соотношения:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \qquad \frac{a}{b} > \frac{c}{d},$$

необходимо и достаточно выполнения соотношений соответственно

$$ad < bc, \qquad ad = bc, \qquad ad > bc.$$

Число, содержащее целую (не равную нулю) и дробную части, называется *смешанным числом*.

Разделив числитель неправильной дроби на знаменатель, можно записать ее в виде смешанного числа; при этом частное записывается как целая часть числа, остаток – как числитель дробной части, а знаменатель остается тем же.

Например, $\dfrac{59}{11} = 5\dfrac{4}{11}$, 5 – целая часть, $\dfrac{4}{11}$ – дробная часть.

Всякое смешанное число переводится в неправильную дробь.

Например, $2\dfrac{3}{4} = \dfrac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \dfrac{11}{4}$.

Множество рациональных чисел $\mathbf{Q}$ определяется как множество всех обыкновенных дробей, т.е.

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N} \right\}.$$

Справедливо включение $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.

Рациональные числа представляются точками на числовой прямой (рис. 2.2).

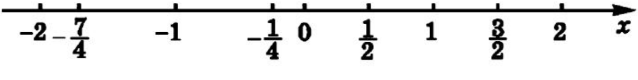


Рис. 2.2

Действия над обыкновенными дробями. На множестве **Q** всегда выполнимы арифметические операции сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль).

Правила действий:

1) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$;

2) если b, d – взаимно простые числа, то $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$;

3) если числа b, d не являются взаимно простыми, то для сложения (вычитания) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}$ необходимо привести дроби к наименьшему общему знаменателю (это НОК (b, d)), а затем сложить (вычесть) по правилу 1.

Например: $\frac{7}{24} + \frac{8}{15} = \frac{7 \cdot 5}{120} + \frac{8 \cdot 8}{120} = \frac{35 + 64}{120} = \frac{99}{120} = \frac{33}{40}$;

4) $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$;

5) $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$;

6) $c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ca}{b}$;

7) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$;

8) $c : \frac{a}{b} = c \cdot \frac{b}{a} = \frac{cb}{a}$.

Для рационального числа a определена степень с целым показателем:

1) $a^n = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} \quad (n \in \mathbf{N})$;

2) $a^0 = 1,\ a \neq 0$;

3) $a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0$.

В результате вычисления степени с целым показателем снова получают рациональное число.

Для операций сложения и умножения справедливы переместительное, сочетательное и распределительное свойства (коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность).

Взаимно обратными числами называют два числа, произведение которых равно единице. Любые числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) являются взаимно обратными.

Пропорция. Дробь $\frac{a}{b}$ называют *отношением чисел* a, b; пишут также: $a:b$.

Пропорцией называется равенство двух отношений:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{или} \quad a:b=c:d. \tag{2.2}$$

Числа a и d пропорции (2.2) называют *крайними членами*, b и c – *средними членами*.

Основное свойство пропорции: $ad=bc$.

Одновременно справедливы пропорции:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d}, \quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a}, \quad \frac{d}{c}=\frac{b}{a},$$

т.е. в каждой пропорции можно менять местами или только средние члены, или только крайние, или те и другие попарно.

Если верна пропорция $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то справедливо соотношение, называемое *производной пропорцией*:

$$\frac{ma+nb}{pa+qb}=\frac{mc+nd}{pc+qd}, \tag{2.3}$$

где m, n, p, q – действительные числа; $pa+qb \neq 0$; $pc+qd \neq 0$ и одновременно $m \neq 0$, $n \neq 0$.

При определенных значениях коэффициентов m, n, p, q из пропорции (2.3) получают частные случаи:

$$\frac{a \pm b}{b}=\frac{c \pm d}{d}, \quad \frac{a}{a \pm b}=\frac{c}{c \pm d}, \quad \frac{a \pm b}{a \mp b}=\frac{c \pm d}{c \mp d}.$$

Из равенства нескольких отношений

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$$

следует:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_1m_1+a_2m_2+\ldots+a_nm_n}{b_1m_1+b_2m_2+\ldots+b_nm_n}=\frac{a_1}{b_1},$$

где $b_1m_1+b_2m_2+\ldots+b_nm_n \neq 0$, $m_1 \neq 0$.

Отношения $a : b : c$ понимают как

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{a}{c}.$$

Чтобы разделить величину A на части *прямо пропорционально* числам $a, b, ..., c$ (т.е. в отношениях $a : b : ... : c$), необходимо вычислить:

$$\frac{Aa}{a+b+...+c}, \frac{Ab}{a+b+...+c},..., \frac{Ac}{a+b+...+c}.$$

Чтобы разделить величину A на части *обратно пропорционально* числам $a, b, ..., c$ (т.е. в отношениях $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}: ... :\frac{1}{c}$), необходимо вычислить:

$$\frac{A\cdot\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+...+\frac{1}{c}}, \frac{A\cdot\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+...+\frac{1}{c}},..., \frac{A\cdot\frac{1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+...+\frac{1}{c}}.$$

Десятичные дроби и действия над ними. *Десятичная дробь* – это частный случай обыкновенной дроби, знаменатель которой есть натуральная степень числа 10. Для нее используют специальную форму записи.

Например:

$$\frac{37}{100}=0{,}37; \quad \frac{1}{1000}=0{,}001; \quad 5\frac{1}{10}=5{,}1.$$

Правила действий над десятичными дробями. 1. Чтобы сложить (вычесть) десятичные дроби, их записывают одна под другой, располагая запятую под запятой. Сложение (вычитание) выполняют по правилам действий с целыми числами. В результате (в сумме или разности) запятая находится под запятыми исходных компонентов действий.

Например:

$$\begin{array}{r} 24{,}04 \\ +\;\; 2{,}5 \\ \hline 26{,}54 \end{array}$$

2. При умножении десятичных дробей «столбиком» их записывают (произвольно) одну под другой и перемножают как целые числа. В результате (произведении) отделяют после запятой столько цифр, сколько их содержится после запятой (суммарно) в двух сомножителях.

Например:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 24,04 \\ 2,5 \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} 12020 \\ 4808 \end{array} \\ \hline 60,100 \end{array}$$

В результате получаем: $24,04 \cdot 2,5 = 60,1$.

3. Для того чтобы разделить десятичные дроби, их умножают обе на такую степень числа 10, чтобы делитель стал целым числом. Делят как целые числа. В частном запятая ставится тогда, когда выделение целой части делимого закончено.

Например: $24,02 : 2,5 = 240,2 : 25$,

$$\begin{array}{l|l} -240,2 & \underline{\;25\;} \\ \;\;\underline{225} & 9,608 \\ \;\;-152 & \\ \;\;\;\;\underline{150} & \\ \;\;\;\;-200 & \\ \;\;\;\;\;\;\underline{200} & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;0 & \end{array}$$

В результате получаем: $24,02 : 2,5 = 9,608$.

Обращение дробей. Для того чтобы *обратить обыкновенную дробь в десятичную,* числитель обыкновенной дроби делят на ее знаменатель по правилу деления десятичной дроби на целое число. Если знаменатель несократимой дроби разлагается лишь на простые множители 2 и 5 (в некоторой натуральной степени), то в результате получается конечная десятичная дробь; если имеются другие простые множители, то получается *бесконечная периодическая десятичная дробь*. Бесконечная десятичная дробь, которая (начиная с некоторого разряда) образуется последовательным приписыванием справа одного и того же числа, называется *периодической десятичной дробью*, а повторяющееся число – ее *периодом*. Дробь, в которой повторение начинается с первой цифры после запятой, называется *чисто периодической*. Дробь, в которой повторение цифры начинается не сразу после запятой, называется *смешанной периодической*.

При записи периодических дробей период заключают в скобки.

Например:

$$0,3333... = 0,(3); \quad 3,5555... = 3,(5); \quad 1,6111... = 1,6(1);$$
$$2,18313131... = 2,18(31).$$

Конечную десятичную дробь можно считать периодической с периодом 0 или 9.

Например:

$$3{,}168 = 3{,}168(0) = 3{,}167(9).$$

Для того чтобы выполнить арифметические действия с периодическими дробями, их необходимо перевести в обыкновенные дроби. Любую периодическую дробь можно обратить в обыкновенную.

1. *Обращение конечной десятичной дроби в обыкновенную.* Сохраняют целую часть. Преобразуют дробную часть: в числителе следует написать число, стоящее после запятой, а в знаменателе написать 10^k, где k – количество цифр справа от запятой. Сократить, если возможно.

2. *Обращение чисто периодической дроби в обыкновенную.* Сохраняют целую часть числа. Преобразуют дробную часть: период чистой периодической дроби записывают в числителе обыкновенной дроби, а в знаменателе пишут цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде. Сократить, если возможно.

3. *Обращение смешанной периодической дроби в обыкновенную.* Сохраняют целую часть числа. Преобразуют дробную часть: из числа, стоящего после запятой до второго периода, следует вычесть число, стоящее после запятой до первого периода, и полученную разность записать в числителе обыкновенной дроби; в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и дописать справа столько нулей, сколько цифр между запятой и периодом. Сократить, если возможно.

Например:

$$18{,}5104 = 18\frac{5104}{10^4} = 18\frac{5104}{10000} = 18\frac{319}{625},$$

$$1,(18) = 1\frac{18}{99} = 1\frac{2}{11},$$

$$1{,}31(12) = 1\frac{3112-31}{9900} = 1\frac{3081}{9900} = 1\frac{1027}{3300}.$$

Множество рациональных чисел **Q** можно определить как множество всех бесконечных периодических десятичных дробей.

Проценты. *Один процент* (1%) – это сотая часть числа. Если число принято за единицу, то 1% = 0,01; 25% = 0,25 и т.д.

Процентным отношением чисел a и b называется величина

$$p = \frac{a}{b} \cdot 100\%.$$

Чтобы найти, сколько процентов ($x\%$) от числа b составляет число a, можно воспользоваться пропорцией

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{100}.$$

Чтобы найти число x по известному числу a, которое составляет $p\%$ от числа x, можно воспользоваться пропорцией

$$\frac{a}{x} = \frac{p}{100}.$$

Чтобы найти число x, которое составляет $p\%$ от числа b, можно воспользоваться пропорцией

$$\frac{x}{b} = \frac{p}{100}.$$

Одна промилле (1‰) – тысячная часть числа.

2.4. Множество иррациональных чисел

Множество иррациональных чисел **I** определяется как множество всех бесконечных десятичных непериодических дробей. Иррациональное число невозможно записать в виде обыкновенной дроби, т.е. $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \varnothing$.

Иррациональными числами, в частности, являются:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots; \quad \sqrt{3} = 1{,}732050807\ldots; \quad \sqrt{5} = 2{,}236067977\ldots;$$
$$\pi = 3{,}141592653\ldots; \quad e = 2{,}718281828\ldots.$$

В иррациональном числе 0,1234567891011… после запятой идут последовательно все натуральные числа.

Иррациональные числа представляются реально точками на числовой прямой.

Например, число $\sqrt{2}$ – это длина диагонали квадрата со стороной 1 (рис. 2.3).

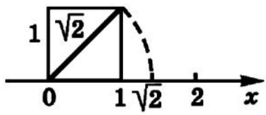


Рис. 2.3

2.5. Множество действительных чисел

Основные понятия. *Множество действительных* (*вещественных*) *чисел* $\mathbf{R}$ определяется как объединение множества рациональных и множества иррациональных чисел:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}.$$

Справедливы следующие включения:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}, \quad \mathbf{I} \subset \mathbf{R}.$$

Действительные числа можно изображать точками на числовой прямой. Между действительными числами и точками координатной прямой установлено взаимно однозначное соответствие: каждой точке соответствует единственное действительное число, и наоборот: каждому $x \in \mathbf{R}$ соответствует единственная точка на числовой прямой.

Множество всех действительных чисел называют еще *числовой осью*, его обозначают $(-\infty, +\infty)$.

Число x, которое соответствует определенной точке M на числовой оси, называется *координатой точки M*; пишут: $M(x)$.

Числовая ось называется также *координатной прямой* (*осью*) *Ox*.

Из двух действительных чисел бóльшим (меньшим) является то, которому соответствует точка числовой оси, расположенная правее (левее). Если число b больше (меньше) числа a, пишут: $b > a$ ($b < a$).

На множестве $\mathbf{R}$ определены все основные арифметические действия: сложение, вычитание, умножение, деление (кроме деления на нуль).

Пусть $A \subset \mathbf{R}$. Множество A действительных чисел называют *ограниченным сверху*, если существует число $r \in \mathbf{R}$ не меньше любого $x \in A$ (т.е. $r \geq x$). Множество A действительных чисел называют *ограниченным снизу*, если существует число $r \in \mathbf{R}$ не больше любого $x \in A$ (т.е. $r \leq x$). Множество A действительных чисел называют *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу.

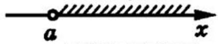
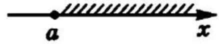
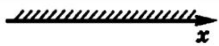
Точной верхней гранью множества A действительных чисел называется наименьшее число, ограничивающее множество A сверху. Ее обозначают $\sup A$ (читают: «супремум множества A»).

Точной нижней гранью множества A действительных чисел называется наибольшее число, ограничивающее множество A снизу. Ее обозначают $\inf A$ (читают: «инфимум множества A»).

Каждое множество действительных чисел, ограниченное сверху, имеет точную верхнюю грань, а ограниченное снизу – точную нижнюю грань. Этот факт выражает *свойство непрерывности множества действительных чисел*.

Числовые промежутки. Указанные в табл. 2.4 подмножества множества $\mathbf{R}$ называются *промежутками*.

Таблица 2.4

Название промежутка	Обозначение	Запись в виде неравенства	Изображение на числовой оси
Отрезок	$[a, b]$	$a \le x \le b$	
Интервал	(a, b)	$a < x < b$	
Полуинтервал	$[a, b)$	$a \le x < b$	
	$(a, b]$	$a < x \le b$	
Числовые лучи	$(-\infty, b)$	$x < b$	
	$(-\infty, b]$	$x \le b$	
	$(a, +\infty)$	$x > a$	
	$[a, +\infty)$	$x \ge a$	
Числовая прямая	$(-\infty, +\infty)$	$-\infty < x < +\infty$	

Отрезок, интервал, полуинтервал – ограниченные множества. Луч ограничен сверху или снизу. Числовая прямая – неограниченное множество.

Числовые неравенства и их свойства. Пусть $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. *Число a меньше числа b* (пишут: $a < b$) тогда и только тогда, когда разность $a - b$ отрицательна; *число a больше числа b* (пишут: $a > b$) тогда и только тогда, когда разность $a - b$ положительна.

Неравенства типа $a < b$, $a > b$ называются *строгими*, неравенства типа $a \le b$, $a \ge b$ – *нестрогими*. Нестрогое неравенство $a \le b$ ($a \ge b$) верно, если верно одно из двух соотношений: $a < b$ ($a > b$) или $a = b$.

Неравенство типа $a < b < c$ называется *двойным*. Оно верно, если верны оба неравенства ($a < b$ и $b < c$). Двойные неравенства также могут быть нестрогими.

С в о й с т в а   н е р а в е н с т в:

1) если $a<b$, то $b>a$;

2) если $a<b$, то $a+c<b+c$;

3) если $a<b$ и $c>0$, то $ac<bc$; если $a<b$ и $c<0$, то $ac>bc$;

4) если числа a и b одного знака ($ab>0$) и $a<b$, то $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$;

5) если $a<b$ и $c<d$, то $a+c<b+d$;

6) если $a<b$ и $c<d$, где $a, b, c, d>0$, то $ac<bd$;

7) если $0<a<b$ и $0<c<d$, то $\frac{a}{d}<\frac{b}{c}$;

8) если $0<a<b$, то $a^n<b^n$ ($n\in\mathbf{N}$).

Некоторые полезные неравенства. Справедливы неравенства:

$\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2},\ a,b\ge 0$ (равенство при $a=b$);

$a+\frac{1}{a}\ge 2,\ a>0$ (равенство при $a=1$);

$a+\frac{1}{a}\le -2,\ a<0$ (равенство при $a=-1$);

$\sqrt{a+b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b},\ a,b\ge 0$ (равенство при $a\,b=0$).

Характерные величины для действительных чисел. *Модуль* (*абсолютная величина*) *числа* $x\in\mathbf{R}$ (обозначается $|x|$) определяется следующим образом:

$$|x|=\begin{cases} x, \text{ если } x\ge 0,\\ -x, \text{ если } x<0.\end{cases}$$

Геометрический смысл: $|x|$ – расстояние от точки 0 до точки x на числовой оси.

С в о й с т в а   м о д у л я. Для всякого числа $x\in\mathbf{R}$ выполняется:

1) $|x|\ge 0$;   2) $|-x|=|x|$;

3) $|xy|=|x|\cdot|y|$;   4) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|},\ y\ne 0$;

5) $\left|x^c\right|=|x|^c,\ c\in\mathbf{Z},\ x\ne 0$;   6) $|x+y|\le|x|+|y|$;

7) $|x+y|\ge|x|-|y|$;   8) $|x-y|\ge|x|-|y|$;

9) $|x| = a$ (где $a > 0$) тогда и только тогда, когда $\left[\begin{array}{l} x = -a, \\ x = a; \end{array}\right.$

10) $|x| < a$ (где $a > 0$) тогда и только тогда, когда $x \in (-a, a)$;

11) $|x| > a$ (где $a > 0$) тогда и только тогда, когда

$$x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty).$$

Знак (*сигнум*) *числа* $x \in \mathbf{R}$ (обозначается $\operatorname{sgn} x$ или $\operatorname{sign} x$) определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ -1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Справедливы равенства: $x = |x| \operatorname{sgn} x$, $|x| = x \operatorname{sgn} x$.

Целая часть (*антье*) *числа* $x \in \mathbf{R}$ (обозначается $[x]$) определяется как целое число такое, что

$$[x] \le x < [x] + 1.$$

Дробная часть (*мантисса*) *числа* $x \in \mathbf{R}$ (обозначается $\{x\}$) определяется равенством

$$\{x\} = x - [x].$$

Например: $[2{,}51] = 2$, $\{2{,}51\} = 0{,}51$, $[-2{,}51] = -3$, $\{-2{,}51\} = 0{,}49$.

Корни. Для всякого числа $a \in \mathbf{R}$ определена степень a^n, $n \in \mathbf{N}$.

Число $b \in \mathbf{R}$ называется *корнем n-й степени*, $n \in \mathbf{N}$, $n \ge 2$, из числа a, если $b^n = a$ (обозначается $\sqrt[n]{a}$).

Нахождение корня n-й степени из данного числа a называют *извлечением корня n-й степени из числа a*. Число a, из которого извлекается корень n-й степени, называют *подкоренным выражением*, а число n – *показателем корня*.

Если $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbf{N}$), то $\sqrt[2k+1]{a}$ определен для всех $a \in \mathbf{R}$ и принимает любые действительные значения.

Если $n = 2k$ ($k \in \mathbf{N}$), то $\sqrt[2k]{a}$ определен для всех $a \ge 0$ ($a \in \mathbf{R}$). В курсе элементарной математики рассматривают *арифметическое значение корня*, т.е. число $\sqrt[2k]{a} \ge 0$.

Свойства корней. Пусть $a, b \in \mathbf{R}$. Тогда:

1) $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a},\ k \in \mathbf{N}$;

2) $(\sqrt[n]{a})^n = a$, где $a \in \mathbf{R}$, если $n = 2k+1$, и $a \ge 0$, если $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$;

3) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, \text{ если } n = 2k+1, \\ |a|, \text{ если } n = 2k, k \in \mathbf{N}; \end{cases}$

4) $\sqrt[n]{ab} = \begin{cases} \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}, \text{ если } n = 2k+1, \\ \sqrt[n]{|a|}\sqrt[n]{|b|}, \text{ если } ab \ge 0, n = 2k, k \in \mathbf{N}; \end{cases}$

5) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ если } b \ne 0,\ n = 2k+1, \\ \dfrac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}, \text{ если } ab \ge 0, b \ne 0, n = 2k, k \in \mathbf{N}; \end{cases}$

6) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, где $m \in \mathbf{R}$ (если $n = 2k+1$, то равенство верно для $a \in \mathbf{R}$, а если $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$, – то для $a \ge 0$);

7) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$, где $m \in \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{N}$ (если $n, p = 2k+1$, то равенство верно для $a \in \mathbf{R}$, а если $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$, – то для $a^m \ge 0$);

8) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, $m \in \mathbf{N}, m \ge 2$ (если $mn = 2k+1$, то равенство верно для $a \in \mathbf{R}$, а если $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$, – то для $a \ge 0$).

Чтобы перемножить или разделить корни, имеющие разные показатели, необходимо предварительно привести эти корни к общему показателю. Приведение корней к общему показателю осуществляется посредством формулы

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

при условии существования этих корней.

Устранение иррациональности в знаменателе дроби. В знаменателе дроби имеется иррациональность, если он содержит корни.

Умножая числитель и знаменатель дроби на одно и то же числовое выражение, отличное от нуля, заданную дробь сводят к равной ей дроби, не содержащей корней в знаменателе:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}\mp\sqrt{b}\right)}=\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-c}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{a+b-c+2\sqrt{a}\sqrt{b}}$$

(далее преобразования выполняют в зависимости от выражения в знаменателе),

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}\pm\sqrt[4]{b}}=\frac{\sqrt[4]{a}\mp\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt[4]{a}\mp\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b},$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a\pm b},$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}\pm\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt[3]{a}\mp\sqrt[3]{b}}{a\mp b}.$$

Степени. В множестве **R** определена степень a^x с действительным показателем. В выражении a^x число a называют *основанием степени*, число x – *показателем степени*. Нахождение значения степени называют *возведением в степень*.

Степень с действительным показателем. Пусть $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, тогда:

1) $a^n = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$;

2) $a^0 = 1, a \neq 0$;

3) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, a \neq 0$;

4) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, где $n \geq 2$ (если $n = 2k+1$, то равенство верно для $a \in \mathbf{R}$, а если $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$, – то для $a \geq 0$);

5) $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$, где $n \geq 2$, $m \in \mathbf{N}$ (если $n = 2k+1$, то равенство верно для $a \in \mathbf{R}$, а если $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$, – то для $a \geq 0$);

6) $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$, где $n \geq 2$, $m \in \mathbf{N}$ (если $n = 2k+1$, то равенство верно для $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, а если $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$, – то для $a > 0$);

7) a^k, где $k \in \mathbf{I}$, определяется следующим образом. Пусть иррациональное число k записано в виде десятичной дроби и (k_n) – последовательность его десятичных приближений с недостатком (или с избытком). Для любого действительного числа $a > 0$ степень a^k с иррациональным показателем определяется с помощью понятия предела $a^k = \lim\limits_{n\to\infty} a^{k_n}$.

На множестве $\mathbf{R}$ не определены отрицательная и нулевая степени числа 0, а также $a^{\frac{1}{n}}$, если $a < 0$, $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$.

Свойства степеней. Допустим, что $a, b, c \in \mathbf{R}$ и это такие числа, что все степени имеют смысл. Тогда:

1) $a^b a^c = a^{b+c}$; 2) $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$;

3) $a^c b^c = (ab)^c$; 4) $\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$;

5) $(a^b)^c = a^{bc}$;

6) если $a > 1$ и $x < y$, то $a^x < a^y$;

7) если $0 < a < 1$ и $x < y$, то $a^x > a^y$;

8) если $0 < a < b$ и $x > 0$, то $a^x < b^x$;

9) если $0 < a < b$ и $x < 0$, то $a^x > b^x$.

Средние величины. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда:

$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ – *средняя арифметическая* (величина);

$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ – *средняя геометрическая* $(a_1, a_2, \ldots, a_n > 0)$;

$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$ – *средняя гармоническая* $(a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0)$;

$K = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$ – *средняя квадратичная.*

Справедлива ***теорема Коши***: $H \le G \le A$ $(a_1, a_2, \dots, a_n > 0)$, т.е.

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}.$$

Округление десятичных дробей. Мерой точности приближенных значений является *погрешность*. Пусть A − точное числовое значение некоторой величины, a − ее приближенное значение (или *приближение*).

Число a называется *приближенным значением числа A с точностью до Δ*, если выполняется неравенство

$$|A - a| \le \Delta. \tag{2.4}$$

Величина Δ, удовлетворяющая неравенству (2.4), называется *абсолютной погрешностью* приближенного значения a числа A.

Точное значение числа A часто записывают в виде $A = a \pm \Delta$.

Относительной погрешностью приближенного значения a $(a \ne 0)$ числа A называется величина δ, удовлетворяющая условию

$$\left|\frac{A-a}{a}\right| \le \delta.$$

В частности, можно принять $\delta = \dfrac{\Delta}{|a|}$.

Относительная погрешность часто выражается в процентах:

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|} \cdot 100\%.$$

Абсолютная погрешность отражает количественную сторону погрешности, а относительная − качественную.

Например, приближенное равенство $\pi \approx \dfrac{22}{7}$ является более точным, чем равенство $\pi \approx 3{,}14$, так как $\delta_1 < \delta_2$, где

$$\frac{\left|\pi - \frac{22}{7}\right|}{\frac{22}{7}} = 0{,}00040233\ldots < 0{,}00041 = \delta_1,$$

$$\frac{\pi-3{,}14}{3{,}14}=0{,}00050721\ldots<0{,}00051=\delta_2.$$

Округление числа заключается в замене его другим, приближенным, значением. При этом сохраняют одну или несколько цифр, считая слева направо, и отбрасывают все последующие или, если это необходимо для сохранения разрядов, отбрасываемые цифры заменяют нулями. Существует три способа округления чисел.

I. *Округление по правилу дополнения* (или просто *округление*) осуществляется по следующим правилам:

1) если первая слева из отбрасываемых цифр меньше 5, то последняя сохраняемая цифра остается без изменения;

2) если первая слева из отбрасываемых цифр больше или равна 5, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.

II. При *округлении с недостатком* последняя сохраняемая цифра остается без изменения.

III. При *округлении с избытком* последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.

Значащими цифрами приближенного значения a ($a\neq 0$) называются все его цифры, кроме нулей, стоящих левее первой отличной от нуля цифры, если приближенное значение a – десятичная дробь, а также кроме нулей, служащих лишь для обозначения десятичных разрядов, если приближенное значение a – целое. Форма записи приближенного значения a в виде

$$a=g\cdot 10^p,\quad 0{,}1\leq|g|<1,\ p\in\mathbf{Z},$$

где g – множитель, состоящий только из значащих цифр (кроме нуля целых), называется *нормализованной.*

Значащая цифра приближенного значения называется *верной в узком* (*широком*) *смысле*, если абсолютная погрешность приближения не превосходит половины (одной) единицы десятичного разряда, соответствующего этой цифре. Значащие цифры, не являющиеся верными, называются *сомнительными.*

2.6. Множество комплексных чисел

Основные понятия. *Комплексным числом* z называется число вида

$$a+bi, \tag{2.5}$$

где $a, b \in \mathbf{R}$; $i^2=-1$. Число a называется *действительной частью* числа z (пишут: $a=\operatorname{Re} z$), число b – *мнимой частью* ($b=\operatorname{Im} z$). Число i – *мнимая единица*.

Комплексные числа $a+bi$ при $a=0$, $b \neq 0$ называются *чисто мнимыми*.

Запись числа в виде (2.5) называется *алгебраической формой комплексного числа*.

Для комплексных чисел понятия «больше» и «меньше» не определены.

Числа вида $a+bi$ и $\bar{z}=a-bi$, которые отличаются лишь знаком при мнимой части, называются *комплексно-сопряженными*.

Два комплексных числа $z_1=a_1+b_1 i$ и $z_2=a_2+b_2 i$ называются *равными*, если $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$.

Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbf{C}$. Действительные числа можно рассматривать как частный случай комплексных чисел (при $b=0$): $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

Свойства комплексно-сопряженных чисел:

1) $\overline{(\bar{z})}=z$; 2) $z+\bar{z}=2a$;

3) $z-\bar{z}=2bi$; 4) $z\bar{z}=a^2+b^2$;

5) $z=\bar{z}$ тогда и только тогда, когда $z \in \mathbf{R}$;

6) $\overline{z_1 \pm z_2}=\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; 7) $\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1 \bar{z}_2$;

8) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$.

Для комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, определены операции сложения, вычитания, умножения, деления.

Сложение. Осуществляется по правилу

$$(a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i.$$

Умножение. Осуществляется по правилу

$$(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)=(a_1 a_2-b_1 b_2)+(a_1 b_2+a_2 b_1)i,$$

т.е. по обычному правилу умножения многочленов с обязательной заменой i^2 числом -1.

Д е л е н и е. Осуществляется по правилу

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i,$$

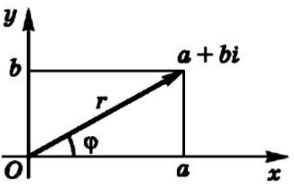
т.е. путем умножения делимого и делителя на число, комплексно-сопряженное делителю.

В о з в е д е н и е в н а т у р а л ь н о ю с т е п е н ь. Определяется равенством

$$z^n=\underbrace{zz\cdot\ldots\cdot z}_{n\ \text{раз}},\ n\in\mathbf{N}.$$

Геометрическое истолкование. Каждому комплексному числу $a+bi$ однозначно соответствует упорядоченная пара действительных чисел (a,b), и наоборот, т.е. между множеством точек координатной плоскости и множеством комплексных чисел $\mathbf{C}$ существует взаимно однозначное соответствие. Координатная плоскость называется еще *комплексной плоскостью*. Горизонтальная ось Ox называется *действительной осью*, вертикальная ось Oy – *мнимой*. Комплексно-сопряженные числа z и $\overline{z}$ симметричны относительно действительной оси.

Каждому комплексному числу $z=a+bi$ взаимно однозначно соответствует радиус-вектор с координатами a и b (рис. 2.4).



Р и с. 2.4

Модулем комплексного числа z называется длина соответствующего радиуса-вектора:

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2},\ |z|\geq 0.$$

Аргументом комплексного числа $z=a+bi$, $z\neq 0$, называется угол, который образует радиус-вектор (a,b) с осью Ox (обозначают Arg$z$). Поскольку этот угол можно находить с точностью до $2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, то каждому $z\in\mathbf{C}$, $z\neq 0$, соответствует бесконечное множество значений Arg$z$. Для нахождения $\varphi=\operatorname{Arg}z$ используют систему равенств

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\[2ex] \sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{cases}$$

Если на аргумент комплексного числа наложено ограничение $0 \le \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \le \pi$), то говорят, что задано *главное значение аргумента* (обозначают $\varphi = \arg z$).

Из геометрического смысла следует:

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi.$$

Если $z = 0$, то $|z| = 0$, аргумент числа $z = 0$ не определен.

Для комплексно-сопряженных чисел справедливы равенства $|\overline{z}| = |z|$, $\arg\overline{z} = -\arg z$.

Тригонометрическая форма комплексных чисел. Комплексное число $z = a + bi$, $z \ne 0$, может быть записано в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{2.6}$$

где $r = |z|$; $\varphi = \arg z$.

Запись (2.6) называется *тригонометрической формой комплексного числа*.

Если

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

где $z_1, z_2 \ne 0$; $r_1 = |z_1|$; $\varphi_1 = \arg z_1$; $r_2 = |z_2|$; $\varphi_2 = \arg z_2$, то определены операции умножения, деления, возведения в натуральную степень, извлечения корня.

Умножение:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \tag{2.7}$$

Деление:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),\ z_2 \ne 0. \tag{2.8}$$

Возведение в натуральную степень производят по *формуле Муавра*:

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right),\ n \in \mathbf{N}, \tag{2.9}$$

где $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; $r = |z|$; $\varphi = \arg z$.

Извлечение корня производят по формуле

$$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

при этом параметру k придают последовательно n значений: $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Получают n значений корня (ровно столько, каков показатель корня), $\sqrt[n]{r}$ понимают в арифметическом смысле.

Все значения корня имеют один и тот же модуль: $\left|(\sqrt[n]{z})_k\right| = \sqrt[n]{r}$, т.е. лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$.

Аргументы каждых двух последовательных значений корня различаются на величину $\frac{2\pi}{n}$, т.е. лежат в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$.

Замечание. В результате использования формул (2.7) – (2.9) аргумент может выйти за пределы промежутка $[0, 2\pi)$ или $(-\pi, \pi]$. В таком случае следует использовать периодичность функций $\sin x$, $\cos x$ и в ответе указать главное значение аргумента из выбранного промежутка.

Например, для того чтобы вычислить $\sqrt[3]{1+i}$, запишем число $1+i$ в тригонометрической форме. Имеем: $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Так как $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{1} = 1$ и $1 + i$ находится в I четверти, то $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Тогда

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Получаем:

$$w_k = (\sqrt[3]{1+i})_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right),$$

где $k = 0, 1, 2.$

Для конкретных значений k имеем:

$$w_0 = (\sqrt[3]{1+i})_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$w_1 = (\sqrt[3]{1+i})_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$w_2 = (\sqrt[3]{1+i})_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

Точки w_0, w_1, w_2 расположены на окружности радиуса $\sqrt[6]{2}$ и образуют правильный треугольник (рис. 2.5).

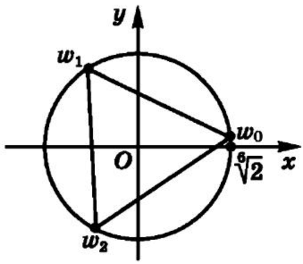


Рис. 2.5

Показательная форма комплексного числа. Для всякого значения $\varphi \in \mathbf{R}$ верна *формула Эйлера*:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Запись числа $z \in \mathbf{C}$ в форме

$$z = re^{i\varphi},$$

где $r = |z|$; $\varphi = \arg z$, называется *показательной формой комплексного числа*.

Для комплексного числа, записанного в различных формах, выполняются равенства

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Если

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \qquad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2},$$

где $z_1, z_2 \neq 0$; $r_1 = |z_1|$; $\varphi_1 = \arg z_1$; $r_2 = |z_2|$; $\varphi_2 = \arg z_2$, то умножение, деление, возведение в натуральную степень, извлечение корня выполняются соответственно по следующим правилам:

1) $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$; 2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$;

3) $z^n = r^n e^{in\varphi}$, где $z = re^{i\varphi}$; $r = |z|$, $\varphi = \arg z$; $n \in \mathbf{N}$;

4) $(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$, где параметру k придают последовательно n значений: $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Получают n значений корня (ровно столько, каков показатель корня), $\sqrt[n]{r}$ понимают в арифметическом смысле.

3
АЛГЕБРА

3.1. Выражения с переменными

Понятие выражения с переменными. *Выражение* $F(x, y, ..., z)$ *от переменных* $x, y, ..., z$ образуют с использованием чисел и переменных $x, y, ..., z$ из некоторого числового множества, над которым производятся арифметические и функциональные операции.

В частности, $F(x)$ – выражение от одной действительной переменной x, если $x \in D \subseteq \mathbf{R}$.

Область допустимых значений (ОДЗ) *выражения* – множество всех наборов числовых значений переменных $x, y, ..., z$, при которых выражение $F(x, y, ..., z)$ имеет смысл.

Классификация выражений:

1) *элементарное выражение* – выражение, содержащее только сложение, вычитание, умножение, деление переменных, возведение их в целую степень, извлечение арифметического корня и только те функциональные операции, которые соответствуют элементарным функциям;

2) *специальное выражение* – выражение, содержащее функциональные операции, которые соответствуют специальным функциям;

3) *алгебраическое выражение* – элементарное выражение, деление переменных, возведение их в целую степень и извлечение арифметического корня;

4) *трансцендентное выражение* – элементарное выражение, содержащее возведение переменной в иррациональную степень, операции показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических функций;

5) *рациональное выражение* – алгебраическое выражение, содержащее только сложение, вычитание, умножение, деление переменных и возведение их в целую степень;

6) *иррациональное выражение* – алгебраическое выражение, содержащее только сложение, вычитание, умножение, деление переменных, возведение их в целую степень и извлечение арифметического корня из переменной;

7) *целое выражение* (или *многочлен*) – рациональное выражение, содержащее только сложение, вычитание, умножение переменных и возведение их в натуральную степень;

8) *дробное выражение* (или *рациональная дробь*) – рациональное выражение, содержащее деление на переменную.

Классификация выражений представлена на рис. 3.1.

Рис. 3.1

Формулы сокращенного умножения. Пусть a, b – произвольные числа или выражения. Справедливы следующие формулы:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – квадрат суммы;

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – квадрат разности;

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ – разность квадратов;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – куб суммы;

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – куб разности;

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ – сумма кубов;

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ – разность кубов;

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, где $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$;

$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n})$, где $n \in \mathbf{N}$.

Бином Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots +$$

$$+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot\bigl(n-(k-1)\bigr)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n,$$

где $n \in \mathbf{N}$.

Квадрат суммы и куб суммы являются частными случаями бинома Ньютона.

Коэффициенты в формуле бинома Ньютона называются *биномиальными коэффициентами*; их можно вычислять с помощью *треугольника Паскаля*:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & 1 \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & 2 \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & 3 \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & 4 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & 5 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & 6 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & n
\end{array}$$

Каждый «внутренний» элемент треугольника Паскаля равен сумме двух соседних элементов в предыдущей строке, стоящих над ним. Числа в строке с определенным номером n, $n \in \mathbf{N}$, являются последовательными коэффициентами в формуле бинома Ньютона для степени n.

Для формулы бинома Ньютона характерны следующие особенности:

1) в разложении двучлена $(a+b)^n$ по формуле Ньютона содержится $n+1$ член;

2) в разложении $(a+b)^n$ показатель степени a убывает от n до нуля, а показатель степени b возрастает от нуля до n; сумма показателей a и b в каждом члене равна n;

3) биномиальные коэффициенты, равноудаленные от начала и конца разложения, равны между собой;

4) сумма биномиальных коэффициентов разложения $(a+b)^n$ равна 2^n.

Например:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Понятие многочлена. Действия над многочленами. Выражение вида $c_k x^k$, $c_k \in \mathbf{R}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, называется *одночленом k-й степени* (зависящим от одной переменной).

Многочленом одной переменной x ($x \in \mathbf{R}$) называется выражение вида

$$c_n = b_n,\ c_{n-1} = b_{n-1},\ \dots,\ c_0 = b_0. \tag{3.1}$$

Числа $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$ называются *коэффициентами многочлена*; c_0 – *свободный член*; c_n – *коэффициент при старшей степени* ($n \in \mathbf{N}$).

Если в формуле (3.1) $c_n \neq 0$, то это *многочлен n-й степени*, $n \in \mathbf{N}$. Если $c_n = 1$, то многочлен называется *приведенным*.

Обозначают многочлены $P(x), Q(x), R(x)$ и т.д. Чтобы указать степень многочлена, его обозначают $P_n(x)$ – многочлен n-й степени.

Запись многочлена в виде (3.1) называется *стандартным видом многочлена*.

Многочлен $ax^2 + bx + c$, где $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, называется *квадратным трехчленом*.

Два многочлена

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0, \tag{3.2}$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 \tag{3.3}$$

называются *равными*, если равны все их коэффициенты при соответствующих степенях:

$$c_n = b_n,\ c_{n-1} = b_{n-1},\ \dots,\ c_0 = b_0.$$

Говорят, что многочлен тождественно равен нулю: $P(x) \equiv 0$ ($x \in \mathbf{R}$), если все его коэффициенты равны нулю.

На множестве многочленов определены сложение, вычитание, умножение на число, умножение многочленов. Для многочленов (3.2) и (3.3) эти операции определяются следующим образом.

Умножение многочлена на число:

$$\alpha P(x) = \alpha c_n x^n + \alpha c_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha c_1 x + \alpha c_0 \quad (\alpha \in \mathbf{R}).$$

Сложение многочленов:

$$P(x)+Q(x)=(c_n+b_n)x^n+(c_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\ldots+(c_1+b_1)x+(c_0+b_0).$$

Вычитание многочленов:

$$P(x)-Q(x)=P(x)+(-1)Q(x).$$

Умножение многочленов: каждый одночлен многочлена (3.2) умножают на каждый одночлен многочлена (3.3); далее необходимо привести подобные члены и записать полученный многочлен в стандартном виде.

В результате сложения, умножения на число, вычитания и умножения многочленов всегда получается многочлен.

В результате деления многочлена на многочлен не всегда получается многочлен.

Говорят, что *многочлен* $P(x)$ *делится нацело на многочлен* $Q(x)$, где $Q(x)\neq 0$, если

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x), \tag{3.4}$$

где $S(x)$ – многочлен (частное).

Равенство (3.4) можно записать также в виде

$$P(x)=Q(x)S(x). \tag{3.5}$$

Если степень многочлена $P(x)$ равна n, а степень многочлена $Q(x)$ равна m, то в формулах (3.4), (3.5) многочлен $S(x)$ имеет степень $n-m$.

Многочлен $P(x)$ *делится на многочлен* $Q(x)$, где $Q(x)\neq 0$, *с остатком*, если

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{T(x)}{Q(x)}, \tag{3.6}$$

($S(x), T(x)$ – многочлены, $T(x)\neq 0$, степень $T(x)$ меньше степени $Q(x)$).

Формулу (3.6) можно записать в виде

$$P(x)=Q(x)S(x)+T(x). \tag{3.7}$$

Многочлен $S(x)$ в формулах (3.6) и (3.7) называется *целой частью* (*частным*), а многочлен $T(x)$ – *остатком*.

Одним из основных способов деления многочленов является деление «углом».

Например:

$$
\begin{array}{l|l}
-\;5x^4-2x^3+8x-4 & \;x^2-1 \\ \cline{2-2}
\;\;\underline{5x^4-5x^2} & 5x^2-2x+5 \\
\qquad -\;-2x^3+5x^2+8x-4 & \\
\qquad \;\;\underline{-2x^3+2x} & \\
\qquad\qquad -\;5x^2+6x-4 & \\
\qquad\qquad \;\;\underline{5x^2-5} & \\
\qquad\qquad\qquad 6x+1 &
\end{array}
$$

В итоге имеем:

$$\frac{5x^4-2x^3+8x-4}{x^2-1}=5x^2-2x+5+\frac{6x+1}{x^2-1}.$$

В результате деления многочлена (3.2) на двучлен $x-x_0$ получается равенство

$$P_n(x)=(x-x_0)S_{n-1}(x)+R_0,$$

где R_0 – число.

Коэффициенты многочлена

$$S_{n-1}(x)=d_{n-1}x^{n-1}+d_{n-2}x^{n-2}+\ldots+d_1x+d_0$$

и остаток R_0 можно вычислить по *схеме Горнера*:

$$d_{n-1}=c_n,\quad d_{n-2}=c_{n-1}+x_0d_{n-1},\quad d_{n-3}=c_{n-2}+x_0d_{n-2},\ \ldots,$$
$$d_0=c_1+x_0d_1,\quad R_0=c_0+x_0d_0. \tag{3.8}$$

При вычислении коэффициентов (3.8) используют табл. 3.1.

Таблица 3.1

	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	…	c_1	c_0
x_0	d_{n-1}	d_{n-2}	d_{n-3}	…	d_0	R_0

Верхнюю строку заполняют коэффициентами заданного многочлена, нижнюю – числами, которые находят по формулам (3.8).

Многочлен может зависеть не только от одной переменной, но и от двух, трех и т.д.

Многочлен степени n $(n \in \mathbf{N})$ *от двух переменных* x, y $(x, y \in \mathbf{R})$ определяется как выражение вида

$$a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots + a_{0n}y^n,$$

где $a_{00}, a_{10}, \ldots, a_{0n}$ – числовые коэффициенты.

Корни многочлена. Теорема Безу. Число x_0 называется *корнем многочлена* $P(x)$, если $P(x_0) = 0$.

Число x_0 называется *корнем кратности k многочлена* $P(x)$, если

$$P_n(x) = (x - x_0)^k S_{n-k}(x), \qquad S_{n-k}(x_0) \neq 0.$$

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x - x_0$ равен $P(x_0)$.

Следствие. Число x_0 является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится нацело на $x - x_0$.

Теорема. Пусть $P(x)$ – приведенный многочлен с целыми коэффициентами. Если он имеет целые корни, то они содержатся среди целых делителей свободного члена.

Например, для многочлена $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ целые корни (если они есть) содержатся среди чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Подстановкой можно убедиться, что $x_0 = -2$ – целый корень многочлена $P(x)$.

Действительные корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ можно найти по формулам

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

где $D = b^2 - 4ac$, $D \geq 0$. Если $D < 0$, то действительных корней нет.

Разложение многочлена на множители. Общий вид разложения многочлена $P_n(x)$ на множители:

$$P_n(x) = A(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{n_k}(a_1x^2 + \\ + b_1x + c_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (a_mx^2 + b_mx + c_m)^{r_m},$$

где $A, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, a_1, b_1, \ldots, c_m$ – действительные числа; $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots, r_1, \ldots, r_m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$; $n_1 + n_2 + \ldots + n_k + 2r_1 + \ldots + 2r_m = n$;

квадратные трехчлены не имеют действительных корней (у них $D < 0$).

Методы разложения.

1. *Вынесение общего множителя за скобки.* Выделяют множитель, на который делится каждое слагаемое, и выносят его за скобки.

Например: $5x^2 - 5x = 5x(x-1)$.

2. *Метод группировки*:

а) *непосредственно*: слагаемые заданного выражения объединяют в группы, имеющие общий множитель, вынесение которого приводит к одинаковым выражениям в скобках; снова используют метод вынесения общего множителя.

Например:

$$x^2 + 4 - x^3 - 4x = (x^2 - x^3) + (4 - 4x) = x^2(1-x) + 4(1-x) =$$
$$= (1-x)(x^2+4) = -(x-1)(x^2+4);$$

б) *с предварительным преобразованием слагаемых*: вначале одно или несколько слагаемых заменяют тождественно равной суммой (разностью), а затем используют метод группировки.

Например:

$$x^3 + 5x - 6 = x^3 + 6x - x - 6 = (x^3 - x) + (6x - 6) = x(x^2 - 1) +$$
$$+ 6(x-1) = x(x-1)(x+1) + 6(x-1) = (x-1)(x^2 + x + 6).$$

3. *Использование формул разложения квадратного трехчлена на множители.* Если x_1, x_2 – два различных корня квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

если x_0 – единственный корень (кратности 2), то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

4. *Использование формул сокращенного умножения.*

Например:

$$x^6 - 64 = (x^3)^2 - 8^2 = (x^3 - 8)(x^3 + 8) =$$
$$= (x-2)(x^2 + 2x + 4)(x+2)(x^2 - 2x + 4).$$

5. *Введение новой переменной.* Делают замену переменной для понижения степени выражения, разлагают, возвращаются к старой переменной и продолжают разлагать.

Например:

$$x^6-9x^3+8=|\,x^3=t\,|=t^2-9t+8=(t-1)(t-8)=|\,t=x^3\,|=$$
$$=(x^3-1)(x^3-8)=(x-1)(x^2+x+1)(x-2)(x^2-2x+4).$$

6. *Метод выделения полного квадрата.* Выделяют полный квадрат суммы и сводят выражение к разности квадратов, затем разлагают.

Например:

$$x^4-x^2+1=(x^2)^2+2x^2+1-2x^2-x^2=(x^2+1)^2-3x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{3}x)^2=$$
$$=(x^2+1-\sqrt{3}x)(x^2+1+\sqrt{3}x)=(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1).$$

7. *Поиск корней среди делителей свободного члена.* Если приведенный многочлен имеет целые коэффициенты, то целые корни (если они есть) ищут среди делителей свободного члена, а затем разлагают многочлен на множители, используя теорему Безу.

Например, для x^3+4x^2+5x+2 ищем корень среди делителей свободного члена, т.е. среди чисел $\pm1, \pm2$. Находим корень $x=-1$, выполняем деление «углом» (можно по схеме Горнера):

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^3+4x^2+5x+2 & x+1 \\ \cline{2-2}
x^3+x^2 & x^2+3x+2 \\ \cline{1-1}
-\,3x^2+5x & \\
3x^2+3x & \\ \cline{1-1}
-\,2x+2 & \\
2x+2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Получаем: $x^3+4x^2+5x+2=(x+1)(x^2+3x+2)=(x+1)(x+1)(x+2)=$ $=(x+1)^2(x+2)$.

Многочлен называют *неприводимым*, если он не может быть представлен в виде произведения многочленов.

Понятие рациональной дроби. *Рациональной дробью* называется выражение вида

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{3.9}$$

где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены некоторых степеней; $Q(x)\neq0$.

Если степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$, то дробь (3.9) называется *правильной*, а если больше либо равна, – то *неправильной*. У неправильной дроби можно выделить целую часть, если разделить числитель на знаменатель по правилу деления многочленов. Целой частью является число или многочлен.

Если числитель делится на знаменатель без остатка, то в итоге получается число или многочлен.

Среди рациональных дробей выделяют четыре типа *простейших дробей*.

$$\text{(I)}\quad \frac{A}{x-x_0}, \qquad \text{(II)}\quad \frac{A}{(x-x_0)^n},$$

$$\text{(III)}\quad \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}, \qquad \text{(IV)}\quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n},$$

где $A, B, a, b, c, x_0 \in \mathbf{R}$; $A, a \neq 0$; $n \in \mathbf{N}$; квадратный трехчлен имеет $D < 0$.

Разложение рациональных дробей на сумму простейших. Если задана неправильная дробь, то вначале необходимо выделить целую часть, а затем полученную правильную дробь разложить на сумму простейших согласно следующему алгоритму:

1) разложить знаменатель $Q(x)$ на множители;

2) в зависимости от того, какие множители присутствуют в разложении, записать общий вид разложения рациональной дроби на сумму простейших, обозначив неизвестные числовые коэффициенты буквами;

3) для нахождения числовых коэффициентов можно использовать, в частности, метод неопределенных коэффициентов или метод частных значений.

Общий вид разложения в зависимости от множителей знаменателя $Q(x)$. Возможны приведенные ниже случаи, где $P(x)$ – некоторый многочлен.

1. Если правильная дробь приведена к виду

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)},$$

то она представляется в виде суммы простейших дробей только I типа:

$$R(x)=\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\ldots+\frac{C}{x-x_n},$$

где A, B, C – числовые коэффициенты, которые нужно найти.

2. Если правильная дробь имеет вид $\frac{P(x)}{(x-x_0)^n}$, то общий вид разложения

$$\frac{P(x)}{(x-x_0)^n}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}+\ldots+\frac{C}{(x-x_0)^{n-1}}+\frac{D}{(x-x_0)^n}\ (n\in\mathbf{N},\ n>1).$$

3. Если у правильной дроби знаменатель $Q(x)$ содержит в качестве множителя квадратный трехчлен ax^2+bx+c, у которого $D<0$, то

$$\frac{P(x)}{(x-x_0)(ax^2+bx+c)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}.$$

4. Если $Q(x)=(ax^2+bx+c)^n$, где $D<0, n>1$, то

$$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^n}=\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{Ex+F}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

Общий случай разложения правильной дроби на сумму простейших:

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{n_k}(a_1x^2+b_1x+c_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot(a_px^2+b_px+c_p)^{r_p}}=$$

$$=\frac{A_1}{x-x_1}+\ldots+\frac{A_{n_1}}{(x-x_1)^{n_1}}+\frac{B_1}{x-x_2}+\ldots+\frac{B_{n_2}}{(x-x_2)^{n_2}}+\ldots+\frac{C_1}{x-x_k}+\ldots+$$

$$+\frac{C_{n_1}}{(x-x_k)^{n_k}}+\frac{D_1x+E_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\ldots+\frac{D_{r_1}x+E_{r_1}}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^{r_1}}+\ldots+$$

$$+\frac{K_1x+L_1}{a_px^2+b_px+c_p}+\ldots+\frac{K_{r_p}x+L_{r_p}}{(a_px^2+b_px+c_p)^{r_p}},$$

где $A_1, \ldots, B_1, \ldots, C_1, \ldots, D_1, \ldots, L_{r_p}$ – числовые коэффициенты, которые надо найти.

Например:

$$\frac{x^2-4x+5}{(x-2)(x+1)^3(x^2-x+1)(x^2+2x+2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}+$$

$$+\frac{Ex+F}{x^2-x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+2x+2}+\frac{Rx+S}{(x^2+2x+2)^2}.$$

Методы нахождения числовых коэффициентов. 1. *Метод неопределенных коэффициентов.* Необходимо сделать следующее:

1) правую часть разложения на сумму простейших дробей, записанного в общем виде, привести к наименьшему общему знаменателю, который равен $Q(x)$;

2) приравнять числители полученных равных дробей, у которых знаменатели $Q(x)$;

3) записать многочлены в левой и правой частях полученного равенства в стандартном виде;

4) приравнять коэффициенты многочленов, стоящие при одинаковых степенях переменной x;

5) решить полученную систему линейных уравнений относительно коэффициентов $A, B, \ldots$;

6) подставить найденные значения коэффициентов в формулу разложения на сумму простейших дробей, записанную ранее в общем виде. Это и будет ответ.

2. *Метод частных значений.* Реализуют шаги 1 и 2 метода неопределенных коэффициентов. Затем вместо переменной x подставляют некоторые числовые значения (в частности, действительные корни знаменателя $Q(x)$). В итоге получают равенства, содержащие лишь коэффициенты $A, B, \ldots$, которые надо найти.

Например, разложим дробь $\dfrac{x}{x^3-1}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}. \tag{3.10}$$

Приведем полученную сумму дробей к общему знаменателю:

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Приравняем числители:

$$x = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1). \tag{3.11}$$

Найдем неопределенные коэффициенты A, B, C.

Первый способ. Используем метод неопределенных коэффициентов. Многочлен в правой части равенства (3.11) приводим к стандартному виду

$$x = (A + B)x^2 + (A - B + C)x + (A - C).$$

Используем равенство многочленов, которое приводит к системе

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A - B + C = 1, \\ A - C = 0. \end{cases}$$

Решаем ее и получаем: $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = \frac{1}{3}$.

Второй способ. Используем метод частных значений. Для этого в равенстве (3.11) придаем переменной x определенные значения и приходим к системе

$$\left.\begin{aligned} x = 0&:\ 0 = A - C, \\ x = 1&:\ 1 = 3A, \\ x = -1&:\ -1 = A + 2B - 2C. \end{aligned}\right\}$$

Решаем ее и получаем: $A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{3},\ C = \frac{1}{3}$.

Найденные числовые значения коэффициентов подставляем вместо A, B, C в равенство (3.10) и приходим к ответу:

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{3}\,\frac{x - 1}{x^2 + x + 1}.$$

3.2. Алгебраические уравнения

Основные понятия. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые выражения с переменной x. Равенство

$$f(x) = g(x) \tag{3.12}$$

называется *уравнением*, если ставится задача найти все те значения переменной x, при которых это равенство истинно.

Областью допустимых значений (ОДЗ) *уравнения* (3.12) называется множество всех тех значений переменной x, при которых определены выражения $f(x)$ и $g(x)$.

Число a называется *решением* (или *корнем*) *уравнения* (3.12), если оно обращает это уравнение в истинное числовое равенство. *Решить уравнение* (3.12) – значит найти множество всех его решений (корней) или доказать, что таких нет.

Множество всех решений уравнения (3.12) принадлежит ОДЗ этого уравнения.

Два уравнения

$$f_1(x) = g_1(x), \qquad f_2(x) = g_2(x) \tag{3.13}$$

называются *равносильными* (*эквивалентными*), если совпадают множества их решений. Если оба уравнения (3.13) не имеют решений, то они также считаются равносильными.

Вместо исходного уравнения можно решать равносильное ему. Замена уравнения равносильным ему уравнением или равносильной системой (совокупностью) уравнений называется *равносильным переходом*.

Если для пары уравнений (3.13) любой корень первого уравнения является корнем второго, то второе уравнение называется *следствием* первого уравнения. Если заменить уравнение его следствием, то множество решений второго уравнения будет содержать все корни исходного уравнения и помимо них может содержать еще некоторые числа, называемые *посторонними корнями* исходного уравнения. Поэтому если в процессе решения от уравнения перейти к его следствию, то в конце решения необходимо провести еще исследование корней (например, сделать их проверку подстановкой в заданное уравнение) и отобрать те из них, которые являются решениями исходного уравнения.

Способ решения уравнения зависит от его типа.

Для решения уравнений используют также *функциональный метод*. Он основывается, в частности, на приведенных ниже утверждениях.

1. Если для всех $x \in X$ выполняются условия $f(x) \geq a$ и $g(x) \leq a$, то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{cases}$$

2. Если непрерывная функция $f(x)$ возрастает, а непрерывная функция $g(x)$ убывает для $x \in X$, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не больше одного решения на промежутке X. Этот единственный корень можно искать подбором.

3. Если $f(x)$ – возрастающая (убывающая) функция, то уравнение $f(x) = f(y)$ равносильно уравнению $x = y$.

Система и совокупность уравнений. Если задано несколько уравнений с одной неизвестной:

$$f_1(x) = g_1(x), \quad f_2(x) = g_2(x), \ldots, f_n(x) = g_n(x) \qquad (3.14)$$

и ставится задача поиска тех значений x, которые удовлетворяют каждому из заданных уравнений (3.14), то говорят, что задана *система уравнений*. Ее обозначают

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) = g_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) = g_n(x). \end{cases} \qquad (3.15)$$

Решить систему уравнений (3.15) – значит найти все те значения неизвестной x, при которых каждое уравнение системы обращается в верное числовое тождество, или доказать, что таких значений нет.

Решение системы уравнений – это пересечение множеств корней каждого из уравнений системы. Если система не имеет решений, то она называется *несовместной*.

Если ставится задача поиска тех значений x, которые удовлетворяют хотя бы одному из уравнений (3.14), то говорят, что задана *совокупность уравнений*. Ее обозначают

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) = g_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) = g_n(x). \end{array}\right. \qquad (3.16)$$

Решить совокупность уравнений (3.16) – значит найти все те значения неизвестной x, при которых хотя бы одно уравнение совокупности обращается в верное числовое тождество, или доказать, что таких значений нет.

Решение совокупности уравнений – это объединение множеств корней каждого из уравнений совокупности.

Линейные уравнения. Уравнение вида

$$ax + b = 0, \tag{3.17}$$

где a, b – числа, называется *линейным уравнением*.

Запись (3.17) называется *стандартным видом линейного уравнения*.

Уравнение (3.17) решают следующим образом:

1) если $a \neq 0$, то уравнение (3.17) имеет единственный корень $x = -\dfrac{b}{a}$;

2) если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение не имеет решений;

3) если $a = 0$, $b = 0$, то уравнение имеет бесконечное множество решений: $x \in \mathbf{R}$.

Квадратные уравнения. Уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{3.18}$$

где a, b, c – числа, причем $a \neq 0$, называется *квадратным уравнением*.

Запись (3.18) называется *стандартным видом квадратного уравнения*.

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* уравнения (3.18).

Уравнение (3.18) решают следующим образом:

1) если $D > 0$, то уравнение (3.18) имеет два различных действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \tag{3.19}$$

2) если $D = 0$, то уравнение (3.18) имеет единственный корень (два равных корня, корень кратности 2):

$$x_0 = -\frac{b}{2a};$$

3) если $D < 0$, то уравнение (3.18) действительных корней не имеет.

Квадратное уравнение (3.18) называется *неполным*, если хотя бы один из коэффициентов b, c равен нулю. Если $c = 0$, то уравнение (3.18) имеет вид $ax^2 + bx = 0$. Его можно решать разложением на множители:

$$x(ax + b) = 0. \tag{3.20}$$

Уравнение (3.20) равносильно совокупности линейных уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ ax + b = 0. \end{array}\right.$$

Если $b = 0$, то уравнение (3.18) имеет вид $ax^2 + c = 0$. Оно равносильно уравнению

$$x^2 = -\frac{c}{a}. \tag{3.21}$$

Если $-\frac{c}{a} > 0$, то уравнение (3.21) имеет решение $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$; если $c = 0$, то $x = 0$; если $-\frac{c}{a} < 0$, то решений нет.

Если уравнение (3.18) имеет вид

$$ax^2 + 2dx + c = 0, \tag{3.22}$$

то формулы его корней:

$$x_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - ac}}{a}.$$

Теорема Виета. Числа x_1, x_2 являются корнями уравнения (3.18) тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}. \end{cases} \tag{3.23}$$

Равенства (3.23) называются *формулами Виета.*

Приведенным квадратным уравнением называется уравнение вида

$$x^2 + px + q = 0, \tag{3.24}$$

где $p, q \in \mathbf{R}$.

Формулы корней уравнения (3.24), если $D \geq 0$, имеют вид

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

В случае уравнений (3.22), (3.24) при $D \geq 0$ можно использовать также общие формулы (3.19).

Формулы Виета для приведенного уравнения (3.24):

$$\begin{cases} x_1 x_2 = q, \\ x_1 + x_2 = -p. \end{cases}$$

Алгебраические уравнения высших степеней. Уравнение вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{3.25}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$, называется *уравнением n-й степени*.

Если $n = 1$, то уравнение (3.25) называется *линейным*, если $n = 2$, – то *квадратным*.

Корни линейного и квадратного уравнений выражаются по определенным формулам, которые приведены выше.

Доказано, что для уравнений (3.25) степени n, где $n \geq 5$, не существует формул нахождения корней.

Основной метод решения уравнений (3.25) при $n \geq 3$ – разложение на множители. Если в результате разложения на множители уравнение (3.25) приобрело вид

$$P_1(x) P_2(x) \cdot \ldots \cdot P_k(x) = 0,$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_k$ – некоторые многочлены, то оно равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} P_1(x)=0, \\ P_2(x)=0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ P_k(x)=0. \end{array}\right.$$

Для решения используют также метод замены переменной, в результате которой уравнение (3.25) сводится к уравнению степени ниже n.

Обобщенная теорема Виета. Для того чтобы числа $x_1, x_2, ..., x_n$ были корнями уравнения (3.25), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + ... + x_2x_n + ... + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1x_2x_3...x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Трехчленные уравнения. Уравнение вида

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0, \qquad (3.26)$$

где $a \neq 0$, $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$, называется *трехчленным уравнением*; при $n = 2$ оно называется *биквадратным*:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Полагая $y = x^n$, уравнение (3.26) можно записать в виде

$$ay^2 + by + c = 0. \qquad (3.27)$$

Уравнение (3.27) решают как квадратное.

Если y_1 и y_2 – два различных действительных корня уравнения (3.27), то уравнение (3.26) эквивалентно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^n = y_1, \\ x^n = y_2; \end{array}\right.$$

если y_0 – единственный корень уравнения (3.27), то уравнение (3.26) равносильно уравнению $x^n = y_0$.

Симметрические уравнения. Уравнения вида

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0, \tag{3.28}$$

где $a \neq 0$, называются *симметрическими уравнениями третьей степени*.

Поскольку

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = a(x^3 + 1) + bx(x + 1) =$$
$$= a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = (x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a),$$

то уравнение (3.28) равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x + 1 = 0, \\ ax^2 + (b - a)x + a = 0. \end{array}\right.$$

Уравнения вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \tag{3.29}$$

где $a \neq 0$, называются *симметрическими уравнениями четвертой степени*.

Поскольку $x = 0$ не является корнем уравнения (3.29), то деление обеих частей этого уравнения на x^2 приводит к уравнению, равносильному исходному (3.29):

$$ax^2 + \frac{a}{x^2} + bx + \frac{b}{x} + c = 0,$$

т.е.

$$a\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Заменой $y = x + \dfrac{1}{x}$ последнее уравнение сводится к квадратному уравнению

$$ay^2+by+c-2a=0,$$

которое следует решить, а затем вернуться к переменной x и таким образом найти корни уравнения (3.29).

Некоторые типы алгебраических уравнений, решаемых заменой. 1. Уравнение

$$(x+\alpha)^4+(x+\beta)^4=c,$$

где α, β, c – заданные числа, сводится к биквадратному уравнению с помощью замены

$$\frac{(x+\alpha)+(x+\beta)}{2}=y.$$

2. Уравнение

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)=A,$$

где числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, A таковы, что $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ и $\beta-\alpha=\delta-\gamma$, сводится к биквадратному уравнению заменой

$$\frac{x-\alpha+x-\beta+x-\gamma+x-\delta}{4}=y.$$

3. Уравнение

$$(ax^2+b_1x+c)(ax^2+b_2x+c)=Ax^2, \tag{3.30}$$

где $c\neq0$, $A\neq0$, делением на x^2 (так как оно не имеет корня $x=0$) сводится к равносильному уравнению

$$\left(ax+\frac{c}{x}+b_1\right)\left(ax+\frac{c}{x}+b_2\right)-A=0,$$

которое после замены $ax+\dfrac{c}{x}=y$ записывается в виде квадратного уравнения.

4. Уравнение

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)=Ax^2,$$

где числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, A таковы, что $\alpha\beta=\gamma\delta\neq0$, попарным перемножением выражений в первой и второй скобках, а также в третьей и четвертой сводится к уравнению вида (3.30):

$$(x^2 - x(\alpha+\beta) + \alpha\beta)(x^2 - x(\gamma+\delta) + \gamma\delta) = Ax^2.$$

Далее решают как уравнение (3.30).

5. Уравнение

$$a(cx^2 + p_1x + q)^2 + b(cx^2 + p_2x + q)^2 = Ax^2,$$

где числа a, b, c, q, A таковы, что $a, b, c, q, A \neq 0$, делением на x^2 (так как оно не имеет корня $x = 0$) сводится к равносильному уравнению

$$a\left(cx + \frac{q}{x} + p_1\right)^2 + b\left(cx + \frac{q}{x} + p_2\right)^2 = A,$$

которое после замены $cx + \dfrac{q}{x} = y$ записывается в виде квадратного уравнения.

Дробно-рациональные уравнения. *Дробно-рациональным уравнением* называется уравнение

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \tag{3.31}$$

где $P(x), Q(x)$ – многочлены.

Запись (3.31) называется *стандартным видом дробно-рационального уравнения.*

Уравнение (3.31) равносильно уравнению

$$P(x) = 0 \tag{3.32}$$

на области допустимых значений

$$Q(x) \neq 0. \tag{3.33}$$

Найденные корни уравнения (3.32) подлежат проверке. В качестве корней этого уравнения подходят только те, которые удовлетворяют условию (3.33).

Дробно-рациональное уравнение вида

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)},$$

где $P_1(x), P_2(x), Q_1(x), Q_2(x)$ – многочлены, можно решать сведением к стандартному виду (3.31) или по основному свойству пропорции:

$$P_1(x)Q_2(x) = Q_1(x)P_2(x)$$

на ОДЗ $\begin{cases} Q_1(x) \neq 0, \\ Q_2(x) \neq 0. \end{cases}$

Частные случаи дробно-рациональных уравнений.

1. Уравнение вида

$$\frac{Ax}{ax^2 + b_1x + c} + \frac{Bx}{ax^2 + b_2x + c} = C, \qquad (3.34)$$

где $ABC \neq 0$, $ac \neq 0$, делением числителя и знаменателя каждой дроби на x сводится к равносильному уравнению (поскольку $x = 0$ не является корнем уравнения (3.34))

$$\frac{A}{ax + b_1 + \frac{c}{x}} + \frac{B}{ax + b_2 + \frac{c}{x}} = C.$$

Далее заменой $y = ax + \frac{c}{x}$ оно сводится к уравнению

$$\frac{A}{y + b_1} + \frac{B}{y + b_2} = C,$$

которое решают как дробно-рациональное и возвращаются к неизвестной x.

2. Уравнения вида

$$\frac{ax^2 + b_1x + c}{ax^2 + b_2x + c} \pm \frac{ax^2 + b_3x + c}{ax^2 + b_4x + c} = A,$$

$$\frac{ax^2 + b_1x + c}{ax^2 + b_2x + c} = \frac{Ax}{ax^2 + b_3x + c} \; (A \neq 0),$$

где $ac \neq 0$, решаются аналогично уравнению вида (3.34).

Иррациональные уравнения. *Иррациональным уравнением* называется уравнение, содержащее неизвестную под знаком корня или под дробным показателем. (Здесь термин «корень» соответствует операции извлечения корня.)

Основной метод решения иррациональных уравнений – возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень, чтобы корни исчезли. Иногда приходится возводить в степень несколько раз. При этом следует анализировать, какие корни надо оставить в левой части уравнения, а какие перенести в правую часть (если корней несколько). От этого часто зависит рациональность решения.

Поскольку корни с нечетным показателем определены для любых по знаку подкоренных выражений и принимают любые по знаку значения, то возведение уравнения в нечетную степень является равносильным преобразованием (т.е. мы не теряем решений и не получаем посторонних).

Возведением уравнения, содержащего корни с четным показателем, в четную степень получают уравнение-следствие, которое может иметь посторонние корни. В этом случае итоговым моментом в решении уравнения является проверка полученных решений подстановкой в заданное уравнение. Проверка по ОДЗ такого уравнения недостаточна.

Область допустимых значений иррационального уравнения следует находить в том случае, если предполагается, что она состоит только из нескольких чисел или может быть пустым множеством. Если ОДЗ состоит из одного, двух, ... чисел, то уравнение можно не решать, а эти числа проверять подстановкой в заданное уравнение. Если ОДЗ есть пустое множество, то уравнение не имеет решений.

При решении иррациональных уравнений используют также метод замены переменной и другие методы.

Если имеется уравнение вида $\sqrt[2n]{f(x)} = c$, где $c < 0$, то оно не имеет решений, так как корни с четным показателем в элементарной математике понимают в арифметическом смысле, т.е. как неотрицательные.

Некоторые типы иррациональных уравнений. Пусть далее $f(x), g(x), h(x)$ – некоторые выражения с неизвестной x.

I тип. Уравнение

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x), \quad n \in \mathbf{N},$$

возведением в $(2n+1)$-ю степень сводится к равносильному уравнению

$$f(x)=\left(g(x)\right)^{2n+1}.$$

Уравнение

$$\sqrt[2n+1]{f(x)}=\sqrt[2n+1]{g(x)}$$

после возведения в $(2n+1)$-ю степень сводится к равносильному уравнению

$$f(x)=g(x).$$

Уравнение

$$\sqrt[2n]{f(x)}=g(x), \quad n\in\mathbf{N}, \tag{3.35}$$

после возведения в степень $2n$ сводится к уравнению-следствию

$$f(x)=\left(g(x)\right)^{2n}. \tag{3.36}$$

Решения уравнения (3.36) проверяют подстановкой в уравнение (3.35) и отбирают те из них, которые удовлетворяют уравнению (3.35).

Уравнение

$$\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)} \tag{3.37}$$

после возведения в степень $2n$ сводится к уравнению-следствию

$$f(x)=g(x). \tag{3.38}$$

Корни уравнения (3.38) проверяют подстановкой в заданное уравнение (3.37).

II тип. Уравнение

$$a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{g(x)}=h(x), \tag{3.39}$$

где $a, b\in\mathbf{R}$, решается несколькими способами.

Первый способ. Необходимо возвести уравнение (3.39) в квадрат:

$$a^2f(x)+2ab\sqrt{f(x)g(x)}+b^2g(x)=\left(h(x)\right)^2,$$

откуда

$$2ab\sqrt{f(x)g(x)}=\big(h(x)\big)^2-a^2f(x)-b^2g(x).$$

Полученное уравнение упрощают и возводят в квадрат еще раз.

Часто более рациональным приемом (перед возведением в квадрат) бывает запись уравнения (3.39) в виде

$$a\sqrt{f(x)}=h(x)-b\sqrt{g(x)}.$$

Второй способ. Необходимо умножить уравнение (3.39) на сопряженное выражение:

$$a^2f(x)-b^2g(x)=h(x)(a\sqrt{f(x)}-b\sqrt{g(x)}).$$

Отдельно проверяют, имеет ли уравнение $h(x)=0$ решение. Затем для $h(x)\neq 0$ рассматривают систему

$$\begin{cases} a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{g(x)}=h(x),\\ a\sqrt{f(x)}-b\sqrt{g(x)}=\dfrac{a^2f(x)-b^2g(x)}{h(x)}. \end{cases}$$

Сложение уравнений этой системы приводит к уравнению вида (3.35).

Третий способ. Заменить переменные: $\sqrt{f(x)}=u$, $\sqrt{g(x)}=v$ и перейти к системе уравнений относительно u, v.

Уравнение

$$a\sqrt[3]{f(x)}+b\sqrt[3]{g(x)}=h(x), \qquad (3.40)$$

где $a, b\in\mathbf{R}$, решают возведением в куб обеих его частей. Получают:

$$a^3f(x)+b^3g(x)+3ab\sqrt[3]{f(x)g(x)}(a\sqrt[3]{f(x)}+$$
$$+b\sqrt[3]{g(x)})=(h(x))^3. \qquad (3.41)$$

В левой части уравнения (3.41) находится выражение в скобках, которое равно левой части уравнения (3.40), его заменяют на $h(x)$. В итоге заданное уравнение (3.40) приводится к уравнению-следствию

$$3ab\sqrt[3]{f(x)g(x)}h(x)=(h(x))^3-a^3f(x)-b^3g(x),$$

которое решают возведением в куб. Полученные решения необходимо проверить подстановкой в уравнение (3.40).

III тип. *Уравнения, решаемые заменой переменной.* В результате замены может уменьшиться степень выражения, стоящего под знаком корня, что приведет к уменьшению степени рационального уравнения после избавления от корней.

Если уравнение имеет вид

$$F(\sqrt[n]{f(x)})=0,\quad n=2,3,\dots,\tag{3.42}$$

где F – некоторое алгебраическое выражение относительно $\sqrt[n]{f(x)}$, то заменой $\sqrt[n]{f(x)}=y$ оно сводится к уравнению

$$F(y)=0.\tag{3.43}$$

После решения уравнения (3.43) возвращаются к старой переменной и находят решения уравнения (3.42).

IV тип. *Уравнения, решаемые исходя из арифметического смысла корней с четными показателями.* В частности, решение уравнения

$$a\sqrt[2n]{f(x)}+b\sqrt[2n]{g(x)}=0,$$

где $a, b>0$, сводится к решению системы

$$\begin{cases} f(x)=0,\\ g(x)=0.\end{cases}$$

V тип. *Уравнения, решаемые функциональными методами.*

Например, чтобы решить уравнение

$$\sqrt{x^2-4x+29}=5-\left(\frac{2}{x}-1\right)^2,$$

преобразуем его к виду

$$\sqrt{(x-2)^2+25}=5-\left(\frac{2}{x}-1\right)^2.$$

Поскольку

$$\begin{cases} \sqrt{(x-2)^2+25}\ge 5,\\ 5-\left(\frac{2}{x}-1\right)^2\le 5,\end{cases}$$

то равенство выражений в заданном уравнении возможно только при условии, что оба они равны 5. Тогда:

$$\begin{cases}\sqrt{(x-2)^2+25}=5,\\ 5-\left(\dfrac{2}{x}-1\right)^2=5,\end{cases}\qquad \begin{cases}(x-2)^2+25=25,\\ \left(\dfrac{2}{x}-1\right)^2=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}x-2=0,\\ \dfrac{2-x}{x}=0.\end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{cases}x=2,\\ x=2,\end{cases}$$

т.е. приходим к ответу: $x=2$.

VI тип. *Уравнения, решаемые графическим методом.* Корни уравнения находят, используя графики функций. Этот метод не всегда дает точное решение.

Например, для графического решения уравнения $\sqrt{x+2}=-x^2+14x-$ -46 строим графики функций левой и правой частей уравнения (рис. 3.2). Из рисунка видно, что графики пересекаются в единственной точке $x=7$. Подстановкой убеждаемся, что это точное решение. Следовательно, уравнение имеет единственное решение $x=7$.

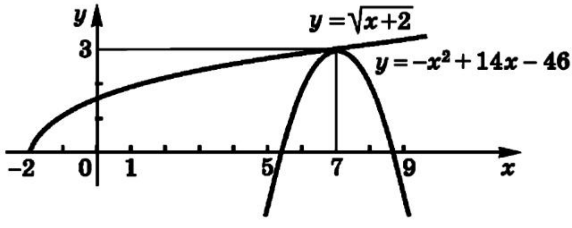


Рис. 3.2

Уравнения с модулем. Рассмотрим типы таких уравнений.

I тип. Уравнение

$$|f(x)|=a, \tag{3.44}$$

где $f(x)$ – некоторое выражение с переменной x; a – число. Решение уравнения (3.44) зависит от числа a:

1) если $a<0$, то уравнение решений не имеет;

2) если $a=0$, то уравнение равносильно уравнению $f(x)=0$;

3) если $a>0$, то уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=a, \\ f(x)=-a. \end{array}\right.$$

II тип. Уравнение

$$|f(x)|=g(x), \qquad (3.45)$$

где $f(x), g(x)$ – некоторые выражения с неизвестной x.

Решать уравнение (3.45) можно несколькими способами.

Первый способ. По определению модуля получают:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ f(x)=g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0, \\ -f(x)=g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Второй способ. Используют тот же подход к решению, что и для уравнений I типа, но с дополнительным условием относительно выражения $g(x)$:

$$\begin{cases} g(x)\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

Если $g(x)<0$, то уравнение (3.45) не имеет решений.

Третий способ. Используют *метод промежутков*, который заключается в следующем. Необходимо:

1) найти те значения x, для которых $f(x)=0$;

2) найденные значения x нанести на числовую ось;

3) определить знак $f(x)$ для каждого из полученных промежутков;

4) нарисовать кривую знаков;

5) решить уравнение на каждом промежутке в отдельности, раскрывая модуль согласно сделанному рисунку;

6) для каждого конкретного промежутка проверить, принадлежат ли полученные корни этому промежутку;

7) в ответе указать совокупность всех полученных корней.

З а м е ч а н и е. Если ОДЗ уравнения – не вся числовая ось, то соответствующие ограничения учитывают на рисунке. Уравнения решают на тех промежутках, которые входят в ОДЗ.

III т и п. *Уравнения, содержащие несколько модулей.* В частности, если модулей два, то это уравнение вида

$$A\left|f(x)\right|+B\left|g(x)\right|+h(x)=0, \tag{3.46}$$

где $A, B\in\mathbf{R}$; $f(x), g(x), h(x)$ – некоторые выражения с неизвестной x.

Для решения уравнения используют метод промежутков. Необходимо нарисовать столько числовых осей и кривых знаков, сколько модулей в уравнении. Для уравнения (3.46) рисуют две оси, располагая их одну под другой (одна ось – для $f(x)$, вторая – для $g(x)$). Для каждого выражения $f(x)$ и $g(x)$ следует изобразить кривую знаков на соответствующей оси. Затем раскрывают модули, используя рисунок, и решают уравнение отдельно на каждом промежутке. В ответе необходимо указать совокупность полученных корней.

Используем метод промежутков для решения уравнения

$$2\left|x+2\right|-\left|1-x\right|+6x=0.$$

Нарисуем числовые оси и кривые знаков для выражений $x+2$ и $1-x$ (рис. 3.3).

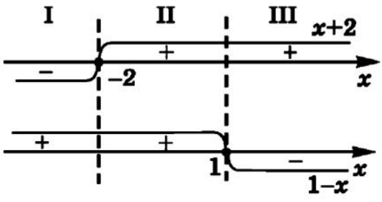


Рис. 3.3

I. Если $x\in(-\infty, -2]$, то

$$-2(x+2)-(1-x)+6x=0,$$
$$5x-5=0,$$

т.е. $x=1$, однако $x=1$ – не корень, поскольку $1\notin(-\infty, -2]$.

II. Если $x\in(-2, 1]$, то

$$2(x+2)-(1-x)+6x=0, \qquad 9x+3=0.$$

Получаем: $x=-\dfrac{1}{3}$ – корень уравнения, так как $-\dfrac{1}{3}\in(-2, 1]$.

III. Если $x\in(1, +\infty)$, то

$$2(x+2)+(1-x)+6x=0, \qquad 7x+5=0,$$

т.е. $x=-\dfrac{5}{7}$, но $x=-\dfrac{5}{7}$ – не корень, поскольку $-\dfrac{5}{7}\notin(1, +\infty)$.

В итоге приходим к ответу: $x=-\dfrac{1}{3}$.

IV т и п. Уравнение

$$A|f(x)| = B|g(x)|, \tag{3.47}$$

где $A, B > 0$, $A, B \in \mathbf{R}$ (частный случай уравнения (3.46)).

Уравнение (3.47) решают сведением к совокупности уравнений

$$\left[\begin{aligned} &A\,f(x) = B\,g(x),\\ &A\,f(x) = -B\,g(x). \end{aligned}\right.$$

V т и п. *Уравнения, решаемые заменой переменной*, например

$$A\,f^2(x) + B|f(x)| + C = 0.$$

При решении учитывают то, что $f^2(x) = |f(x)|^2$. Вводят замену $|f(x)| = y$ и решают полученное квадратное уравнение относительно неизвестной y. Затем необходимо вернуться к старой переменной. В случае двух различных корней y_1, y_2 квадратного уравнения это будет совокупность уравнений I типа

$$\left[\begin{aligned} &|f(x)| = y_1,\\ &|f(x)| = y_2. \end{aligned}\right.$$

Если корень y_0 единственный, то остается решить уравнение $|f(x)| = y_0$.

VI т и п. *Уравнения, решаемые по свойствам модуля.* В частности,

$$A|f(x)| + B|g(x)| = 0,$$

где A, $B > 0$; A, $B \in \mathbf{R}$.

Поскольку $|f(x)| \geq 0$ и $|g(x)| \geq 0$, то решением уравнения (3.48) является решение системы

$$\begin{cases} f(x) = 0,\\ g(x) = 0. \end{cases}$$

Методы решения систем двух уравнений с двумя неизвестными. К основным методам решения таких систем относятся методы, приведенные ниже.

1. *Метод подстановки.* В каком-либо уравнении системы выражают одну неизвестную через другую и подставляют в другое уравнение с целью исключения одной неизвестной.

2. *Метод сложения.* В результате умножения одного из уравнений системы на число и прибавления ко второму уравнению получается равносильная система. Метод используют для того, чтобы в результате сложения одна из неизвестных исчезла или было получено более простое уравнение.

3. *Метод умножения* (*деления*). Если свободные члены не равны нулю, то одно из уравнений системы можно заменить уравнением, которое получено в результате почленного умножения (деления) заданных уравнений системы.

4. *Метод замены переменных.* Если уравнения системы содержат одинаковые выражения, то их заменяют новыми переменными. Замену производят в двух уравнениях сразу или вначале решают отдельно заменой одно уравнение системы (вводя одну неизвестную), а затем возвращаются к решению системы.

Заменой переменных решают, в частности, *симметрические системы* – такие системы, которые не изменяются, если неизвестные x, y заменить одну другой. Для решения этих систем делают стандартную замену

$$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b. \end{cases} \tag{3.49}$$

Симметрической, например, является система

$$\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5. \end{cases}$$

Для ее решения используют замену (3.49).

5. *Графический метод.* Строят графики функций (или кривые), которые соответствуют уравнениям системы. Находят координаты точек пересечения этих графиков. Данный метод не всегда дает точное решение.

В качестве примера решим систему

$$\begin{cases} x^3+y^3=152, \\ x^2y+xy^2=120. \end{cases}$$

Используем вначале метод сложения (умножим второе уравнение на 3 и прибавим к первому):

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 152 + 3\cdot 120, \\ x^2y + xy^2 = 120. \end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{cases} (x+y)^3 = 512, \\ x^2y + xy^2 = 120, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 8, \\ xy(x+y) = 120. \end{cases}$$

Делим второе уравнение полученной системы на первое и получаем систему

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 15, \end{cases}$$

которую решаем методом подстановки:

$$\begin{cases} y = 8 - x, \\ x(8-x) = 15, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 8 - x, \\ x^2 - 8x + 15 = 0. \end{cases}$$

Решаем квадратное уравнение и получаем два корня. Тогда

$$\begin{cases} y = 8 - x, \\ \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 5. \end{array}\right. \end{cases}$$

Приходим к ответу: (3, 5), (5, 3).

Заданную систему можно решать и как симметрическую.

3.3. Алгебраические неравенства

Линейные неравенства. Неравенства вида

$$ax + b > 0, \tag{3.50}$$

$$ax + b \geq 0, \tag{3.51}$$

$$ax + b < 0, \tag{3.52}$$

$$ax + b \leq 0, \tag{3.53}$$

где $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$; x – неизвестная величина, называются *линейными неравенствами*.

Неравенства (3.50), (3.52) называются *строгими линейными неравенствами*, неравенства (3.51), (3.53) – *нестрогими*.

Решением неравенства (3.50) (то же (3.51) – (3.53)) называется всякое число $x \in \mathbf{R}$, которое обращает это неравенство в верное числовое неравенство.

Множество решений неравенства (3.50) определяется следующим образом:

1) если $a > 0$, то $x > -\dfrac{b}{a}$, т.е. $x \in \left(-\dfrac{b}{a}, +\infty\right)$;

2) если $a < 0$, то $x < -\dfrac{b}{a}$, т.е. $x \in \left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right)$.

Аналогично решается неравенство (3.52):

1) если $a > 0$, то $x < -\dfrac{b}{a}$, т.е. $x \in \left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right)$;

2) если $a < 0$, то $x > -\dfrac{b}{a}$, т.е. $x \in \left(-\dfrac{b}{a}, +\infty\right)$.

В случае нестрогих неравенств (3.51) и (3.52) в множество решений в каждом случае входит значение $x = -\dfrac{b}{a}$.

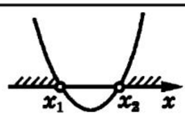
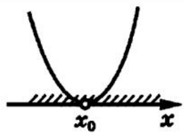
Квадратные неравенства. Неравенства вида

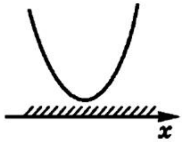
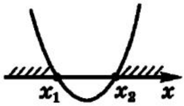
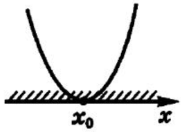
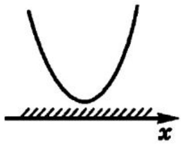
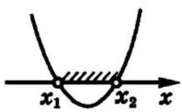
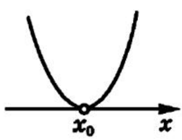
$$\begin{aligned} &ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0, \\ &ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0, \end{aligned} \tag{3.54}$$

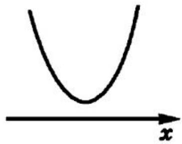
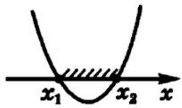
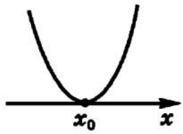
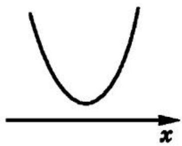
где $a \neq 0$, называются *квадратными неравенствами*.

Решения неравенств (3.54) зависят от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ и знака коэффициента a. Графический способ решения неравенств (3.54) в случае $a > 0$ представлен в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Неравенство	Дискриминант D и корни	График квадратичной функции $ax^2 + bx + c$ и множество решений неравенства
1	2	3
$ax^2 + bx + c > 0$, $a > 0$	$D > 0$, x_1, x_2 – корни, $x_1 < x_2$	 $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$
	$D = 0$, x_0 – корень	 $x \in (-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$

1	2	3
$ax^2+bx+c>0$, $a>0$	$D<0$, корней нет	 $x \in (-\infty, +\infty)$
$ax^2+bx+c \geq 0$, $a>0$	$D>0$, x_1, x_2 – корни, $x_1<x_2$	 $x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$
	$D=0$, x_0 – корень	 $x \in (-\infty, +\infty)$
	$D<0$, корней нет	 $x \in (-\infty, +\infty)$
$ax^2+bx+c<0$, $a>0$	$D>0$, x_1, x_2 – корни, $x_1<x_2$	 $x \in (x_1, x_2)$
	$D=0$, x_0 – корень	 Нет решений

1	2	3
$ax^2+bx+c<0$, $a>0$	$D<0$, корней нет	 Нет решений
$ax^2+bx+c\le 0$, $a>0$	$D>0$, x_1, x_2 – корни, $x_1<x_2$	 $x\in[x_1, x_2]$
	$D=0$, x_0 – корень	 Единственное решение $x_0=-\dfrac{b}{2a}$
	$D<0$, корней нет	 Нет решений

Если в неравенствах (3.54) $a<0$, то умножение этих неравенств на -1 с изменением знака неравенства на противоположный сводит решение каждого из них к соответствующему случаю из представленных в табл. 3.2.

Неравенства высших степеней. Неравенства вида

$$P(x)>0,\quad P(x)\ge 0,\quad P(x)<0,\quad P(x)\le 0, \tag{3.55}$$

где $P(x)$ – многочлен степени выше второй, называются *неравенствами высших степеней*.

Основной метод решения неравенств (3.55) – *метод промежутков*. Он состоит в следующем.

1. Многочлен $P(x)$ разлагают на множители. Допустим, получено неравенство

$$A(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_k)(ax^2+bx+c)>0,$$

где $A, x_1, x_2, \ldots, x_k,\ a, b, c \in \mathbf{R}$; квадратный трехчлен имеет $D<0$.

2. Коэффициент A и квадратный трехчлен (у которого $D<0$) «отбрасывают». Если $A<0$ или $a<0$, то знак неравенства в каждом из этих случаев изменяется на противоположный.

Допустим, что получено неравенство вида

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_k)<0, \qquad (3.56)$$

где корни $x_1, x_2, \ldots, x_k$ расположены в порядке возрастания.

3. Корни $x_1, x_2, \ldots, x_k$ наносят на числовую ось. Справа от самого большого корня x_k ставят знак «+» над промежутком, далее идет чередование знаков.

4. Рисуют кривую знаков.

5. Штрихуют промежутки, которые отвечают смыслу неравенства (т.е. для неравенства (3.56) это множество тех значений x, для которых кривая знаков находится под осью x).

6. В ответе записывают полученное множество решений.

Если в результате равносильных преобразований неравенство приняло вид

$$(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{n_k}>0,$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$ и $x_1, x_2, \ldots, x_k$ расположены в порядке возрастания, то для решения используют *обобщенный метод промежутков*. Он состоит в следующем.

1. Корни $x_1, x_2, \ldots, x_k$ наносят на числовую ось.

2. Справа от самого большого корня x_k ставят над промежутком знак «+». Знак следующего промежутка зависит от показателя n_k:

а) если n_k – нечетное число, то при «переходе» через корень x_k знак изменится на противоположный (т.е. следующий промежуток отмечают знаком «–»);

б) если n_k – четное число, то при «переходе» через корень x_k знак не изменяется.

Аналогично исследуют знак при «переходе» через остальные корни.

3. Рисуют кривую знаков.

4. Штрихуют промежутки, которые соответствуют смыслу неравенства.

5. В ответе записывают полученное множество решений.

Метод промежутков – частный случай обобщенного метода промежутков.

Например, используем обобщенный метод интервалов (рис. 3.4) для решения неравенства

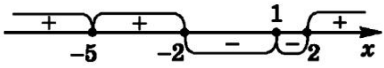


Рис. 3.4

$$(x+5)^2(x+2)^3(x-1)^4(x-2) \le 0.$$

Приходим к ответу: $x \in \{-5\} \cup [-2, 2]$.

Определенные типы неравенств высших степеней решают также методом замены переменной.

Дробно-рациональные неравенства. Неравенства вида:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \tag{3.57}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \ge 0, \tag{3.58}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \tag{3.59}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \le 0, \tag{3.60}$$

где $P(x), Q(x)$ – некоторые многочлены, называются *дробно-рациональными* (записанными в стандартном виде).

Неравенство (3.57) равносильно неравенству $P(x)Q(x) > 0$. Его можно решать методом промежутков или обобщенным методом промежутков. Аналогично решают неравенство (3.59).

Неравенство вида (3.58) равносильно системе

$$\begin{cases} P(x)Q(x) \ge 0, \\ Q(x) \ne 0. \end{cases} \tag{3.61}$$

Для решения системы (3.61) можно использовать метод промежутков или обобщенный метод промежутков. При этом корни многочлена $Q(x)$ изображают выколотыми точками числовой оси. Аналогично решают неравенство (3.60).

Для решения дробно-рациональных неравенств используют также метод замены переменной.

Иррациональные неравенства. Неравенство, в котором переменная величина содержится под знаком корня или под дробным показателем, называется *иррациональным неравенством*.

Если неравенство содержит корни с нечетным показателем, то его решают возведением в соответствующую нечетную степень, сводя к равносильному рациональному неравенству.

При решении неравенства, содержащего корень с четным показателем, учитывается ОДЗ неравенства и тот факт, что $\sqrt[2n]{f(x)} \geq 0$.

Неравенство

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x),$$

где $f(x), g(x)$ – некоторые алгебраические выражения, равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < \left(g(x)\right)^{2n}. \end{cases}$$

Неравенство

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$$

равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \text{ (можно исключить)}, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq \left(g(x)\right)^{2n}, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Для решения иррациональных неравенств можно использовать также метод замены переменной.

Неравенства с модулем. Рассмотрим типы таких неравенств.

I тип. Неравенство

$$|f(x)| < a, \qquad (3.62)$$

где $f(x)$ – некоторое выражение с переменной x; a – число, решают в зависимости от числа a:

1) если $a \le 0$, то неравенство (3.62) не имеет решений;

2) если $a > 0$, то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a. \end{cases}$$

Неравенство

$$|f(x)| \le a \qquad (3.63)$$

решают также в зависимости от числа a:

1) если $a < 0$, то неравенство (3.63) не имеет решений;

2) если $a = 0$, то неравенство равносильно уравнению $f(x) = 0$;

3) если $a > 0$, то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) \ge -a, \\ f(x) \le a. \end{cases}$$

Неравенство

$$|f(x)| > a \qquad (3.64)$$

решают в зависимости от числа a:

1) если $a < 0$, то решением неравенства (3.64) является множество всех значений x из ОДЗ выражения $f(x)$;

2) если $a = 0$, то решением неравенства является множество всех таких значений x из ОДЗ выражения $f(x)$, что $f(x) \ne 0$;

3) если $a > 0$, то неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} f(x) < -a, \\ f(x) > a. \end{array}\right.$$

Неравенство

$$|f(x)| \ge a, \qquad (3.65)$$

решают в зависимости от числа a:

1) если $a \le 0$, то решением неравенства (3.65) является множество всех значений x из ОДЗ выражения $f(x)$;

2) если $a > 0$, то неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \le -a, \\ f(x) \ge a. \end{array}\right.$$

II тип. Неравенства

$$|f(x)| < g(x), \tag{3.66}$$

$$|f(x)| > g(x), \tag{3.67}$$

где $f(x)$, $g(x)$ – некоторые выражения с переменной x, решают несколькими способами.

Первый способ. Используют определение модуля и сводят решение неравенств (3.66) и (3.67) соответственно к совокупностям:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) < g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) < g(x), \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) > g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Второй способ. Используют тот же подход к решению, что и для неравенств I типа, но с дополнительным условием относительно выражения $g(x)$.

Неравенство (3.66) не имеет решения, если $g(x) \le 0$. Решают систему

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > -g(x), \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Решением неравенства (3.67) являются все значения из ОДЗ выражения $f(x)$ при условии $g(x) < 0$, а также решение системы

$$\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) < -g(x), \\ f(x) > g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

Третий способ. Используют *метод промежутков*. Необходимо:

1) найти те значения x, для которых $f(x) = 0$;

2) найденные значения x нанести на числовую ось;

3) определить знак $f(x)$ для каждого из полученных промежутков;

4) нарисовать кривую знаков;

5) раскрыть модуль, пользуясь рисунком, и получить соответствующее неравенство, которое следует решить при условии принадлежности переменной x определенному промежутку;

6) в ответе указать совокупность полученных решений неравенства.

Аналогично решают нестрогие неравенства данного типа.

III тип. *Неравенства, содержащие несколько модулей.* Их можно решать методом промежутков. В этом случае необходимо нарисовать столько числовых осей и кривых знаков, сколько модулей содержится в неравенстве. Для каждого промежутка решить полученное после раскрытия модулей неравенство при условии, что переменная x принадлежит конкретному промежутку. В ответе указывают объединение всех полученных решений.

IV тип. Неравенство

$$A|f(x)| > B|g(x)|,$$

где $A, B > 0$; $A, B \in \mathbf{R}$, сводят к равносильному:

$$A^2 |f(x)|^2 > B^2 |g(x)|^2.$$

По свойству модуля получают:

$$A^2 (f(x))^2 > B^2 (g(x))^2.$$

Выражения $f(x)$ и $g(x)$ возводят в квадрат, если эта операция не является трудоемкой, или преобразуют неравенство к виду

$$(Af(x) - Bg(x))(Af(x) + Bg(x)) > 0.$$

Аналогично решают неравенство, если оно задано со знаком $\geq$, $<$ или $\leq$.

V тип. *Неравенства, решаемые заменой переменной.* В таком случае выражение с модулем обозначают новой переменной. Неравенство с новой переменной решают до конца (т.е. до получения промежутков или отдельных точек, если такие будут). Затем возвращаются к старой переменной и решают полученные неравенства с модулем как неравенства (уравнения) I типа.

4
ФУНКЦИИ

4.1. Общие понятия

Основные определения. Пусть задано некоторое числовое множество $X \subseteq \mathbf{R}$ и указано правило, по которому каждому числу $x \in X$ ставится в соответствие единственное число y из множества $Y \subseteq \mathbf{R}$. Тогда говорят, что задана *функция* $y = f(x)$ с областью определения X. Это записывают следующим образом: $y = f(x)$, $x \in X$.

Множество X, на котором определяется функция f, называется *областью определения функции* и обозначается $D(f)$ или $D(y)$.

Множество всех значений y, $y \in Y$, для каждого из которых существует по крайней мере одно число x из множества X такое, что $y = f(x)$, называется *областью значений функции* и обозначается $E(f)$ или $E(y)$.

Переменную x называют *независимой переменной* или *аргументом*, а переменную y – *зависимой переменной*.

Любая функция задает некоторое множество упорядоченных пар чисел (x, y), где $y = f(x)$.

Для наглядности удобно изображать функции графически, используя при этом систему координат Oxy.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек (x, y) координатной плоскости таких, что $y = f(x)$, $x \in D(f)$.

Способы задания функций. *Задать функцию* – значит указать область ее определения D и правило f, согласно которому для любого значения независимой переменной x из области D находят соответствующее ему значение функции.

Функция может быть задана различными способами.

1. *Аналитический способ.* Функция задается формулой явно, неявно, параметрически. При этом область определения функции чаще всего не указывается. Тогда считается, что функция задана на ОДЗ аналитического выражения. Функция

может быть задана аналитически с помощью нескольких выражений, например:

$$y = \begin{cases} -x, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 4, \\ 3x+7, & x > 4. \end{cases}$$

Заданная таким образом функция называется *кусочно-заданной*.

2. *Табличный способ.* Выбирая ряд значений аргумента и сопоставляя их (путем измерений или вычислений) с соответствующими значениями функции, получают таблицу, которая и будет представлять собой табличное задание функции (табл. 4.1).

Таблица 4.1

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

3. *Графический способ.* Функция задается графически в виде плоской кривой – графика данной функции, изображенного в системе координат Oxy. Тогда абсциссе x каждой точки кривой ставится в соответствие единственная ордината y этой же точки и тем самым устанавливается однозначное соответствие переменных x и y.

4. *Описательный способ.* Функция задается словесно (указывается соответствие значений аргумента и значений функции).

Явные и неявные, заданные параметрически, сложные, обратные функции. Функции, заданные аналитически в виде $y = f(x)$ (т.е. в левой части равенства, определяющего функцию, записана переменная y, а в правой – выражение, зависящее только от x), называются *явными*.

Если функциональная зависимость задана уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной, то функция называется *неявной*. Общий вид такого задания:

$$F(x, y) = 0.$$

Если каждая из переменных (независимая и зависимая) выражается аналитически (формулой) через одну и ту же новую независимую переменную (например, t), заданную на некоторой области определения, то такое задание функции называется *параметрическим*:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in T \subseteq \mathbf{R}.$$

Пусть заданы функция $g(x)$ с областью определения X и множеством значений T и функция $f(t)$ с областью определения, содержащей множество T, и множеством значений Y. Тогда функция, которая каждому значению x из множества X ставит в соответствие единственное значение y из множества Y такое, что $y = f(t)$, $t = g(x)$, называется *сложной функцией*: $y = f(g(x)),\quad x \in X$.

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения X и множеством значений Y, которая разным значениям аргумента ставит в соответствие разные числа. *Обратной к функции* $y = f(x)$, $x \in X$, называется функция $x = f^{-1}(y)$, которая имеет область определения Y и множество значений X и каждому значению $y \in Y$ ставит в соответствие единственное значение $x \in X$ так, что $f(x) = y$. Следовательно, при любом x из множества X имеет место тождество $f^{-1}\big(f(x)\big) \equiv x,\quad x \in X$.

Если функция $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$, является обратной к функции $y = f(x)$, $x \in X$, то функция $y = f(x)$, $x \in X$, является обратной к функции $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$, и справедливо равенство

$$f(f^{-1}(y)) = y.$$

Функции f и f^{-1} называются *взаимно обратными.*

Достаточный признак существования обратной функции. Если функция строго возрастает (убывает) на множестве X, то для нее существует обратная функция и она тоже строго возрастает (убывает) на множестве значений данной функции.

Графики двух взаимно обратных функций, построенные в одной системе координат, симметричны относительно прямой $y = x$.

4.2. Основные свойства функции

Свойства четности и периодичности. Множество точек X числовой прямой называется *симметричным множеством* относительно точки 0, если для любого числа $x \in X$ противоположное число $-x$ также принадлежит множеству X.

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если: 1) область ее определения симметрична относительно точки 0; 2) для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси y.

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если: 1) область ее определения симметрична относительно точки 0; 2) для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на числовом множестве $X \subset \mathbf{R}$. Функция $y = f(x)$, $x \in X$, называется *периодической* на X, если существует число T, $T \neq 0$, называемое *периодом функции* $y = f(x)$, такое, что:

1) числа $x + T$, $x - T$ принадлежат множеству X для каждого $x \in X$;

2) для любого $x \in X$ имеет место равенство $f(x+T) = f(x)$.

Если $T \neq 0$ является периодом функции, то ее периодом будет также и любое число nT, где $n \in \mathbf{Z}$: $f(x + nT) = f(x)$. Наименьший положительный период функции T называется ее *главным периодом*.

Нули функции. Промежутки знакопостоянства функции. Значение аргумента $x \in D(f)$, при котором $f(x) = 0$, называется *нулем функции*.

Числовые промежутки, на которых все значения функции имеют один и тот же знак, называются *промежутками знакопостоянства функции*.

На промежутке, где функция положительна (на *промежутке знакоположительности*), ее график расположен н а д о с ь ю Ox, а где функция отрицательна (на *промежутке знакоотрицательности*) – п о д о с ь ю Ox.

Для нахождения промежутков знакопостоянства функции $y = f(x)$ необходимо решить неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$ соответственно.

Ограниченность функции. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной снизу* на множестве X ($X \subseteq D(f)$), если существует такое число A, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \geq A$.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху* на множестве X ($X \subseteq D(f)$), если существует такое число B, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \leq B$.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на множестве X ($X \subseteq D(f)$), если существует такое число C, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство

$$|f(x)| \leq C. \tag{4.1}$$

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, является ограниченной тогда и только тогда, когда она ограничена на этом множестве и сверху, и снизу.

Геометрически понятие ограниченности функции означает, что ее график находится на координатной плоскости внутри некоторой горизонтальной полосы.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется *неограниченной* на множестве, если не существует положительного числа C такого, что для любого x из X справедливо неравенство (4.1).

Возрастание и убывание функции. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на множестве X ($X \subseteq D(y)$), если для любых значений $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на множестве X ($X \subseteq D(y)$), если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *неубывающей* на множестве X ($X \subseteq D(y)$), если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *невозрастающей* на множестве X ($X \subseteq D(y)$), если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Возрастающие, убывающие, неубывающие, невозрастающие функции на множестве X называются *монотонными* на множестве X; при этом возрастающая и убывающая функции называются *строго монотонными*, а неубывающая и невозрастающая – *нестрого монотонными*.

Свойства монотонных функций. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на одном и том же множестве X. Тогда:

1) если $f(x)$ возрастает (убывает) на X, то $f(x)+c$ ($c=\text{const}$) возрастает (убывает) на X; функция $cf(x)$, $c>0$, возрастает (убывает) на X;

2) если $f(x)$ и $g(x)$ возрастают (убывают) на X, то $f(x)+g(x)$ также возрастает (убывает) на X;

3) если $f(x)>0$, $g(x)>0$ и обе функции возрастают (убывают) на X, то $f(x)g(x)$ возрастает (убывает) на X;

4) если $f(x)<0$, $g(x)<0$ и обе функции возрастают (убывают) на X, то $f(x)g(x)$ убывает (возрастает) на X;

5) если $f(x)>0$ и $f(x)$ возрастает (убывает) на X, то $f^2(x)$ возрастает (убывает) на X; если $f(x)<0$ и $f(x)$ возрастает (убывает) на X, то $f^2(x)$ убывает (возрастает) на X;

6) если $f(x)$ возрастает (убывает) на X и $f(x)>0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ убывает (возрастает) на X;

7) если $f(x)$ возрастает (убывает) на X и $f(x)<0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ убывает (возрастает) на X;

8) если $f(x)\geq 0$ и $f(x)$ возрастает (убывает) на X, то $\sqrt{f(x)}$ возрастает (убывает) на X.

Условия монотонности функции в случае ее дифференцируемости см. в § 13.5.

Экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции. Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве X, $X\subset\mathbf{R}$. Точка $x_0\in X$ называется *точкой максимума* (*локального максимума*) функции $y=f(x)$, если существует интервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$, содержащийся в X, такой, что для каждого x из этого интервала справедливо неравенство $f(x)\leq f(x_0)$.

Точка $x_0\in X$ называется *точкой минимума* (*локального минимума*) функции $y=f(x)$, если существует интервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$, содержащийся в X, такой, что для каждого x из этого интервала справедливо неравенство $f(x)\geq f(x_0)$.

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума* функции, а значения функции в этих точках – *экстремумами* функции.

Функция $f(x)$ может иметь на области ее определения несколько точек локального максимума и несколько точек локального минимума.

Число M называется *наибольшим значением функции* $y = f(x)$ на множестве X, если существует $x_0 \in X$ такое, что $f(x_0) = M$, и для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \le M$; обозначают $\max\limits_{x \in X} f(x) = M$.

Число m называется *наименьшим значением функции* $y = f(x)$ на числовом множестве X, если существует $x_0 \in X$ такое, что $f(x_0) = m$, и для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \ge m$; обозначают $\min\limits_{x \in X} f(x) = m$.

Функция может иметь на множестве $X \subseteq \mathbf{R}$ только одно наибольшее значение и только одно наименьшее значение или не иметь их.

Наибольшее значение функции называется также *глобальным максимумом*, наименьшее значение – *глобальным минимумом*.

Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a, b]$, то наименьшее (наибольшее) значение она принимает в точке $x = a$, а наибольшее (наименьшее) значение – в точке $x = b$.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в случае ее дифференцируемости см. в § 13.5.

О выпуклости функции и точках ее перегиба см. в § 13.5.

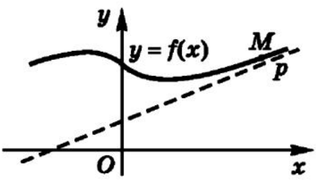


Рис. 4.1

Асимптоты. Пусть задан график функции $y = f(x)$. Прямая p называется *асимптотой* графика функции, если точка M графика приближается к прямой p сколь угодно близко при стремлении M в бесконечность по кривой $y = f(x)$ (рис. 4.1).

Различают горизонтальную, вертикальную и наклонную асимптоты (об их нахождении см. § 12.3).

4.3. Преобразование графиков функций

Пусть задан график функции $y = f(x)$.

1. График функции $y = -f(x)$ строится симметрично графику функции $y = f(x)$ относительно оси Ox.

2. График функции $y = f(-x)$ строится симметрично графику функции $y = f(x)$ относительно оси Oy.

3. График функции $y = f(x) + b$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на b масштабных единиц вверх при $b > 0$ и на $|b|$ вниз при $b < 0$.

4. График функции $y = f(x + a)$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на $|a|$ вправо при $a < 0$ и на a влево при $a > 0$.

5. График функции $y = kf(x) \quad (k > 0)$ получается «растяжением» графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy в k раз при $k > 1$ и «сжатием» вдоль оси Oy в $\dfrac{1}{k}$ раз при $0 < k < 1$.

6. График функции $y = f(mx)$ $(m > 0)$ получается «сжатием» графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox в m раз при $m > 1$ и «растяжением» вдоль оси Ox в $\dfrac{1}{m}$ раз при $0 < m < 1$.

7. При построении графика функции $y = |f(x)|$ части графика функции $y = f(x)$, лежащие выше оси Ox и на оси Ox, остаются без изменения, а лежащие ниже оси Ox – отображаются симметрично относительно этой оси.

8. При построении графика функции $y = f(|x|)$ часть графика функции $y = f(x)$, лежащая левее оси Oy, отбрасывается, а часть, лежащая правее оси Oy и на оси Oy, остается без изменения и, кроме того, симметрично отображается относительно оси Oy.

4.4. Элементарные функции

Линейная функция $y = kx + b$. Она обладает следующими характеристиками.

Область определения функции: $D(y) = (-\infty, +\infty)$.

Множество значений: $E(y) = \{b\}$, если $k = 0$; $E(y) = (-\infty, +\infty)$, если $k \neq 0$.

Четность и нечетность: четная, если $k = 0$, и нечетная, если $b = 0$.

Периодичность: периодическая с любым периодом, если $k = 0$, и непериодическая, если $k \neq 0$.

Нули функции: обращается в нуль в единственной точке $x = -\dfrac{b}{k}$, если $k \neq 0$; обращается в нуль при любых $x \in \mathbf{R}$, если $k = 0$, $b = 0$; в нуль не обращается, если $k = 0$, $b \neq 0$.

Наибольшее и наименьшее значения: совпадают и равны b, если $k = 0$; наибольшего и наименьшего значений не существует, если $k \neq 0$.

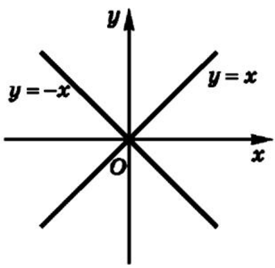
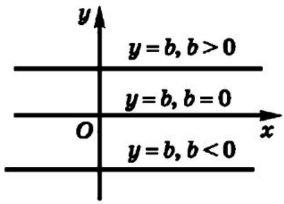
Промежутки возрастания и убывания: функция является постоянной на $D(y)$, если $k = 0$; возрастает на $D(y)$, если $k > 0$; убывает на $D(y)$, если $k < 0$.

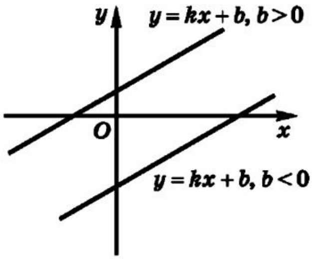
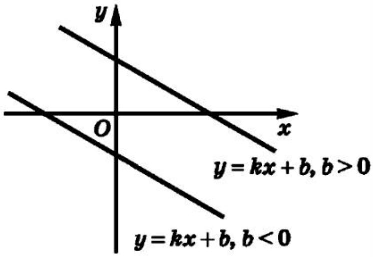
График функции: прямая линия.

Коэффициент k в формуле $y = kx + b$ называется *угловым коэффициентом*: $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол наклона графика к положительному направлению оси Ox.

Графики линейной функции для различных значений k, b приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

k	b	График
1	2	3
± 1	0	
0	$b \in \mathbf{R}$	

1	2	3
$k>0$	$b\in\mathbf{R}$	
$k<0$	$b\in\mathbf{R}$	

Квадратичная функция $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0}$. Она обладает следующими характеристиками.

Область определения: $D(y) = (-\infty, +\infty)$.

Множество значений: $E(y) = \left[-\dfrac{b^2-4ac}{4a}, +\infty\right)$, если $a>0$; $E(y) = \left(-\infty, -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right]$, если $a<0$.

Четность и нечетность: четная, если $b=0$, не является четной и нечетной, если $b\neq 0$.

Периодичность: непериодическая.

Нули функции: обращается в нуль:

1) в двух точках

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

если $D = b^2 - 4ac > 0$;

2) в единственной точке $x = -\dfrac{b}{2a}$, если $D = b^2 - 4ac = 0$;

3) не имеет нулей, если $D = b^2 - 4ac < 0$.

Наибольшее и наименьшее значения:

1) если $a > 0$, то наименьшее значение $y = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ при $x = -\dfrac{b}{2a}$, наибольшего значения не имеет;

2) если $a < 0$, то наибольшее значение $y = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ при $x = -\dfrac{b}{2a}$, наименьшего значения не имеет.

Промежутки возрастания и убывания:

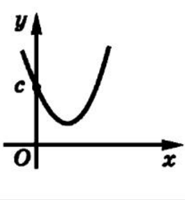
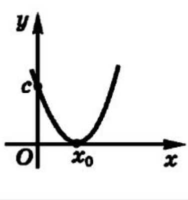
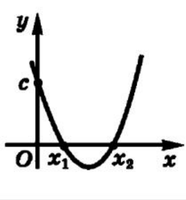
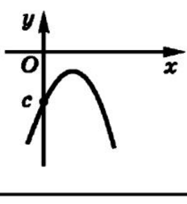
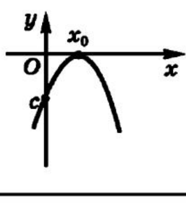
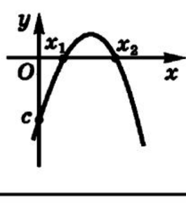
1) убывает на $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ и возрастает на $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$, если $a > 0$;

2) возрастает на $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ и убывает на $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$, если $a < 0$.

График функции: квадратичная парабола.

Графики функции для различных по знаку значений a и D (и определенного значения c) приведены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

	$D<0$	$D=0$	$D>0$
$a>0$			
$a<0$			

Обратная пропорциональная зависимость, задаваемая функцией $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$. Она обладает следующими характеристиками.

Область определения: $D(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Множество значений: $E(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Четность и нечетность: нечетная.

Периодичность: непериодическая.

Нули функции: нулей не имеет.

Промежутки знакопостоянства:

1) положительна при $x \in (0, +\infty)$ и отрицательна при $x \in$ $\in (-\infty, 0)$, если $k > 0$;

2) положительна при $x \in (-\infty, 0)$ и отрицательна при $x \in$ $\in (0, +\infty)$, если $k < 0$.

Наибольшее и наименьшее значения: не имеет.

Промежутки возрастания и убывания:

1) убывает на $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, если $k > 0$;

2) возрастает на $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, если $k < 0$.

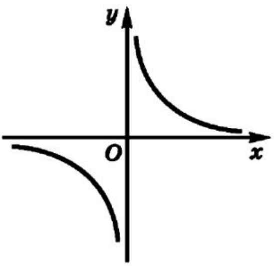
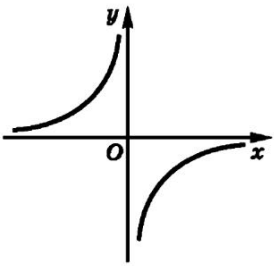
На всей области определения функция не является монотонной.

Асимптоты: $x = 0$ – вертикальная асимптота (ось Oy), $y = 0$ – горизонтальная асимптота (ось Ox).

График функции: гипербола.

Графики функции в зависимости от знака коэффициента k представлены в табл. 4.4.

Таблица 4.4

$k > 0$	$k < 0$
	

Степенная функция $y = x^3$. Она обладает следующими характеристиками.

Область определения: $D(y) = (-\infty, +\infty)$.

Множество значений: $E(y) = (-\infty, +\infty)$.

Четность и нечетность: нечетная.

Периодичность: непериодическая.

Нули функции: $x = 0$ – единственный нуль.

Наибольшее и наименьшее значения: не имеет.

Промежутки возрастания и убывания: возрастает на $D(y)$.

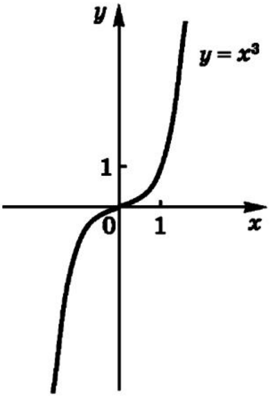


Рис. 4.2

График функции: кубическая парабола (рис. 4.2).

Степенная функция $y = x^{\frac{1}{2}}$ (или $y = \sqrt{x}$). Она обладает следующими характеристиками.

Область определения: $D(y) = [0, +\infty)$.

Множество значений: $E(y) = [0, +\infty)$.

Четность и нечетность: не обладает свойством четности и нечетности.

Периодичность: непериодическая.

Нули функции: $x = 0$ – единственный нуль.

Наибольшее и наименьшее значения: наименьшее значение, равное 0, функция принимает в точке $x = 0$; наибольшего значения не имеет.

Промежутки возрастания и убывания: является возрастающей на $D(y)$.

График функции: симметричен правой «половине» параболы относительно прямой $y = x$ (рис. 4.3); функция является обратной для функции $y = x^2$ при условии $x \geq 0$.

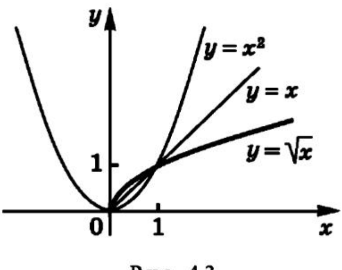


Рис. 4.3

Степенная функция $y = x^{\frac{1}{3}}$ (или $y = \sqrt[3]{x}$). Она обладает следующими характеристиками.

Область определения: $D(y) = (-\infty, +\infty)$.

Множество значений: $E(y) = (-\infty, +\infty)$.

Четность и нечетность: нечетная.

Периодичность: непериодическая.

Нули функции: $x = 0$ – единственный нуль.

Наибольшее и наименьшее значения: не имеет.

Промежутки возрастания и убывания: является возрастающей на $D(y)$.

График функции: симметричен графику кубической параболы относительно прямой $y = x$ (рис. 4.4); функция является обратной для функции $y = x^3$, $x \in D(y)$.

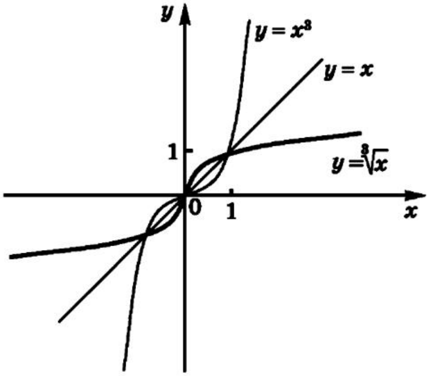


Рис. 4.4

Степенная функция $y = x^{2n}$, $n \in \mathbf{N}$. Она обладает следующими характеристиками

Область определения: $D(y) = (-\infty, +\infty)$.

Множество значений: $E(y) = [0, +\infty)$.

Четность и нечетность: четная.

Периодичность: непериодическая.

Нули функции: $x = 0$ – единственный нуль.

Наибольшее и наименьшее значения: наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$; наибольшего значения не имеет.

Промежутки возрастания и убывания: убывает на $(-\infty, 0]$ и возрастает на $[0, +\infty)$.

График функции: для любого $n \in \mathbf{N}$ похож на график квадратичной параболы $y = x^2$ (графики функций $y = x^2$, $y = x^4$ изображены на рис. 4.5).

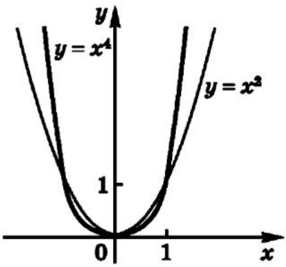


Рис. 4.5

Степенная функция $y = x^{2n+1}$, $n \in \mathbf{N}$. Она обладает следующими характеристиками.

Область определения: $D(y) = (-\infty, +\infty)$.

Множество значений: $E(y) = (-\infty, +\infty)$.

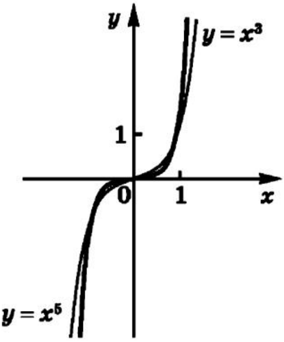


Рис. 4.6

Четность и нечетность: нечетная.

Периодичность: непериодическая.

Нули функции: $x = 0$ – единственный нуль.

Наибольшее и наименьшее значения: не имеет при любом $n \in \mathbf{N}$.

Промежутки возрастания и убывания: возрастает на всей области определения.

График функции: для каждого $n \in \mathbf{N}$ «похож» на график кубической параболы (графики функций $y = x^3$, $y = x^5$ изображены на рис. 4.6).

Степенная функция $y = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$, $n \in \mathbf{N}$. Она обладает следующими характеристиками.

Область определения: $D(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Множество значений: $E(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Четность и нечетность: нечетная.

Периодичность: непериодическая.

Нули функции: не имеет.

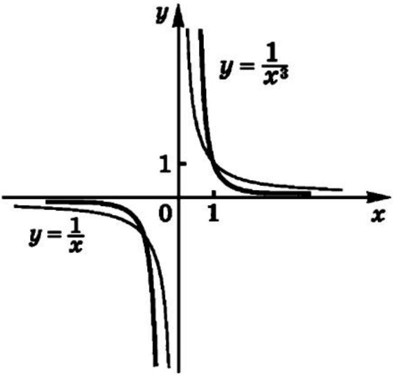


Рис. 4.7

Наибольшее и наименьшее значения: не имеет при любом $n \in \mathbf{N}$.

Промежутки возрастания и убывания: убывает на $(-\infty, 0)$ и на $(0, +\infty)$. На всей области $D(y)$ не является монотонной.

Асимптоты: $x = 0$ (ось Oy) – вертикальная асимптота, $y = 0$ (ось Ox) – горизонтальная.

График функции: для любого n «похож» на график гиперболы (графики функций $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{1}{x^3}$ изображены на рис. 4.7).

Степенная функция $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$, $n \in \mathbf{N}$. Она обладает следующими характеристиками.

Область определения: $D(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Множество значений: $E(y) = (0, +\infty)$.

Четность и нечетность: четная.

Периодичность: непериодическая.

Наибольшее и наименьшее значения: не имеет при любом $n \in \mathbf{N}$.

Промежутки возрастания и убывания: возрастает на $(-\infty, 0)$ и убывает на $(0, +\infty)$.

Асимптоты: $x = 0$ (ось Oy) – вертикальная асимптота, $y = 0$ (ось Ox) – горизонтальная.

Графики функции при $n = 1, 2$ изображены на рис. 4.8.

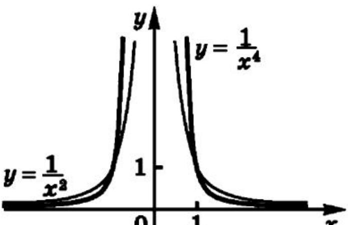


Рис. 4.8

Степенная функция $y = x^{\frac{1}{2n}}$, $n \in \mathbf{N}$. Она обладает следующими характеристиками.

Область определения: $D(y) = [0, +\infty)$.

Множество значений: $E(y) = [0, +\infty)$.

Четность и нечетность: не обладает свойством четности и нечетности.

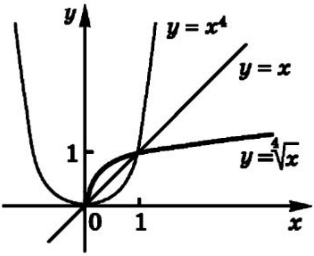


Рис. 4.9

Периодичность: непериодическая.

Нули функции: $x = 0$ – единственный нуль.

Наибольшее и наименьшее значения: наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$; наибольшего значения не имеет.

Промежутки возрастания и убывания: возрастает на всей области определения.

График функции: для любого $n \in \mathbf{N}$ «похож» на график функции $y = \sqrt{x}$ (график функции $y = x^{\frac{1}{4}}$, т.е. $y = \sqrt[4]{x}$, изображен на рис. 4.9).

При определенном показателе n ($n \in \mathbf{N}$) функция является обратной для $y = x^{2n}$, если $x \geq 0$.

Степенная функция $\boldsymbol{y = x^{\frac{1}{2n+1}}}$, $\boldsymbol{n \in \mathbf{N}}$. Она обладает следующими характеристиками.

Область определения: $D(y) = (-\infty, +\infty)$.

Множество значений: $E(y) = (-\infty, +\infty)$.

Четность и нечетность: нечетная.

Периодичность: непериодическая.

Нули функции: $x = 0$ – единственный нуль.

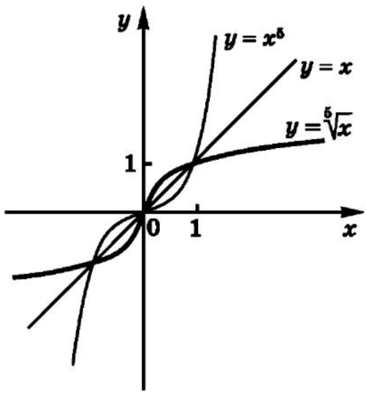


Рис. 4.10

Наибольшее и наименьшее значения: не имеет при любом $n \in \mathbf{N}$.

Промежутки возрастания и убывания: возрастает на всей области определения.

График функции: «похож» на график функции $y = \sqrt[3]{x}$ при любом n (график функции $y = x^{\frac{1}{5}}$, т.е. $y = \sqrt[5]{x}$, изображен на рис. 4.10).

При определенном показателе n ($n \in \mathbf{N}$) функция является обратной для функции $y = x^{2n+1}$.

Множество элементарных функций. К основным элементарным функциям относятся:

1) степенная функция $y = x^{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbf{R}$);

2) показательная функция $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$);

3) логарифмическая функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$);

4) тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$;

5) обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Элементарной функцией называется функция, которая получается из основных элементарных функций с помощью арифметических операций и с помощью образования сложной функции. Все приведенные в данном параграфе функции относятся к элементарным.

Информацию о показательной функции $y = a^x$ и логарифмической функции $y = \log_a x$ см. в § 5.2, о гиперболических функциях – в § 5.5, о тригонометрических и обратных тригонометрических функциях – в § 7.3, 7.4.

5

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

5.1. Логарифм и его свойства

Понятие логарифма. *Логарифмом числа* b $(b>0)$ *по основанию* a $(a>0,\ a\neq 1)$ называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b. Логарифм обозначают $\log_a b$:

$$a^{\log_a b}=b. \tag{5.1}$$

Формулу (5.1) называют *основным логарифмическим тождеством*.

Логарифм числа b по основанию 10 называется *десятичным логарифмом* и обозначается $\lg b$.

Логарифм по основанию e $(e=2{,}71828...)$ называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\ln b$.

Следует различать произведение логарифмов $\log_a b\cdot\log_c d$ и повторный логарифм $\log_a \log_c d$:

$$\log_a b\cdot\log_c d=(\log_a b)(\log_c d),$$
$$\log_a \log_c d=\log_a(\log_c d).$$

Степень логарифма может быть записана двумя способами: $(\log_a b)^k$ или $\log_a^k b$, где $k\in\mathbf{R}$.

Свойства логарифма. Пусть $a, b, c>0,\ a\neq 1$. Тогда верны следующие формулы:

1) $\log_a 1=0$;

2) $\log_a a=1$;

3) $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$;

4) $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$;

5) $\log_a b^k=k\log_a b$, где $k\in\mathbf{R}$;

6) $\log_{a^m} b=\dfrac{1}{m}\log_a b$, где $m\in\mathbf{R},\ m\neq 0$;

7) $\log_a b = \log_{a^k} b^k$, где $k \in \mathbf{R}, k \neq 0$;

8) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, где $c \neq 1$;

9) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, где $b \neq 1$;

10) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$, где $b \neq 1$;

11) $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$;

12) $\log_a b = \log_a c$ тогда и только тогда, когда $b = c$;

13) $\log_a b > \log_a c$, где $a > 1$, тогда и только тогда, когда $b > c$;

14) $\log_a b > \log_a c$, где $0 < a < 1$, тогда и только тогда, когда $b < c$.

Обобщенные свойства логарифмов. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$ и $f(x)$, $g(x)$ – выражения с переменной. Тогда верны формулы:

3*) $\log_a(f(x)g(x)) = \log_a|f(x)| + \log_a|g(x)|$, где $f(x)g(x) > 0$;

4*) $\log_a\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \log_a|f(x)| - \log_a|g(x)|$, где $f(x)g(x) > 0$;

5*) $\log_a(f(x))^{2n} = 2n\log_a|f(x)|$, где $n \in \mathbf{N}$, $f(x) \neq 0$;

6*) $\log_{(f(x))^{2n}} b = \dfrac{1}{2n}\log_{|f(x)|} b$, где $n \in \mathbf{N}$, $\begin{cases} f(x) \neq 0, \\ f(x) \neq \pm 1. \end{cases}$

5.2. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$). Она обладает следующими характеристиками.

Область определения: $D(y) = (-\infty, +\infty)$.

Множество значений: $E(y) = (0, +\infty)$.

Четность и нечетность: не является четной и нечетной.

Периодичность: непериодическая.

Нули функции: не имеет.

Промежутки знакопостоянства: положительна на $D(y)$.

Наибольшее и наименьшее значения: не имеет.

Промежутки возрастания и убывания: если $a > 1$, то возрастает для всех $x \in (-\infty, +\infty)$; если $0 < a < 1$, то убывает для $x \in (-\infty, +\infty)$.

Точки пересечения с осями координат: график пересекает ось Oy в точке $y = 1$, а ось Ox не пересекает.

Асимптоты: прямая $y=0$ (ось Ox) является горизонтальной асимптотой.

График функции: для $a>1$ изображен на рис. 5.1, для $0<a<1$ – на рис. 5.2.

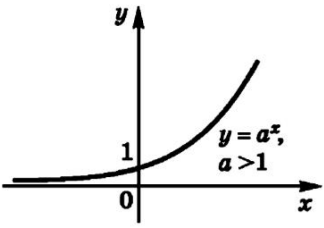


Рис. 5.1

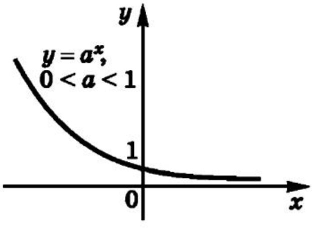


Рис. 5.2

Из свойств монотонности функции следует, что неравенство $a^{x_1}>a^{x_2}$ равносильно: 1) неравенству $x_1>x_2$, если $a>1$; 2) неравенству $x_1<x_2$, если $0<a<1$.

Если $a=e$ ($e=2{,}71828...$), то показательная функция $y=e^x$ называется *экспонентой*. Ее обозначают также $y=\exp x$.

Логарифмическая функция $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$). Она обладает следующими характеристиками.

Область определения: $D(y)=(0,+\infty)$.

Множество значений: $E(y)=(-\infty,+\infty)$.

Четность и нечетность: не является четной и нечетной.

Периодичность: непериодическая.

Нули функции: обращается в нуль при $x=1$.

Промежутки знакопостоянства: если $a>1$, то положительна для $x\in(1,+\infty)$ и отрицательна для $x\in(0,1)$; если $0<a<1$, то положительна для $x\in(0,1)$ и отрицательна для $x\in(1,+\infty)$.

Наибольшее и наименьшее значения: не имеет.

Промежутки возрастания и убывания: если $a>1$, то возрастает для $x\in(0,+\infty)$; если $0<a<1$, то убывает для $x\in(0,+\infty)$.

Асимптоты: прямая $x=0$ (ось Oy) – вертикальная асимптота.

График функции для $a>1$ изображен на рис. 5.3, для $0<a<1$ – на рис. 5.4.

Из свойств монотонности функции следует: $\log_a b>0$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a>1, \\ b>1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0<a<1, \\ 0<b<1. \end{cases}$$

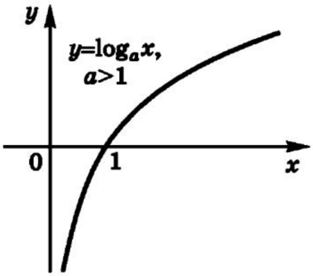


Рис. 5.3

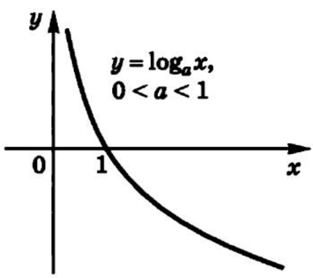


Рис. 5.4

Функция $y = \log_a x$, где $a > 1$, является обратной для функции $y = a^x$ при $a > 1$.

Функция $y = \log_a x$, где $0 < a < 1$, является обратной для функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$.

5.3. Показательные уравнения и неравенства

Показательные уравнения. *Показательным уравнением* называется уравнение, которое содержит неизвестную величину в показателе степени при постоянном основании a ($a > 0$, $a \neq 1$).

Рассмотрим четыре типа показательных уравнений, где $f(x)$, $g(x)$ – некоторые выражения с неизвестной величиной x.

В ходе решения уравнений учитывают их ОДЗ.

I тип. Уравнение

$$a^{f(x)} = b. \qquad (5.2)$$

Уравнение (5.2) имеет решение, если $b > 0$. Его решают логарифмированием по основанию a:

$$\log_a a^{f(x)} = \log_a b.$$

Тогда

$$f(x) = \log_a b. \qquad (5.3)$$

Уравнение (5.3) решают соответственно его типу.

II тип. Уравнение

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}. \qquad (5.4)$$

По свойству равенства степеней уравнение (5.4) равносильно уравнению $f(x)=g(x)$. Полученное уравнение решают в зависимости от его типа.

I I I т и п. Уравнение

$$F(a^{f(x)})=0, \tag{5.5}$$

где F – некоторое выражение относительно $a^{f(x)}$.

Производят замену переменной $y=a^{f(x)}$ и решают уравнение $F(y)=0$. Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $(n \in \mathbf{N})$ – его корни, то после возвращения к старой переменной решение уравнения (5.5) сводится к решению равносильной ему совокупности

$$\left[\begin{array}{l} a^{f(x)}=y_1, \\ a^{f(x)}=y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^{f(x)}=y_n. \end{array}\right.$$

I V т и п. Уравнения, решаемые графическим методом.

Строят соответствующие графики для левой и правой частей уравнения. Определяют, для каких значений x графики имеют общую точку. Используют также иные функциональные свойства, в частности монотонность функции (возрастание, убывание).

Показательно-степенные уравнения. *Показательно-степенным уравнением* называется уравнение, в котором неизвестная величина содержится и в основании степени, и в показателе. Такие уравнения решают при условии, что основание степени положительно (это учитывают в ОДЗ).

Рассмотрим два типа показательно-степенных уравнений, в которых $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – некоторые выражения с неизвестной x.

I т и п. Уравнение

$$(f(x))^{g(x)}=(f(x))^{h(x)}. \tag{5.6}$$

Уравнение (5.6) решают при условии, что $f(x)>0$.

Решение уравнения (5.6) сводится к решению совокупности

$$\left[\begin{array}{l} g(x)=h(x), \\ f(x)=1. \end{array}\right.$$

При этом учитывают также ОДЗ выражений $g(x), h(x)$.

II т и п. Уравнение

$$(f(x))^{g(x)} = (h(x))^{g(x)}. \qquad (5.7)$$

Уравнение (5.7) решают на ОДЗ выражения $g(x)$ при условии, что $f(x) > 0, h(x) > 0$.

Решение уравнения (5.7) сводится к решению совокупности

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = h(x), \\ g(x) = 0. \end{array}\right.$$

Показательные неравенства. *Показательным неравенством* называется неравенство, в котором неизвестная содержится только в показателе степени при постоянном основании a $(a > 0, a \neq 1)$.

Рассмотрим три типа показательных неравенств, где $f(x)$ – некоторое выражение с переменной x.

I т и п. Неравенство

$$a^{f(x)} > b, \qquad (5.8)$$

где $b \in \mathbf{R}$.

Если $b \leq 0$, то решением неравенства (5.8) является множество всех x из ОДЗ выражения $f(x)$.

Если $b > 0$, то логарифмированием по основанию a неравенство (5.8) сводится к равносильному неравенству. При этом учитывается величина основания a:

1) если $0 < a < 1$, то в результате логарифмирования неравенства (5.8) получают неравенство

$$f(x) < \log_a b,$$

которое далее решают в зависимости от типа выражения $f(x)$;

2) если $a > 1$, то после логарифмирования приходят к неравенству

$$f(x) > \log_a b.$$

Если исходное неравенство имело знак $<$, или $\geq$, или $\leq$, то аналогично знак в полученном неравенстве меняется на противоположный в случае $0 < a < 1$ и не изменяется в случае $a > 1$.

II т и п. Неравенство

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \tag{5.9}$$

где $f(x), g(x)$ – некоторые выражения с переменной.

Для решения неравенства (5.9) (или аналогичного ему со знаком $\geq, <$ или $\leq$) используют монотонность логарифма:

1) если $0 < a < 1$, то неравенство (5.9) равносильно неравенству

$$f(x) < g(x),$$

которое решают в зависимости от типа выражений $f(x)$ и $g(x)$;

2) если $a > 1$, то неравенство (5.9) равносильно неравенству

$$f(x) > g(x).$$

III т и п. Неравенство

$$F(a^{f(x)}) > 0,$$

где F – некоторое выражение относительно $a^{f(x)}$.

Вводят замену переменной $y = a^{f(x)}$ и решают относительно переменной y неравенство $F(y) > 0$. Найденный в качестве решения промежуток (или объединение промежутков) записывают в виде неравенства (системы либо совокупности неравенств) относительно y и затем возвращаются к переменной x. Остается решить полученные показательные неравенства.

Показательно-степенные неравенства. Если переменная содержится и в основании степени, и в показателе, то такое неравенство называется *показательно-степенным*. Поскольку изменение знака неравенства зависит от величины основания, то для показательно-степенных неравенств рассматривают два случая, т.е. решают совокупность систем неравенств.

Показательно-степенные неравенства решают при условии, что основание степени положительно. Например, аналогом неравенства (5.9) является следующее показательно-степенное неравенство:

$$f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)},$$

где $f(x), g(x), h(x)$ – некоторые выражения с переменной. Его решение сводится к решению совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<f(x)<1,\\ g(x)<h(x),\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)>1,\\ g(x)>h(x).\end{cases}\end{array}\right.$$

5.4. Логарифмические уравнения и неравенства

Логарифмические уравнения. *Логарифмическим уравнением* называется уравнение, в котором неизвестная величина содержится под знаком логарифма или в его основании.

При решении логарифмических уравнений обязательно учитывается ОДЗ логарифма. Если ОДЗ найти сложно, то можно только выписать условия, которые ее определяют, а затем проверить полученные корни подстановкой в ОДЗ (можно проверять подстановкой в уравнение, не выписывая ОДЗ).

Рассмотрим три типа логарифмических уравнений, где $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – некоторые выражения с переменной (или число).

I тип. Уравнение

$$\log_{f(x)} g(x)=c, \tag{5.10}$$

где $c \in \mathbf{R}$.

На ОДЗ

$$\begin{cases}g(x)>0,\\ f(x)>0,\\ f(x)\neq 1\end{cases}$$

уравнение (5.10) решается по определению логарифма: $g(x)=f(x)^c$.

II тип. Уравнение

$$\log_{f(x)} g(x)=\log_{f(x)} h(x). \tag{5.11}$$

Используя равенство логарифмов на ОДЗ

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)\neq 1, \\ g(x)>0, \\ h(x)>0, \end{cases}$$

уравнение (5.11) сводят к равносильному ему $g(x)=h(x)$.

Уравнение

$$\log_{f(x)} g(x)=\log_{h(x)} g(x) \tag{5.12}$$

на ОДЗ

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)\neq 1, \\ h(x)>0, \\ h(x)\neq 1, \\ g(x)>0 \end{cases}$$

равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} g(x)=1, \\ f(x)=h(x). \end{array}\right.$$

III тип. Уравнение

$$F(\log_{f(x)} g(x))=0, \tag{5.13}$$

где F – некоторое выражение относительно $\log_{f(x)} g(x)$.

Необходимо определить ОДЗ уравнения (5.13), учитывая все условия существования логарифма и выражения F. Далее заменяют $y=\log_{f(x)} g(x)$ и решают уравнение $F(y)=0$. Если $y_1, y_2, \dots, y_n$ – корни последнего уравнения, то после возвращения к старой переменной необходимо решить совокупность

$$\left[\begin{array}{l} \log_{f(x)} g(x)=y_1, \\ \log_{f(x)} g(x)=y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \log_{f(x)} g(x)=y_n. \end{array}\right.$$

Полученные корни проверяют по ОДЗ.

Логарифмические неравенства. *Логарифмическим неравенством* называется такое неравенство, в котором неизвестная величина содержится под знаком логарифма или в его основании.

Особенностью решения логарифмических неравенств является учет ОДЗ входящих в него логарифмов. В отличие от логарифмических уравнений условия, определяющие ОДЗ, целесообразно записывать вместе с решением в одной системе. Необходимо внимательно следить за величиной основания логарифма. При положительном основании логарифма, которое меньше единицы, знак неравенства меняется на противоположный при переходе к сравнению выражений, стоящих под знаком логарифма.

Рассмотрим три типа логарифмических неравенств, где $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – некоторые выражения с переменной.

I тип. Неравенство

$$\log_a f(x) > b, \tag{5.14}$$

где $a > 0$.

Если $0 < a < 1$, то неравенство (5.14) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < a^b. \end{cases}$$

Если $a > 1$, то неравенство (5.14) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0 \text{ (можно исключить)}, \\ f(x) > a^b. \end{cases}$$

Неравенство

$$\log_{h(x)} f(x) > b. \tag{5.15}$$

Решение неравенства (5.15) сводится к решению совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) < \left(h(x)\right)^b, \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > 0 \text{ (можно исключить)}, \\ f(x) > \left(h(x)\right)^b. \end{cases} \end{array}\right.$$

II тип. Неравенство

$$\log_a f(x) > \log_a g(x). \tag{5.16}$$

Если $0 < a < 1$, то неравенство (5.16) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \text{ (можно исключить)}, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Если $a > 1$, то неравенство (5.16) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0 \text{ (можно исключить)}, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Неравенство

$$\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x). \tag{5.17}$$

Поскольку в основании логарифмов содержится переменная величина, то в общем случае решение неравенства (5.17) зависит от величины основания по сравнению с числом 1. Поэтому решают совокупность двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \text{ (можно исключить)}, \\ f(x) < g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > 0 \text{ (можно исключить)}, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

III тип. Неравенство

$$F(\log_a f(x)) > 0, \tag{5.18}$$

где F – некоторое выражение относительно $\log_a f(x)$.

Необходимо произвести замену $\log_a f(x) = y$ и решить неравенство $F(y) > 0$. Полученный в качестве решения последнего неравенства промежуток (или объединение промежутков) записывают в виде неравенства (системы либо совокупности неравенств) относительно y, а затем возвращаются к старой переменной.

Аналогично решают неравенства типа (5.14) – (5.18), в которых вместо знака $>$ использованы знаки $\geq$, $<$, $\leq$.

Например, неравенство $\log^2_{\frac{1}{3}}(x-1)-2\log_{\frac{1}{3}}(x-1)-3\leq 0$ можно решить следующим образом.

Пусть $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)$. Тогда $y^2-2y-3\leq 0$. Решение полученного квадратного неравенства: $y\in[-1,3]$, т.е. $\begin{cases} y\geq -1, \\ y\leq 3. \end{cases}$

Возвращаемся к переменной x:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x-1)\geq -1, \\ \log_{\frac{1}{3}}(x-1)\leq 3. \end{cases}$$

С учетом ОДЗ получаем:

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x-1\leq\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}, \\ x-1\geq\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x>1, \\ x\leq 4, \\ x\geq\dfrac{28}{27}, \end{cases}$$

т.е. приходим к ответу: $x\in\left[\dfrac{28}{27},4\right]$.

5.5. Гиперболические функции

Гиперболический синус. *Гиперболическим синусом* называется функция

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Она обладает следующими характеристиками.

Область определения: $D(y)=(-\infty,+\infty)$.

Множество значений: $E(y)=(-\infty,+\infty)$.

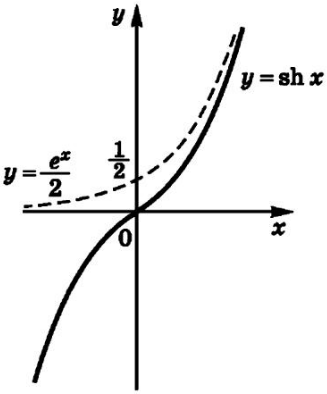


Рис. 5.5

Четность и нечетность: нечетная.

Периодичность: непериодическая.

Нули функции: $x = 0$ – единственный нуль.

Наибольшее и наименьшее значения: не имеет.

Промежутки возрастания и убывания: возрастает на $D(y)$.

График функции изображен на рис. 5.5.

Гиперболический косинус. *Гиперболическим косинусом* называется функция

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Она обладает следующими характеристиками.

Область определения: $D(y) = (-\infty, +\infty)$.

Множество значений: $E(y) = [1, +\infty)$.

Четность и нечетность: четная.

Периодичность: непериодическая.

Нули функции: не имеет.

Наибольшее и наименьшее значения: принимает наименьшее значение $y = 1$ в точке $x = 0$.

Промежутки возрастания и убывания: убывает на $(-\infty, 0]$ и возрастает на $[0, +\infty)$.

График функции изображен на рис. 5.6.

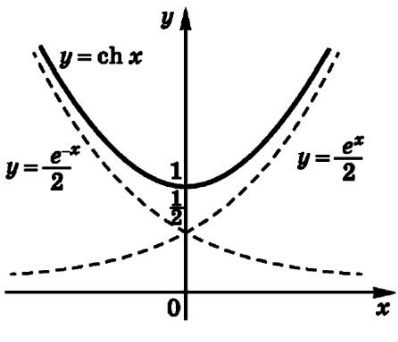


Рис. 5.6

Гиперболический тангенс. *Гиперболическим тангенсом* называется функция

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},$$

т.е. $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Функция обладает следующими характеристиками.

Область определения: $D(y) = (-\infty, +\infty)$.

Множество значений: $E(y) = (-1, 1)$.

Четность и нечетность: нечетная.

Периодичность: непериодическая.

Нули функции: $x = 0$ – единственный нуль.

Функция ограничена: $|\operatorname{th} x| < 1$.

Промежутки возрастания и убывания: возрастает на всей области определения.

Асимптоты: прямые $y = -1$, $y = 1$ – горизонтальные асимптоты.

График функции изображен на рис. 5.7.

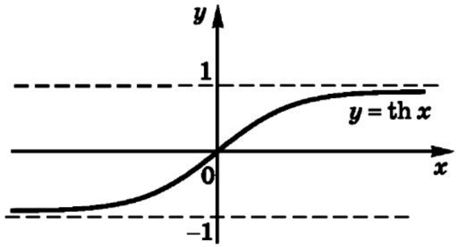


Рис. 5.7

Гиперболический котангенс. *Гиперболическим котангенсом* называется функция

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x},$$

т.е. $\operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Функция обладает следующими характеристиками.

Область определения: $D(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Множество значений: $E(y) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

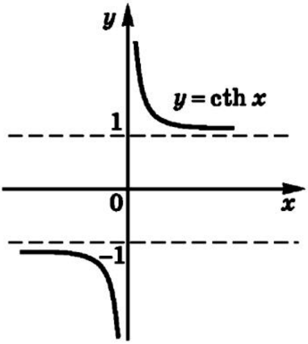


Рис. 5.8

Четность и нечетность: нечетная.

Периодичность: непериодическая.

Нули функции: не имеет.

Промежутки возрастания и убывания: убывает на каждом из промежутков $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

Асимптоты: $x = 0$ – вертикальная асимптота (ось Oy), прямые $y = -1$, $y = 1$ – горизонтальные асимптоты.

График функции изображен на рис. 5.8.

Основные формулы для гиперболических функций. Для любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ справедливы формулы:

$$\operatorname{ch}^2\alpha - \operatorname{sh}^2\alpha = 1,$$

$$\operatorname{sh}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\beta \pm \operatorname{ch}\alpha \operatorname{sh}\beta,$$

$$\operatorname{ch}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\beta \pm \operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\beta,$$

$$\operatorname{sh}2\alpha = 2\operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\alpha,$$

$$\operatorname{ch}2\alpha = \operatorname{ch}^2\alpha + \operatorname{sh}^2\alpha,$$

$$\operatorname{th}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{th}\alpha \pm \operatorname{th}\beta}{1 \pm \operatorname{th}\alpha \operatorname{th}\beta}.$$

6

ТРИГОНОМЕТРИЯ

6.1. Тригонометрические функции произвольного угла

Обобщение понятия угла. В системе координат Oxy рассматривается радиус-вектор $\overline{OA}$ с начальным направлением, совпадающим с направлением оси Ox. Если $\overline{OA}$ повернулся от Ox против хода часовой стрелки до положения $\overline{OA_1}$, то $\angle\alpha$, образованный этим радиусом-вектором и положительным направлением оси Ox, называется *положительным углом* (рис. 6.1).

Если радиус-вектор $\overline{OA}$ повернулся от оси Ox по ходу часовой стрелки до положения $\overline{OA_2}$, то образованный им $\angle\beta$ называется *отрицательным углом* (рис. 6.1).

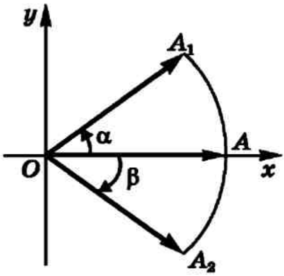


Рис. 6.1

Если $\overline{OA}$ повернулся от оси Ox в положительном направлении на $\frac{1}{360}$ часть полного оборота, то он образовал угол меры один градус ($1°$); $\frac{1}{60}$ часть от $1°$ называется *минутой* и обозначается $1'$; $\frac{1}{60}$ часть от $1'$ называется *секундой* и обозначается $1''$. Заданные единицы измерения вместе с направлением поворота дают возможность измерения любого угла, образованного радиусом-вектором.

Кроме измерения угла в градусах используют также радианное измерение. *Радианной мерой угла* называется отношение длины дуги, образованной поворотом конца радиуса-вектора, к длине радиуса-вектора с учетом направления поворота (рис. 6.2):

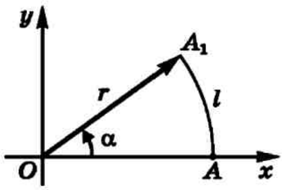


Рис. 6.2

$$\alpha_{\text{рад}} = \frac{l}{r},$$

где l – длина дуги AA_1; r – длина радиуса-вектора.

Для перевода градусной меры $n°$ в радианную и наоборот пользуются формулами

$$\alpha_{\text{рад}} = \frac{\pi n°}{180°}, \quad n° = \frac{180° \cdot \alpha}{\pi}, \quad 1 \text{ рад} \approx 57°17'45''.$$

Определение тригонометрических функций. В системе координат Oxy рассматривается единичная окружность с центром в начале системы координат и единичный радиус-вектор, образующий с осью Ox угол α.

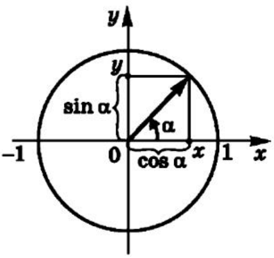


Рис. 6.3

Спроецировав конец радиуса-вектора на координатные оси, получим определенные точки x, y (рис. 6.3), которым соответствуют определенные координаты (со знаком «+» или «–»).

Синусом угла α называется проекция конца радиуса-вектора, образующего этот угол, на ось Oy:

$$\sin\alpha = y.$$

Косинусом угла α называется проекция конца радиуса-вектора, образующего этот угол, на ось Ox:

$$\cos\alpha = x.$$

Тангенсом угла α называется величина, равная отношению синуса угла α к косинусу α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

где $\cos\alpha \neq 0$, т.е. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Котангенсом угла α называется величина, равная отношению косинуса угла α к синусу α:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

где $\sin\alpha \neq 0$, т.е. $\alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Тангенс и котангенс угла α определяются также через проекции x и y:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\ x \neq 0; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y},\ y \neq 0.$$

Секансом угла α называется величина, обратная косинусу этого угла:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},$$

где $\cos\alpha \neq 0$, т.е. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Косекансом угла α называется величина, обратная синусу этого угла:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha},$$

где $\sin\alpha \neq 0$, т.е. $\alpha = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Для того чтобы показать геометрический смысл $\operatorname{tg}\alpha$, рисуют *ось тангенсов*. Она проходит через точку (1, 0), т.е. касается единичной окружности, имеет то же направление, что и ось Oy, и такой же масштаб (рис. 6.4).

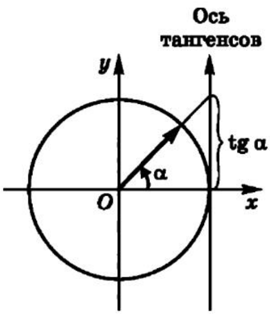


Рис. 6.4

Радиус-вектор, соответствующий стороне угла α, продолжают до пересечения с осью тангенсов. Полученный на оси тангенсов отрезок (его длина со знаком «+» или «–») и является $\operatorname{tg}\alpha$.

Для того чтобы показать геометрический смысл $\operatorname{ctg}\alpha$, рисуют *ось котангенсов*. Она проходит через точку (0, 1), имеет то же направление, что и ось Ox, и такой же масштаб. Геометрическое значение $\operatorname{ctg}\alpha$ получают после того, как продолжение радиуса-вектора пересечет ось котангенсов (рис. 6.5).

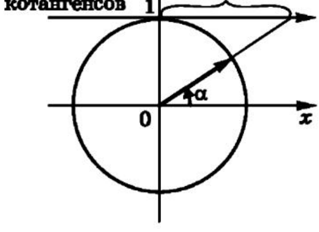


Рис. 6.5

Свойства тригонометрических функций. 1. *Знаковая характеристика* тригонометрических функций следует из их определения через проекции на координатные оси (рис. 6.6, *а–в*).

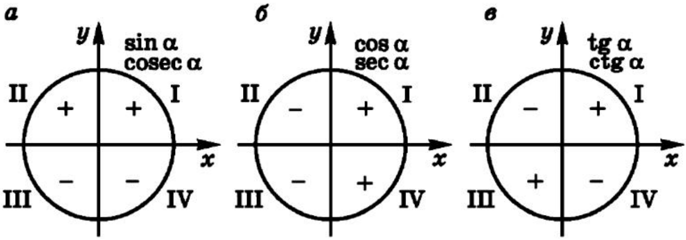


Рис. 6.6

2. Поскольку $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определяются как проекции внутри единичной окружности, то они ограничены, т.е. для всякого угла α выполняются неравенства $|\sin\alpha| \le 1$, $|\cos\alpha| \le 1$.

Функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ могут принимать любые по величине значения, $|\sec\alpha| \ge 1$, $|\operatorname{cosec}\alpha| \ge 1$.

3. Функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ являются 2π-*периодическими*:

$$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha, \quad \cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha,$$

$$\sec(\alpha + 2\pi n) = \sec\alpha, \quad \operatorname{cosec}(\alpha + 2\pi n) = \operatorname{cosec}\alpha,$$

где $n \in \mathbf{Z}$.

Функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ являются π-*периодическими*:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

4. Функции $\cos\alpha$ и $\sec\alpha$ являются *четными*:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \sec(-\alpha) = \sec\alpha.$$

Функции $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ являются *нечетными*:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha.$$

Значения тригонометрических функций. В табл. 6.1 приведены значения тригонометрических функций некоторых углов.

Таблица 6.1

Аргумент α, град (рад)	Функции			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
1	2	3	4	5
$0°(0)$	0	1	0	—
$15°\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$18°\left(\frac{\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
$30°\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$36°\left(\frac{\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$45°\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$54°\left(\frac{3\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$60°\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$72°\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
$75°\left(\frac{5\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90°\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	—	0
$120°\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$135°\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1
$150°\left(\frac{5\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$

1	2	3	4	5
$180°(\pi)$	0	-1	0	—
$210°\left(\frac{7\pi}{6}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$225°\left(\frac{5\pi}{4}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$240°\left(\frac{4\pi}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$270°\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	-1	0	—	0
$300°\left(\frac{5\pi}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$315°\left(\frac{7\pi}{4}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	1
$330°\left(\frac{11\pi}{6}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
$360°(2\pi)$	0	1	0	—

Формулы приведения. Их получают согласно *правилу приведения*:

1) если у заданной тригонометрической функции:

а) аргумент имеет вид

$$(2n-1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha,$$

где $n \in \mathbf{N}$, то функция меняется на сходную аргумента α (функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ в соответствующей паре называются *сходными* друг для друга);

б) аргумент имеет вид

$$n\pi\pm\alpha,$$

где $n \in \mathbf{N}$, то сохраняется заданная функция, но с аргументом α;

2) перед полученной функцией аргумента α, записанной согласно п. 1, ставится тот знак («+» или «–»), который имела заданная функция.

Таблица 6.2

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$2\pi+\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

Всюду в преобразованиях по правилу приведения угол α условно считают острым. Некоторые формулы приведения даны в табл. 6.2.

6.2. Тригонометрические формулы

***Основные тригонометрические тождества*:**

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}n,$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\quad \alpha\neq\pi n,$$

где $n\in\mathbf{Z}$.

По значению одной из тригонометрических функций некоторого угла можно, используя приведенные выше формулы, найти значения всех остальных. Применение этих формул значительно упрощает процесс тригонометрических преобразований. При этом необходимо помнить, что при извлечении квадратного корня получают выражение с модулем, например $|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Раскрывая модуль, выбирают знак в зависимости от того, в какой четверти лежит угол α.

Основные тригонометрические формулы. Всюду далее считаем, что выражения определены на своей ОДЗ.

Формулы суммы и разности углов:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}, \quad \operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}.$$

Формулы двойных и тройных углов:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha},$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Формулы половинного аргумента:

$$\left.\begin{aligned} &\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \\ &\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}. \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

Знак «+» или «–» в формулах (6.1) выбирают в соответствии с тем, в какой координатной четверти лежит угол $\frac{\alpha}{2}$.

Функции $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ выражаются также рационально:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Формулы понижения степени:

$$\left.\begin{aligned}&\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha), \quad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),\\ &\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}, \quad \operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}.\end{aligned}\right. \tag{6.2}$$

Формулы суммы и разности тригонометрических функций:

$$\left.\begin{aligned}&\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\ &\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},\\ &\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\ &\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},\\ &\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\\ &\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}, \quad \operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},\\ &\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}, \quad \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}.\end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Формулы произведения тригонометрических функций:

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),\\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)),\\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)).\end{aligned}\right\} \qquad (6.4)$$

Универсальная подстановка:

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}\right\} \qquad (6.5)$$

Некоторые дополнительные формулы (всюду далее считаем, что выражения определены на своей ОДЗ):

$$\cos\alpha+\sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right),$$

$$\cos\alpha-\sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right),$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \pm\frac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\cos\alpha\sin\beta},$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha = -2\operatorname{ctg}2\alpha,$$

$$1+\sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$1-\sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$1\pm\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm\alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm\alpha\right)}{\cos\alpha},$$

$$1-\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha},$$

$$1-\operatorname{ctg}^2\alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha},$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta},$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

6.3. Графики тригонометрических функций

Графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$. При рассмотрении графиков тригонометрических функций предполагается, что числовой аргумент представляет собой угол, измеренный в радианах. Соответствие, при котором каждому действительному числу x сопоставляется синус этого числа, называют *функцией синус* и обозначают $y = \sin x$.

Свойства функции $y = \sin x$ приведены в табл. 6.3, графиком функции является кривая, называемая *синусоидой* (рис. 6.7).

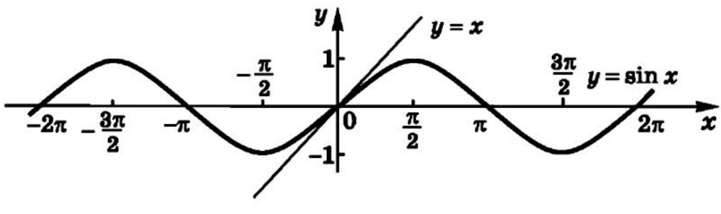


Рис. 6.7

Таблица 6.3

Свойства функции $f(x)$	Функция					
	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\sec x$	$\operatorname{cosec} x$
1	2	3	4	5	6	7
Область определения	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$	$(\pi n, \pi+\pi n)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$	$(\pi n, \pi+\pi n)$
Область значений	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$	$(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$
Четность / нечетность	Нечетная	Четная	Нечетная	Нечетная	Четная	Нечетная
Период	2π	2π	π	π	2π	2π
Координаты точек пересечения графика: с осью Ox с осью Oy	 $(\pi n, 0)$ $(0, 0)$	 $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n, 0\right)$ $(0, 1)$	 $(\pi n, 0)$ $(0, 0)$	 $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n, 0\right)$ Нет	 Нет $(0, 1)$	 Нет Нет
Промежутки возрастания	$\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$	$[-\pi+2\pi n,\ 2\pi n]$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$	Нет	$\left[2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \pi+2\pi n\right]$	$\left(-\pi+2\pi n,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]\cup$ $\cup\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \pi+2\pi n\right)$

Окончание табл. 6.3

1	2	3	4	5	6	7
Промежутки убывания	$\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$	$[2\pi n, \pi+2\pi n]$	Нет	$(\pi n, \pi+\pi n)$	$\left[-\pi+2\pi n, -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n, 2\pi n\right]$	$\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n, 2\pi n\right) \cup \left(2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$
Экстремум (локальный):						
точки минимума	$-\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$\pi+2\pi n$	Нет	Нет	$2\pi n$	$\frac{\pi}{2}+2\pi n$
минимум функции	-1	-1	Нет	Нет	1	1
точки максимума	$\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$2\pi n$	Нет	Нет	$\pi+2\pi n$	$-\frac{\pi}{2}+2\pi n$
максимум функции	1	1	Нет	Нет	-1	-1
Промежутки знакопостоянства:						
промежутки, где $f(x)>0$	$(2\pi n, \pi+2\pi n)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$	$\left(\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$	$\left(\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$	$(2\pi n, \pi+2\pi n)$
промежутки, где $f(x)<0$	$(-\pi+2\pi n, 2\pi n)$	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n, \pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n, \pi n\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{3\pi}{2}+\pi n\right)$	$(-\pi+2\pi n, 2\pi n)$

Соответствие, при котором каждому действительному числу x сопоставляется косинус этого числа, называют *функцией косинус* и обозначают $y = \cos x$.

Свойства функции $y = \cos x$ приведены в табл. 6.3, графиком функции является кривая, называемая *косинусоидой* (рис. 6.8).

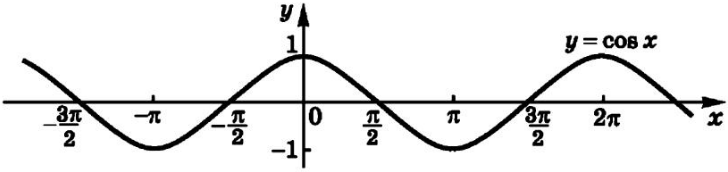


Рис. 6.8

Графики функций $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$. Соответствие, при котором каждому действительному числу x $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}\right)$ сопоставляется тангенс этого числа, называют *функцией тангенс* и обозначают $y = \mathrm{tg}\, x$.

Свойства функции $y = \mathrm{tg}\, x$ приведены в табл. 6.3, графиком функции является кривая, называемая *тангенсоидой* (рис. 6.9).

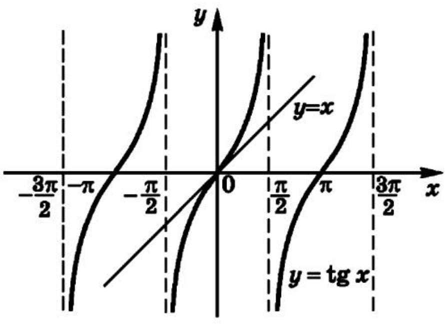


Рис. 6.9

Соответствие, при котором каждому действительному числу x $(x \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z})$ сопоставляется котангенс этого числа, называют *функцией котангенс* и обозначают $y = \mathrm{ctg}\, x$.

Свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$ приведены в табл. 6.3, график функции изображен на рис. 6.10.

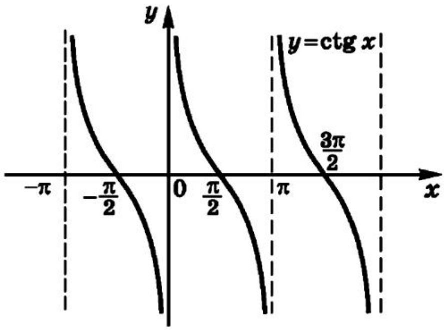


Рис. 6.10

Графики функций $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$. Соответствие, при котором каждому действительному числу x ($x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$) сопоставляется секанс этого числа, называют *функцией секанс* и обозначают $y = \sec x$.

Свойства функции $y = \sec x$ приведены в табл. 6.3, график функции изображен на рис. 6.11.

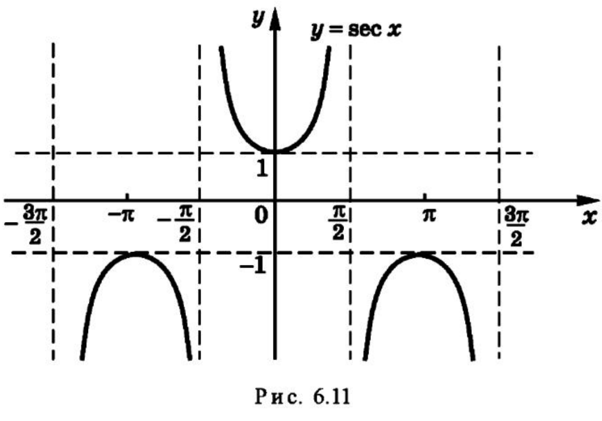


Рис. 6.11

Соответствие, при котором каждому действительному числу x ($x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$) сопоставляется косеканс этого числа, называют *функцией косеканс* и обозначают $y = \operatorname{cosec} x$.

Свойства функции $y = \operatorname{cosec} x$ приведены в табл. 6.3, график функции изображен на рис. 6.12.

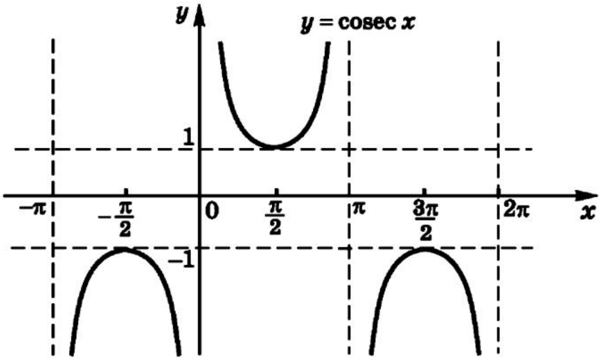


Рис. 6.12

Основные свойства тригонометрических функций. Они приведены в табл. 6.3, где всюду $n \in \mathbf{Z}$.

6.4. Обратные тригонометрические функции

Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$. Функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ имеет обратную функцию, которую называют *арксинусом* и обозначают $y = \arcsin x$.

Арксинусом числа x, где $x \in [-1, 1]$, называется такое число y (угол в радианах), $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен числу x:

$$\sin y = x.$$

Свойства функции $\arcsin x$:

1) $D(\arcsin x) = [-1, 1]$;

2) $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $\sin(\arcsin x) = x$, где $x \in [-1, 1]$;

4) $\arcsin(\sin x) = x$, где $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

5) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

График функции $y = \arcsin x$ изображен на рис. 6.13.

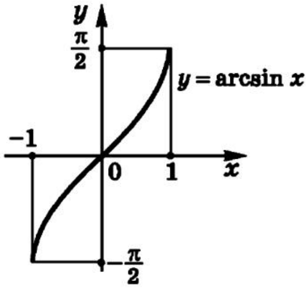


Рис. 6.13

Функция $y = \cos x$ на отрезке $[0, \pi]$ имеет обратную функцию, которую называют *арккосинусом* и обозначают $y = \arccos x$.

Арккосинусом числа x, где $x \in [-1, 1]$, называется такое число y (угол в радианах), $y \in [0, \pi]$, косинус которого равен числу x:

$$\cos y = x.$$

Свойства функции $\arccos x$:

1) $D(\arccos x) = [-1, 1]$;

2) $E(\arccos x) = [0, \pi]$;

3) $\cos(\arccos x) = x$, где $x \in [-1, 1]$;

4) $\arccos(\cos x) = x$, где $x \in [0, \pi]$;

5) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

График функции $y = \arccos x$ изображен на рис. 6.14.

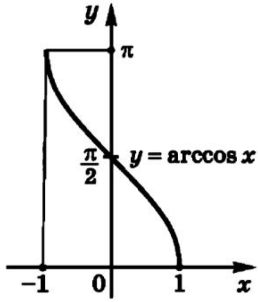


Рис. 6.14

Функции $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$. Функция $y = \mathrm{tg}\, x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ имеет обратную функцию, которую называют *арктангенсом* и обозначают $y = \mathrm{arctg}\, x$.

Арктангенсом числа x, $x \in \mathbf{R}$, называется такое число y (угол в радианах), $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен числу x:

$$\mathrm{tg}\, y = x.$$

Свойства функции $\mathrm{arctg}\, x$:

1) $D(\mathrm{arctg}\, x) = \mathbf{R}$; 2) $E(\mathrm{arctg}\, x) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

3) $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x) = x$, где $x \in \mathbf{R}$;

4) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) = x$, где $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

5) $\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}\, x$.

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ изображен на рис. 6.15.

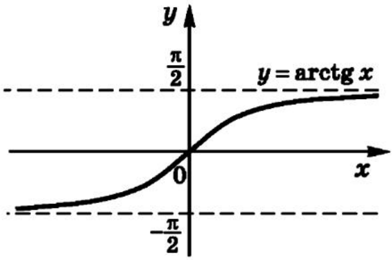


Рис. 6.15

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0, \pi)$ имеет обратную функцию, которую называют *арккотангенсом* и обозначают $y = \operatorname{arcctg} x$.

Арккотангенсом числа x, $x \in \mathbf{R}$, называется такое число y (угол в радианах), $y \in (0, \pi)$, котангенс которого равен числу x:

$$\operatorname{ctg} x = y.$$

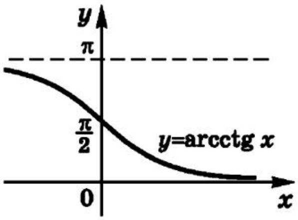


Рис. 6.16

Свойства функции $\operatorname{arcctg} x$:

1) $D(\operatorname{arcctg} x) = \mathbf{R}$;
2) $E(\operatorname{arcctg} x) = (0, \pi)$;
3) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$, где $x \in \mathbf{R}$;
4) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$, где $x \in (0, \pi)$;
5) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ изображен на рис. 6.16.

Формулы для обратных тригонометрических функций. Для обратных тригонометрических функций верны следующие формулы:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \le 1,$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad |x| \le 1,$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad |x| \le 1,$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1,$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad |x| \le 1,\ x \ne 0,$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad |x| \le 1,\ x \ne 0,$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \ne 0,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\arccos x\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1,$$

$$\arcsin x = \begin{cases} -\arccos\sqrt{1-x^2}, & -1 \le x \le 0, \\ \arccos\sqrt{1-x^2}, & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

$$\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1,$$

$$\arccos x = \begin{cases} \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}, & -1 \le x < 0, \\ \arcsin\sqrt{1-x^2}, & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

$$\arccos x = \begin{cases} \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & -1 \le x < 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \le 1, \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} -\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x < 0, \\ \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

6.5. Тригонометрические уравнения

Простейшие тригонометрические уравнения. 1. Уравнение

$$\sin x = a. \tag{6.6}$$

Если $|a| > 1$, то уравнение (6.6) решений не имеет; если $|a| \leq 1$, то имеет решение, которое находят по формуле

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}.$$

Частные случаи уравнения (6.6):

уравнение $\sin x = -1$, его решение: $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$;

уравнение $\sin x = 0$, его решение: $x = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$;

уравнение $\sin x = 1$, его решение: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$.

2. Уравнение

$$\cos x = a. \tag{6.7}$$

Если $|a| > 1$, то уравнение (6.7) решений не имеет; если $|a| \leq 1$, то имеет решение, которое находят по формуле

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Частные случаи уравнения (6.7):

уравнение $\cos x = -1$, его решение: $x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$;

уравнение $\cos x = 0$, его решение: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$;

уравнение $\cos x = 1$, его решение: $x = 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$.

3. Уравнение

$$\operatorname{tg} x = a, a \in \mathbf{R}. \qquad (6.8)$$

Решение уравнения (6.8) находят по формуле

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

4. Уравнение

$$\operatorname{ctg} x = a, \quad a \in \mathbf{R}. \qquad (6.9)$$

Решение уравнения (6.9) находят по формуле

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Уравнения, решаемые разложением на множители. Метод разложения на множители – один из наиболее широко применяемых методов решения тригонометрических уравнений. Используя этот метод, уравнение преобразуют к следующему виду: в левой части – произведение тригонометрических функций, в правой – нуль.

Методом разложения на множители можно решать (используя формулы (6.3)), в частности, уравнения:

$$\sin(ax+\alpha) = \sin(bx+\beta), \quad \cos(ax+\alpha) = \cos(bx+\beta),$$
$$\sin(ax+\alpha) = \cos(bx+\beta), \quad \operatorname{tg}(ax+\alpha) = \operatorname{tg}(bx+\beta),$$
$$\operatorname{ctg}(ax+\alpha) = \operatorname{ctg}(bx+\beta), \quad \operatorname{tg}(ax+\alpha) = \operatorname{ctg}(bx+\beta)$$

при любых значениях $a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Уравнения, решаемые с помощью формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму. В некоторых случаях целесообразно преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму с целью уничтожения слагаемых. Для этого применяют формулы (6.4).

Например, для решения уравнения

$$\sin 3x \sin 9x = \sin 5x \sin 7x$$

используем первую из формул (6.4). Уравнение преобразуется к виду

$$\frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 12x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 12x),$$

т.е. $\cos 6x = \cos 2x$ или $\cos 6x - \cos 2x = 0$.

Преобразуем полученную разность функций в произведение по четвертой из формул (6.3):

$$-2\sin 4x \sin 2x = 0.$$

Решение уравнения сводится к решению совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0, \\ \sin 2x = 0. \end{array}\right.$$

Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\pi}{4}n, \ \ n \in \mathbf{Z}, \\ x_2 = \dfrac{\pi}{2}k, \ \ k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Поскольку множество решений x_2 включено во множество решений x_1, то в ответе получаем: $x = \frac{\pi}{4}n, n \in \mathbf{Z}$.

Уравнения, решаемые с помощью замены переменной. После замены тригонометрической функции (или выражения) новой переменной уравнение может быть сведено, в частности, к некоторому алгебраическому.

1. Тригонометрические уравнения

$$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0 \quad (a \neq 0), \tag{6.10}$$

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0 \quad (a \neq 0) \tag{6.11}$$

сводятся к квадратным уравнениям заменой $\sin x = t$ и $\cos x = t$ соответственно.

Уравнение $a\sin^2 x + b\cos x + c = 0$ $(a \neq 0)$ сводится к уравнению (6.11), если использовать равенство $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, а уравнение $a\cos^2 x + b\sin x + c = 0$ $(a \neq 0)$ – к уравнению (6.10), если учесть, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

2. Уравнение

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x + \ldots + a_{n-1} \sin x + a_n = 0 \tag{6.12}$$

заменой $\sin x = t$ сводится к алгебраическому уравнению

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} t + a_n = 0. \tag{6.13}$$

К уравнению (6.13) сводятся также уравнения, аналогичные (6.12), содержащие вместо $\sin x$ функции $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

3. Если левая часть тригонометрического уравнения $F(x)=0$ может быть выражена через $\sin x+\cos x$ и $\sin 2x$, то целесообразно применить замену переменной по формулам

$$\sin x+\cos x=t, \quad \sin 2x=t^2-1.$$

С помощью этой замены уравнение

$$a(\sin x+\cos x)+b\sin 2x+c=0$$

сводится к квадратному уравнению относительно t:

$$bt^2+at+(c-b)=0.$$

Однородные тригонометрические уравнения. *Однородным уравнением n-й степени* относительно $\sin\alpha x$ и $\cos\alpha x$, $\alpha\in\mathbf{R}$, называется уравнение вида

$$c_n\sin^n\alpha x+c_{n-1}\sin^{n-1}\alpha x\cos\alpha x+\ldots+$$
$$+c_1\sin\alpha x\cos^{n-1}\alpha x+c_0\cos^n\alpha x=0, \qquad (6.14)$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_n$ – действительные числа; $n\geq 1$; $n\in\mathbf{N}$.

В уравнении (6.14) выполняется условие $\cos\alpha x\neq 0$, так как при $\cos\alpha x=0$ исходное уравнение примет вид $c_n\sin^n\alpha x=0$, откуда $\sin\alpha x=0$, что невозможно, поскольку $\sin\alpha x$ и $\cos\alpha x$ не могут вместе равняться нулю для одного и того же аргумента.

Разделив исходное уравнение на $\cos^n\alpha x$, получим:

$$c_n\operatorname{tg}^n\alpha x+c_{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}\alpha x+\ldots+c_1\operatorname{tg}\alpha x+c_0=0.$$

С помощью замены $\operatorname{tg}\alpha x=t$ последнее уравнение сводится к алгебраическому уравнению

$$c_nt^n+c_{n-1}t^{n-1}+\ldots+c_1t+c_0=0,$$

после решения которого возвращаются к старой переменной.

К простейшим однородным уравнениям относятся *однородное уравнение 1-й степени*

$$a\sin\alpha x+b\cos\alpha x=0 \quad (a,b\in\mathbf{R}, \quad a,b\neq 0),$$

которое после деления на $\cos\alpha x$ сводится к уравнению $a\operatorname{tg}\alpha x + b = 0$, и *однородное уравнение 2-й степени*

$$a\sin^2\alpha x + b\sin\alpha x\cos\alpha x + c\cos^2\alpha x = 0, \qquad (6.15)$$

где $(a, b, c \in \mathbf{R},\quad a, c \neq 0$.

После деления на $\cos^2\alpha x$ уравнение (6.15) сводится к уравнению $a\operatorname{tg}^2\alpha x + b\operatorname{tg}\alpha x + c = 0$.

Неоднородные тригонометрические уравнения. *Неоднородным уравнением 2-й степени* называется уравнение вида

$$a\sin^2\alpha x + b\sin\alpha x\cos\alpha x + c\cos^2\alpha x = d \quad (d \neq 0).$$

Используя основное тригонометрическое тождество, это уравнение приводят к однородному уравнению

$$a\sin^2\alpha x + b\sin\alpha x\cos\alpha x + c\cos^2\alpha x = d(\cos^2\alpha x + \sin^2\alpha x),$$

которое решают далее, как уравнение (6.14).

Неоднородным уравнением 1-й степени называется уравнение вида

$$a\sin\alpha x + b\cos\alpha x = c \quad (a, b, c \neq 0). \qquad (6.16)$$

Оно решается разными способами.

Первый способ. Используют формулы двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество. Уравнение (6.16) сведется к виду

$$2a\sin\frac{\alpha x}{2}\cos\frac{\alpha x}{2} + b\left(\cos^2\frac{\alpha x}{2} - \sin^2\frac{\alpha x}{2}\right) = c\left(\sin^2\frac{\alpha x}{2} + \cos^2\frac{\alpha x}{2}\right).$$

После приведения подобных будет получено однородное уравнение 2-й степени (6.15).

Второй способ. Используют *метод введения вспомогательного аргумента,* который состоит в следующем. Разделив обе части уравнения (6.16) на $\sqrt{a^2 + b^2}$, получают:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin\alpha x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos\alpha x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Так как

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1,$$

то существует такой угол φ, что

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{cases} \tag{6.17}$$

Исходное уравнение принимает вид

$$\sin\alpha x\cos\varphi+\cos\alpha x\sin\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

т.е.

$$\sin(\alpha x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Если $c\le\sqrt{a^2+b^2}$, то последнее уравнение имеет решение. Угол φ находят из условий (6.17).

Уравнения, решаемые по формулам понижения степени. Если левая часть уравнения $F(x)=0$ выражается через $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, то возможно использование формул понижения степени (6.1), которые сводят уравнение к зависимости только от $\cos 2x$. Далее решают в соответствии с типом полученного уравнения.

Уравнения, решаемые методом универсальной подстановки. Тригонометрическое уравнение, рациональное относительно $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, может быть сведено к рациональному уравнению с помощью формул универсальной подстановки (6.5). Следует отметить, что применение этих формул может привести к сужению ОДЗ исходного уравнения, поскольку $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ не определен в точках $x=\pi+2\pi n$, где $n\in\mathbf{Z}$. Поэтому надо проверять (путем подстановки в заданное уравнение), являются ли значения $x=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, его решением.

Уравнения, решаемые функциональным методом. Если при решении тригонометрического уравнения $f(x)=g(x)$ удалось установить, что для всех допустимых значений переменной выполняется $f(x)\le a$ и $g(x)\ge a$ (a – константа), то данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a. \end{cases}$$

Замечание. При решении уравнений, содержащих тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, надо помнить, что $-1\le\sin x\le 1$ и $-1\le\cos x\le 1$.

6.6. Простейшие тригонометрические неравенства

К простейшим тригонометрическим неравенствам относятся неравенства:

$$\sin x>a,\quad \cos x>a,\quad \operatorname{tg} x>a,\quad \operatorname{ctg} x>a, \tag{6.18}$$

$$\sin x<a,\quad \cos x<a,\quad \operatorname{tg} x<a,\quad \operatorname{ctg} x<a, \tag{6.19}$$

$$\sin x\ge a,\quad \cos x\ge a,\quad \operatorname{tg} x\ge a,\quad \operatorname{ctg} x\ge a, \tag{6.20}$$

$$\sin x\le a,\quad \cos x\le a,\quad \operatorname{tg} x\le a,\quad \operatorname{ctg} x\le a. \tag{6.21}$$

Решение простейших тригонометрических неравенств получают с помощью единичной окружности. Для этого строят единичную окружность, а затем «граничные» углы, соответствующие равенству в заданном неравенстве (т.е. в случае замены знака неравенства на знак равенства). Если неравенство строгое, то «граничные» углы показывают штриховыми радиусами-векторами. Исходя из смысла неравенства определяют множество углов, которые являются решением. Для нестрогих неравенств (6.20) в случае $a>0$ (решения изображены на рис. 6.17 – 6.20 соответственно) множество углов-решений показано штриховкой.

Решением нестрогих неравенств (6.21) является множество углов, соответствующих незаштрихованной части единичного круга (на рис. 6.17–6.20 соответственно) вместе с «граничными» углами. При этом следует учитывать, что для неравенств, содержащих $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, не включаются концы промежутка, которые не входят в ОДЗ этих функций. Множества решений неравенств (6.20) и (6.21) приведены в табл. 6.4, где $n\in\mathbf{Z}$.

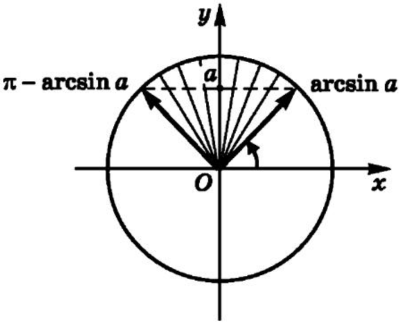


Рис. 6.17

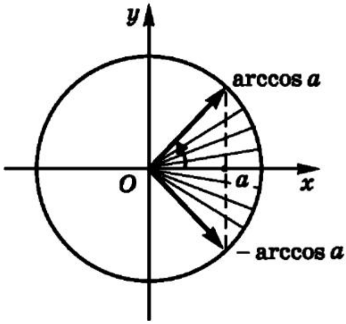


Рис. 6.18

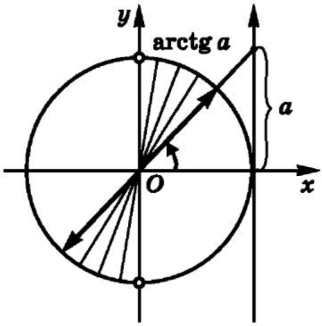


Рис. 6.19

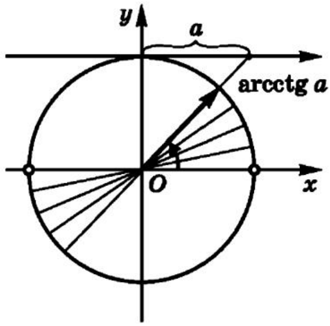


Рис. 6.20

Таблица 6.4

Неравенство	Множество решений неравенства
$\sin x \ge a$ $(\lvert a\rvert < 1)$ $\sin x \le a$ $(\lvert a\rvert < 1)$	$x \in [\arcsin a + 2\pi n,\ \pi - \arcsin a + 2\pi n]$ $x \in [-\pi - \arcsin a + 2\pi n,\ \arcsin a + 2\pi n]$
$\cos x \ge a$ $(\lvert a\rvert < 1)$ $\cos x \le a$ $(\lvert a\rvert < 1)$	$x \in [-\arccos a + 2\pi n,\ \arccos a + 2\pi n]$ $x \in [\arccos a + 2\pi n,\ 2\pi - \arccos a + 2\pi n]$
$\operatorname{tg} x \ge a$ $\operatorname{tg} x \le a$	$x \in \left[\operatorname{arctg} a + \pi n,\ \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$ $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \operatorname{arctg} a + \pi n\right]$

Неравенство	Множество решений неравенства
$\operatorname{ctg} x \geq a$	$x \in (\pi n, \operatorname{arcctg} a + \pi n]$
$\operatorname{ctg} x \leq a$	$x \in [\operatorname{arcctg} a + \pi n, \pi(n+1))$

В случае строгих неравенств (6.18) и (6.19) соответствующие решениям промежутки (представленные в табл. 6.4) являются интервалами, т.е. без «граничных» углов.

Если задано тригонометрическое неравенство, которое не является простейшим, то сначала решают его в зависимости от типа (в частности, разложением на множители, заменой переменной), а затем решают полученные простейшие неравенства.

7
ПЛАНИМЕТРИЯ

7.1. Базовые понятия

Общие сведения. *Геометрия* – наука (раздел математики) о геометрических фигурах, их свойствах, преобразованиях и отношениях.

Планиметрия – раздел геометрии, в котором изучаются плоские геометрические фигуры, т.е. фигуры, все точки которых принадлежат одной плоскости.

В основе геометрии лежит совокупность понятий, аксиом и теорем. Понятия делятся на неопределяемые (первичные) и определяемые.

Неопределяемые понятия – это понятия, которым не дается строгое определение, их смысл считается ясным, основанным на повседневном опыте. Основные неопределяемые понятия: *точка* (обычно обозначается A, B, C, ...), *прямая* (обозначается a, b, c, ...), *плоскость* (обозначается α, β, γ, ...), *принадлежность* и др.

Определяемое понятие – это понятие, которому дается строгое определение. *Определение* – это утверждение, раскрывающее суть какого-либо понятия. Каждое определение опирается либо непосредственно на первичные понятия, либо на уже определенные.

Аксиома – утверждение о свойствах простейших фигур, которые считаются очевидными. Его принимают «на веру», без обоснования.

Аксиомы принадлежности (для планиметрии):

1) через любые две различные точки на плоскости можно провести прямую, притом только одну;

2) всякой прямой принадлежат по крайней мере две точки;

3) существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

Аксиомы порядка (аксиомы этой группы соответствуют понятию «между», которое описывает отношение порядка):

1) если из трех точек одна лежит между двумя другими, то все три данные точки лежат на одной прямой;

2) для любых двух точек существует третья, которая лежит между данными точками;

3) из любых трех точек одной прямой только одна лежит между двумя другими.

Приведенные аксиомы являются частью системы аксиом, лежащей в основе *евклидовой геометрии* (некоторые другие аксиомы см. ниже).

Если в основе построения геометрической теории лежит иная система аксиом, то это *неевклидова геометрия*.

Луч, отрезок, интервал. *Лучом* называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной ее точки, называемой *начальной точкой луча*, включая эту точку. Луч без начальной точки называется *открытым лучом* или *полупрямой*. *Дополнительными лучами* называются различные лучи одной и той же прямой, имеющие общую начальную точку.

Часть прямой, лежащая между двумя ее точками и вместе с этими точками, называется *отрезком*, а указанные две точки – *концами отрезка*. *Внутренними точками отрезка* называются точки, лежащие между его концами.

Аксиома о существовании длины. Каждый отрезок имеет определенную длину, бо́льшую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой своей точкой.

Длина – это численная характеристика отрезка. Она зависит от выбора единичного отрезка (единицы измерения).

Аксиома Архимеда. На любом луче от его начальной точки можно отложить отрезок любой заданной длины, причем только один. Всякий отрезок можно покрыть меньшим по длине отрезком, откладывая его на первом отрезке достаточное число раз.

Длина отрезка AB обозначается $|AB|$ или AB. Из условия обычно ясно, идет речь об отрезке как геометрическом месте точек или о его длине AB. Отрезки называются равными, если их длины равны.

Расстоянием между двумя заданными точками называется длина отрезка с концами в этих точках. Если точки совпадают, то расстояние принимают за 0.

Углы на плоскости. *Углом* называется геометрическая фигура, состоящая из двух лучей, выходящих из одной точки. Общее начало двух лучей называется *вершиной угла*. Лучи, выходящие из вершины, называются *сторонами угла*. Для обозначения угла используют символ $\angle$. Угол обозначают указанием либо его вершины (например, $\angle A$), либо трех точек – вершины и по одной точке на каждой стороне угла (например, $\angle BAC$ на рис. 7.1).

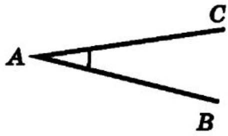


Рис. 7.1

Градусную и радианную меру угла называют *величиной угла* (см. § 6.1).

Два угла называются *равными*, если их градусные (радианные) меры равны.

Два угла называются *смежными*, если у них вершина и одна сторона общие, а две другие стороны составляют прямую линию ($\angle BAC$ и $\angle CAD$ на рис. 7.2).

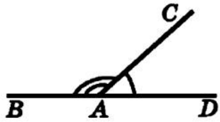


Рис. 7.2

Развернутым углом называется угол, стороны которого составляют прямую линию ($\angle BAD$ на рис. 7.2).

Нулевой и *полный углы* – это углы, у которых образующие их лучи совпадают. Для размежевания этих углов дается дополнительное разъяснение.

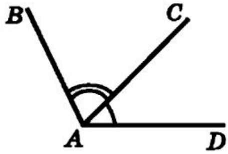


Рис. 7.3

Прилежащие углы – это углы, имеющие общую вершину и общую сторону ($\angle BAC$ и $\angle CAD$ на рис. 7.3).

Углы, у которых стороны одного являются продолжением за вершину сторон другого, называются *вертикальными* ($\angle BAC$ и $\angle DAE$; $\angle BAD$ и $\angle CAE$ на рис. 7.4). Вертикальные углы равны.

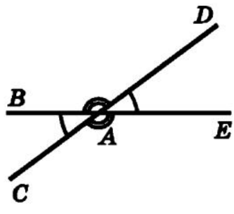


Рис. 7.4

Угол, равный смежному с ним углу, называется *прямым*. *Острый угол* – это угол меньше прямого, *тупой* – угол больше прямого.

Биссектрисой угла называется луч с началом в вершине угла, делящий угол на два равных угла. Каждая точка биссектрисы равноудалена от сторон угла.

Развернутый угол равен 180°, или π. Прямой угол равен 90°, или $\frac{\pi}{2}$. Полный угол равен 360°, или 2π. Сумма смежных углов равна 180°.

Перпендикуляр и наклонная. Две прямые называются *пересекающимися*, если они имеют одну и только одну общую точку.

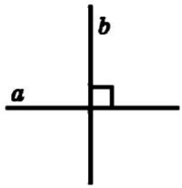


Рис. 7.5

Взаимно перпендикулярными прямыми называются прямые, при пересечении которых образуются прямые углы ($a \perp b$ на рис. 7.5).

Через любую точку плоскости можно провести прямую, перпендикулярную данной прямой, и притом только одну.

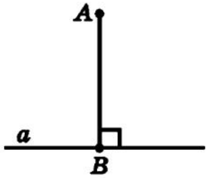


Рис. 7.6

Перпендикуляром к данной прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной данной, одним из концов которого является точка пересечения этих прямых ($AB \perp a$ на рис. 7.6). Этот конец называется *основанием перпендикуляра*.

Расстоянием от точки A до прямой a называется длина перпендикуляра AB к прямой a, проведенного через точку A (рис. 7.6).

Свойства перпендикуляра:

1) из любой точки плоскости вне прямой можно опустить перпендикуляр на данную прямую, и притом только один;

2) из любой точки прямой можно провести перпендикуляр к данной прямой, и притом только один.

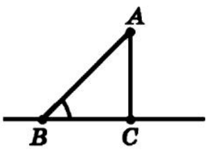


Рис. 7.7

Наклонной к данной прямой называется отрезок, соединяющий какую-либо точку A плоскости с точкой B прямой и не являющийся перпендикуляром к этой прямой (рис. 7.7). Точка B называется *основанием наклонной*. Если AC – перпендикуляр, проведенный из точки A на данную прямую, то отрезок BC называется *проекцией наклонной на прямую* (рис. 7.7).

Свойства наклонных:

1) длина наклонной, проведенной из данной точки к прямой, больше длины перпендикуляра, проведенного из той же точки на эту прямую;

2) равные наклонные, проведенные из одной точки к одной прямой, имеют равные проекции;

3) из двух наклонных, выходящих из одной точки, больше та, у которой проекция больше.

Прямая, проходящая через середину отрезка перпендикулярно ему, называется *серединным перпендикуляром* к отрезку. Точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку тогда и только тогда, когда она равноудалена от концов этого отрезка.

Свойство углов со взаимно перпендикулярными сторонами: если стороны одного угла соответственно перпендикулярны сторонам другого, то такие углы или равны, или составляют в сумме 180°.

Параллельные прямые. Две различные прямые, которые лежат в одной плоскости и не имеют ни одной общей точки, называются *параллельными*. Если прямая a параллельна прямой b, то пишут: $a \| b$.

Аксиома Евклида о параллельных прямых. На плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, не пересекающуюся с данной прямой.

Расстоянием между параллельными прямыми называется расстояние от какой-либо точки одной прямой до другой прямой.

Свойства параллельных прямых:

1) если прямая a параллельна прямой b, то и прямая b параллельна прямой a;

2) если прямая a параллельна прямой b, а прямая b – прямой c, то и прямая a параллельна прямой c;

3) расстояния от всех точек данной прямой до прямой, параллельной ей, равны;

4) если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую;

5) если две различные прямые параллельны третьей, то они параллельны;

6) если две различные прямые перпендикулярны третьей прямой, то они параллельны;

7) если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой;

8) отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными прямыми, равны;

9) если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого, то такие углы или равны, или составляют в сумме 180°.

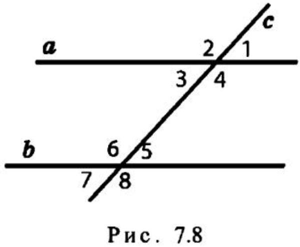


Рис. 7.8

Углы, образованные при пересечении двух прямых a и b секущей c (рис. 7.8):

$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$, $\angle 4$ и $\angle 8$ – пары *соответственных углов*;

$\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$ – пары *внешних односторонних углов*;

$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$ – пары *внутренних односторонних углов*;

$\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$ – пары *внутренних накрест лежащих углов*;

$\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$ – пары *внешних накрест лежащих углов*.

***Признаки параллельности прямых*:**

1) если при пересечении двух прямых a и b секущей c внутренние накрест лежащие углы равны (например, $\angle 3 = \angle 5$), то прямые a и b параллельны (рис. 7.8);

2) если при пересечении двух прямых a и b секущей c соответственные углы равны (например, $\angle 1 = \angle 5$), то прямые a и b параллельны (рис. 7.8);

3) если при пересечении двух прямых a и b секущей c сумма внутренних односторонних углов равна 180° (например, $\angle 4 + \angle 5 = 180°$), то прямые параллельны (рис. 7.8).

Теорема Фалеса. Если параллельные прямые, пересекающие две данные прямые, отсекают на одной прямой равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой прямой (рис. 7.9).

Обобщенная теорема Фалеса. Параллельные прямые, пересекающие две данные прямые, отсекают на этих двух прямых пропорциональные отрезки, т.е. $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1D_1}{CD}$ (рис. 7.10).

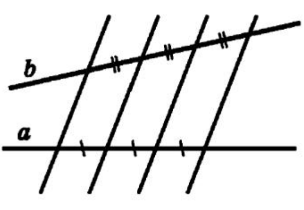


Рис. 7.9

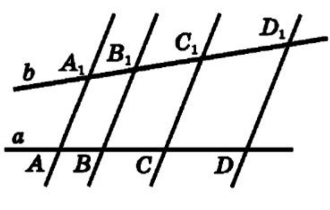


Рис. 7.10

7.2. Многоугольники и окружность

Многоугольники. Совокупность последовательно соединенных отрезков A_1A_2, A_2A_3, … , $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 (соседние отрезки имеют общий конец и не лежат на одной прямой) на плоскости называется *замкнутой простой ломаной* при условии, что, кроме точек соединения (концов), эти отрезки не имеют других общих точек.

Замкнутая простая ломаная называется *многоугольником*, отрезки ломаной – *сторонами многоугольника*, их общие точки – *вершинами*. Число вершин многоугольника равно числу его сторон. *Смежными вершинами многоугольника* называются две его вершины, являющиеся концами одной стороны, а *смежными сторонами* – две его стороны, имеющие общую вершину.

Многоугольник называется *выпуклым* (рис. 7.11), если при продолжении любой из его сторон весь многоугольник лежит по одну сторону от этой прямой. В противном случае он называется *невыпуклым* (рис. 7.12).

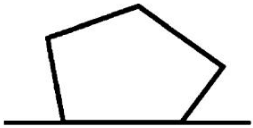


Рис. 7.11

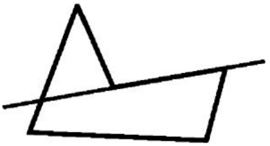


Рис. 7.12

Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равняется $180°(n-2)$.

Сумма всех сторон (длин сторон) многоугольника называется его *периметром*.

Отрезок, соединяющий две не соседние вершины многоугольника (а также его длина), называется *диагональю*. Выпуклый многоугольник имеет $\frac{1}{2}n(n-3)$ диагоналей.

Равными называются такие многоугольники, у которых все соответствующие углы и все соответствующие стороны равны, а *подобными* – многоугольники, у которых соответствующие стороны пропорциональны, а все соответствующие углы равны. Периметры подобных многоугольников относятся как сходные стороны.

Плоским многоугольником (*многоугольником*) называется ограниченная часть плоскости вместе с границей, которой является замкнутая простая линия.

Площадью многоугольника называется числовая характеристика, которая ставится в соответствие плоскому многоугольнику и обладает следующими свойствами:

1) площадь положительна;

2) если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, не имеющих общих внутренних точек, то его площадь равна сумме площадей составляющих его многоугольников;

3) равные многоугольники имеют равные площади;

4) площадь квадрата со стороной, равной единице измерения, равна единице.

Многоугольники с равными площадями называются *равновеликими.*

Площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходных сторон.

Окружность и круг. *Окружностью* называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки плоскости, называемой *центром окружности* (рис. 7.13).

Окружность разбивает плоскость на две области: внутреннюю, содержащую центр, и внешнюю. Область, содержащая центр C, вместе со своей границей (окружностью) называется *кругом* (рис. 7.13).

Радиусом окружности (*круга*) называется отрезок, соединяющий центр окружности с любой ее точкой (а также его длина). Обычно радиус обозначают R или r.

Отрезок, соединяющий две любые точки окружности (а также его длина), называется *хордой.* Хорда, проходящая через центр окружности (круга), называется *диаметром* (обозначается d или D): $D = 2R$.

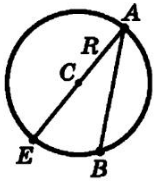


Рис. 7.13

На рис. 7.13 точка C – центр, AC – радиус, AB – хорда, AE – диаметр.

Свойства хорд:

1) диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен этой хорде (если она не диаметр);

2) хорды равны тогда и только тогда, когда они равноудалены от центра окружности;

3) бóльшая хорда расположена ближе к центру окружности; из двух хорд большей будет та, которая ближе к центру;

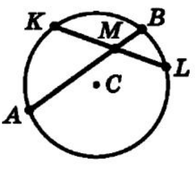


Рис. 7.14

4) если две хорды пересекаются, то попарные произведения их отрезков равны (на рис. 7.14 это $AM \cdot MB = KM \cdot ML$).

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется *касательной* к этой окружности. Прямая, имеющая с окружностью две общие точки, называется *секущей*.

Прямая является касательной к окружности тогда и только тогда, когда эта прямая перпендикулярна радиусу окружности, проведенному в точку касания.

Через каждую точку плоскости, лежащую вне круга, можно провести в точности две касательные к окружности, которая ограничивает данный круг (рис. 7.15).

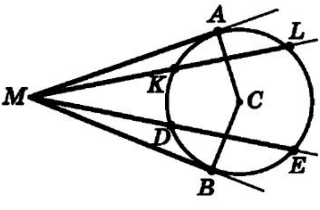


Рис. 7.15

Если MA и MB – отрезки касательных до точек касания, ML, ME – секущие, то справедливы равенства:

$$MA = MB, \qquad MA^2 = ML \cdot MK, \qquad ML \cdot MK = ME \cdot MD.$$

Окружность называется *описанной около многоугольника*, если все вершины многоугольника лежат на окружности. Многоугольник в таком случае называется *вписанным в окружность*.

Окружность называется *вписанной в многоугольник*, если все стороны многоугольника касаются окружности. Многоугольник в таком случае называется *описанным около окружности*.

Не во всякий многоугольник можно вписать окружность, и не около всякого многоугольника можно описать окружность.

Во всякий правильный многоугольник можно вписать окружность и описать около него, причем центры этих окружностей совпадают.

Для многоугольников (понимаемых как плоские) аналогично даются приведенные ниже определения.

Круг называется *описанным около многоугольника*, если все вершины многоугольника лежат на окружности, ограничивающей данный круг, а многоугольник называется *вписанным в круг*.

Круг называется *вписанным в многоугольник*, если все стороны многоугольника касаются окружности, ограничивающей данный круг, а многоугольник называется *описанным около круга*.

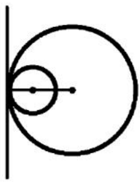


Рис. 7.16

Две окружности называются *касающимися друг друга*, если они имеют только одну общую точку. Касание окружностей называется *внутренним*, если центры окружностей лежат по одну сторону от их общей касательной (рис. 7.16), и *внешним* – если по разные стороны (рис. 7.17).

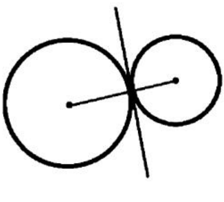


Рис. 7.17

Окружности называются *концентрическими*, если они имеют общий центр (рис. 7.18).

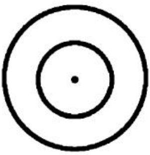


Рис. 7.18

Дугой окружности называется часть окружности, заключенная между двумя ее фиксированными точками. Любые две точки окружности делят окружность на две дуги (рис. 7.19).

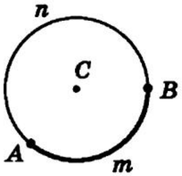


Рис. 7.19

Если A, B – концевые точки дуги и ясно, о какой дуге идет речь, то пишут: $\smile{AB}$. Если необходимо уточнить, какая именно дуга рассматривается, то обозначают $\smile{AmB}$ или $\smile{AnB}$ (рис. 7.19).

Дуга окружности, имеющая в качестве концевых точек концы диаметра, называется *полуокружностью*.

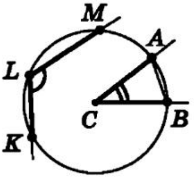


Рис. 7.20

Центральные и вписанные углы. Угол с вершиной в центре окружности называется *центральным углом* окружности ($\angle ACB$ на рис. 7.20).

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется *вписанным* ($\angle KLM$ на рис. 7.20).

Центральный угол (меньше развернутого) опирается на определенную дугу окружности, меньшую, чем полуокружность ($\angle ACB$ опирается на $\smile{AB}$ на рис. 7.20).

Дуга измеряется в градусах (минутах, секундах). Ее величина равна величине соответствующего центрального угла. Полуокружность равна 180°.

Две дуги окружности равны тогда и только тогда, когда равны соответствующие им центральные углы.

Большему центральному углу соответствует бóльшая дуга, а большей дуге – больший центральный угол.

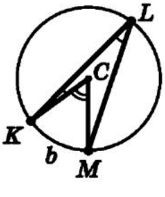


Рис. 7.21

Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла (рис. 7.21):

$$\angle KLM = \frac{1}{2}\angle KCM.$$

Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается (рис. 7.21):

$$\angle KLM = \frac{1}{2}\overset{\smile}{KbM}.$$

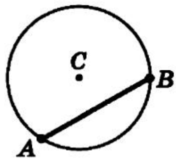


Рис. 7.22

Дуги, хорды и углы, связанные с окружностью. Если хорда AB не совпадает с диаметром окружности, то говорят, что *хорда* AB *стягивает дугу* AB при условии $\overset{\smile}{AB} < 180°$ (рис. 7.22).

Соотношения хорд и стягиваемых ими дуг:

1) дуги равны тогда и только тогда, когда стягиваются равными хордами;

2) длина хорды всегда меньше длины стягиваемой ею дуги;

3) диаметр, перпендикулярный хорде, делит стягиваемую хордой дугу пополам;

4) дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.

Угол, образованный двумя касательными к окружности, проведенными из некоторой точки M, называется *описанным углом* (рис. 7.23). Величину этого угла находят по формуле

$$\angle AMB = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AmB} - \overset{\smile}{AnB}).$$

Величину угла, образованного двумя секущими MB и MB_1, проведенными из некоторой точки M (рис. 7.24), определяют по формуле

$$\angle BMB_1 = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{BmB_1} - \overset{\smile}{AnA_1}).$$

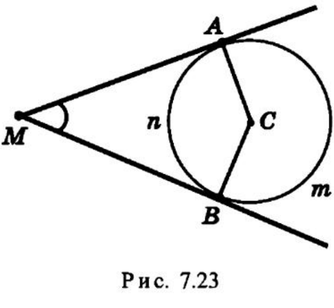


Рис. 7.23

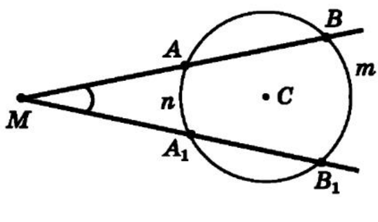


Рис. 7.24

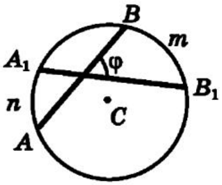


Рис. 7.25

Величину угла φ, образованного двумя хордами AB и A_1B_1 окружности (рис. 7.25), находят по формуле

$$\varphi = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{BmB_1} + \overset{\smile}{AnA_1}).$$

Длина окружности и ее дуги. Площадь круга, сектора, сегмента. *Длиной окружности* называется предел последовательности периметров правильных многоугольников, вписанных в эту окружность (описанных около нее), если количество n сторон многоугольника неограниченно возрастает ($n \to \infty$) (о понятии предела последовательности см. § 12.1).

Если R – радиус окружности, то ее длина

$$L = 2\pi R,$$

а *длина дуги* в $\alpha°$

$$l = \frac{\pi R\alpha}{180}.$$

Площадью круга называется предел последовательности площадей правильных многоугольников, вписанных в эту окружность (описанных около нее), если количество n сторон многоугольника неограниченно возрастает ($n \to \infty$).

Если R – радиус круга, то его площадь

$$S = \pi R^2.$$

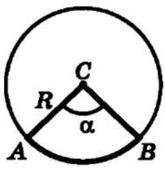


Рис. 7.26

Сектором называется часть круга, ограниченная двумя его радиусами (рис. 7.26).

Если R – радиус круга, α – градусная мера соответствующего угла, то площадь сектора, ограниченного дугой в $\alpha°$,

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2\alpha}{360}.$$

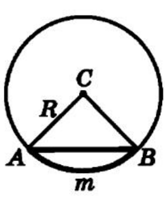


Рис. 7.27

Сегментом называется часть круга, ограниченная хордой и стягиваемой ею дугой (рис. 7.27).

Площадь сегмента с дугой AmB находят как разность площади сектора ACB и площади треугольника ACB.

Уравнения прямой и окружности. Уравнение прямой:

$$ax + by + c = 0,$$

где $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Если $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ – прямые, то они:

1) пересекаются при условии $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$;

2) параллельны при $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$;

3) совпадают при $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Прямые взаимно перпендикулярны, если

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Уравнение окружности радиусом R с центром в точке (a, b) имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

В частности, уравнение

$$x^2 + y^2 = R^2$$

является уравнением окружности радиуса R с центром в точке $O(0,0)$.

7.3. Треугольник

Первичные сведения о треугольнике. *Треугольником* называется многоугольник с тремя сторонами (рис. 7.28).

Треугольник имеет три стороны, три вершины и три угла (внутренних).

Треугольник называется *тупоугольным*, *остроугольным* или *прямоугольным*, если его наибольший внутренний угол соответственно больше, меньше или равен 90°.

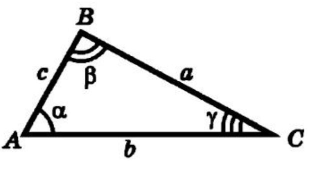


Рис. 7.28

Для существования треугольника, имеющего данные стороны, необходимо и достаточно, чтобы сумма длин двух любых его сторон была больше длины третьей стороны (например, $c < a + b$). Каждая сторона треугольника больше модуля разности двух других сторон (например, $c > |a - b|$).

В произвольном треугольнике против большей стороны лежит больший угол, против большего угла – бóльшая сторона, против равных сторон – равные углы, против равных углов – равные стороны.

Сумма углов треугольника равна $180°$.

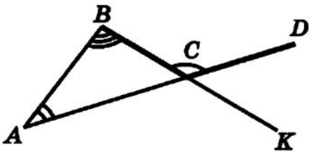


Рис. 7.29

Внешним углом треугольника при вершине называется угол, смежный с внутренним углом при этой вершине (на рис. 7.29 $\angle BCD$ и $\angle ACK$ – внешние углы при вершине C).

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним ($\angle BCD = \angle BAC + \angle ABC$, рис. 7.29).

Треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны равны. Равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона – *основанием*.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Треугольник, все стороны которого равны, называется *равносторонним* (*правильным*). В равностороннем треугольнике все углы равны $60°$.

Линии в треугольнике. Отрезок прямой, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется *средней линией*.

Свойства средней линии:

1) средняя линия треугольника параллельна его третьей стороне и равна ее половине;

2) средняя линия отсекает от треугольника подобный ему треугольник;

3) три средние линии разбивают треугольник на четыре равных треугольника.

Отрезок прямой, соединяющий середину стороны треугольника с противоположной ей вершиной, называется *медианой*.

Свойства медианы:

1) все три медианы пересекаются в одной точке, которая лежит внутри треугольника, и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины;

2) каждая из медиан треугольника делит его на два треугольника равных площадей (два равновеликих треугольника);

3) три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.

Если a, b, c – стороны треугольника, то длина медианы, проведенной к стороне a,

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

а для трех медиан верна формула

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника от его вершины до точки пересечения с противолежащей стороной называется *биссектрисой треугольника.*

Свойства биссектрисы:

1) все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке – центре окружности, вписанной в треугольник;

2) биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника: $\frac{c_1}{c_2} = \frac{a}{b}$ (рис. 7.30);

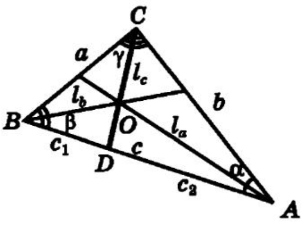


Рис. 7.30

3) биссектриса делит треугольник на два треугольника, площади которых пропорциональны прилежащим к биссектрисе сторонам треугольника (рис. 7.30):

$$\frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{BC}{AC};$$

4) точка пересечения биссектрис делит ее биссектрису части в отношении

$$\frac{CO}{OD} = \frac{a+b}{c};$$

5) биссектрисы внутреннего и смежного с ним внешнего угла треугольника взаимно перпендикулярны.

Длина биссектрисы треугольника, проведенной к стороне c, вычисляется по формулам:

$$l_c = \sqrt{ab - c_1 c_2},$$

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b},$$

$$l_c = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b},$$

где γ – угол при вершине C.

Если c_1, c_2 – длины отрезков, на которые биссектриса делит сторону c, то верны формулы:

$$c_1 = \frac{ac}{a+b}, \quad c_2 = \frac{bc}{a+b}.$$

Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника на противоположную сторону или ее продолжение, называется *высотой треугольника.*

Свойства высоты:

1) высоты треугольника относятся как обратные длины сторон, к которым они соответственно проведены:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c};$$

2) все три высоты треугольника пересекаются в одной точке. Точка пересечения высот называется *ортоцентром треугольника.* В тупоугольном треугольнике эта точка лежит вне треугольника, в остроугольном – внутри, в прямоугольном – совпадает с вершиной прямого угла;

3) высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой;

4) каждая высота равностороннего треугольника является также медианой и биссектрисой. Точка пересечения всех этих линий лежит внутри равностороннего треугольника и называется его *центром.*

Если $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ – *полупериметр треугольника*, то длина высоты треугольника, проведенной к стороне a, вычисляется по формуле

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Высоты связаны с радиусом r вписанной и радиусом R описанной окружностей равенствами:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r},$$

$$h_a = \frac{bc}{2R}, \qquad h_b = \frac{ac}{2R}, \qquad h_c = \frac{ab}{2R}.$$

Серединным перпендикуляром треугольника называется прямая, перпендикулярная его стороне и делящая ее пополам.

Все три серединных перпендикуляра треугольника пересекаются в одной точке – центре окружности, описанной около треугольника.

Метрические соотношения в произвольном треугольнике. К элементам треугольника относят его стороны, углы, биссектрисы, медианы, высоты, радиусы вписанной и описанной окружностей.

Решить треугольник – значит найти неизвестные его элементы по трем известным.

Пусть a, b, c – стороны треугольника, α, β, γ – противолежащие им углы.

Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов (рис. 7.30) с коэффициентом пропорциональности $2R$:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Теорема косинусов. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними (рис. 7.30):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Важнейшие случаи решения треугольников:

1) если даны сторона и прилежащие к ней углы, то сначала находят третий угол, а затем по теореме синусов – неизвестные стороны;

2) если даны две стороны и угол между ними, то сначала по теореме косинусов находят третью сторону, а затем по теореме косинусов или синусов – неизвестные углы;

3) если даны три стороны, то один из углов находят по теореме косинусов, а другие – по теореме косинусов или синусов;

4) если даны две стороны a, b и угол α, противолежащий стороне a, то задача нахождения стороны и остальных углов решается неоднозначно (возможны два решения). Из равенства $\sin\beta = \dfrac{b}{a}\sin\alpha$ (по теореме синусов) находят два угла β – острый и тупой. Далее находят по два различных значения остальных элементов.

Теорема тангенсов:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Теорема о проекциях:

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha.$$

Справедлива формула

$$\sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p – полупериметр треугольника.

Равенство и подобие треугольников. Два треугольника называются *равными*, если они имеют равные соответствующие стороны и углы.

Признаки равенства треугольников:

1) если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны;

2) если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим углам другого треугольника, то такие треугольники равны;

3) если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны;

4) если две стороны и угол, противолежащий большей стороне, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, противолежащему большей стороне, другого треугольника, то такие треугольники равны.

Два треугольника называются *подобными*, если их соответствующие стороны пропорциональны, а соответствующие углы равны.

***Признаки подобия треугольников*:**

1) если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны;

2) если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны;

3) если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Соответствующие линейные элементы (периметры, высоты, медианы, биссектрисы, радиусы вписанной и описанной окружностей) подобных треугольников относятся как соответствующие стороны (с одним и тем же коэффициентом пропорциональности). Площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон.

Окружность, описанная около треугольника и вписанная в треугольник. Окружность называется *описанной около треугольника*, если все вершины треугольника лежат на этой окружности.

Около любого треугольника можно описать единственную окружность.

Центр окружности, описанной около треугольника, находится в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам этого треугольника. Центр лежит внутри треугольника, если треугольник остроугольный, вне треугольника – если тупоугольный, на середине гипотенузы – если прямоугольный.

Радиус окружности, описанной около треугольника, вычисляется по формулам:

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha}, \quad R = \frac{abc}{4S},$$

где α – угол, противолежащий стороне a; S – площадь треугольника.

Для правильного треугольника

$$R=\frac{a\sqrt{3}}{3},$$

где a – сторона этого треугольника.

Для прямоугольного треугольника

$$R=\frac{c}{2},$$

где c – гипотенуза.

Окружность называется *вписанной в треугольник*, если все стороны треугольника касаются окружности. В любой треугольник можно вписать единственную окружность.

Центр окружности, вписанной в треугольник, находится в точке пересечения биссектрис треугольника. Центр окружности, вписанной в треугольник, всегда лежит внутри треугольника.

Радиус окружности, вписанной в треугольник, вычисляется по формуле

$$r=\frac{S}{p},$$

где S – площадь треугольника; p – полупериметр.

Для правильного треугольника

$$r=\frac{a\sqrt{3}}{6},$$

где a – сторона треугольника.

Площадь произвольного треугольника. Пусть a, b, c – стороны треугольника, α, β, γ – углы, противолежащие сторонам a, b, c соответственно, p – полупериметр: $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$, R – радиус описанной окружности, r – радиус вписанной окружности, S – площадь треугольника.

Верны следующие формулы:

$$S=\frac{1}{2}ah_a, \qquad S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

$$S=\frac{abc}{4R}, \qquad S=pr,$$

где h_a – высота треугольника, опущенная на сторону a.

Формула Герона:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Дополнительные формулы для вычисления площади треугольника:

$$S=p(p-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\qquad S=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha},$$

$$S=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,\qquad S=Rr(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma),$$

$$S=p^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},\qquad S=\frac{h_a h_b}{2\sin\gamma},$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{2Rh_a h_b h_c},\qquad S=r^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Справедливы утверждения:

1) отношение площадей треугольников, имеющих одинаковые высоты, равно отношению их оснований (сторон, на которые опущены высоты);

2) отношение площадей треугольников, имеющих одинаковые основания, равно отношению их высот, опущенных на эти основания;

3) площади подобных треугольников относятся как квадраты их соответствующих линейных элементов, т.е. если два треугольника подобны с коэффициентом подобия k, то их площади относятся с коэффициентом k^2.

Прямоугольный треугольник. *Прямоугольным* называется треугольник, у которого есть прямой угол (рис. 7.31).

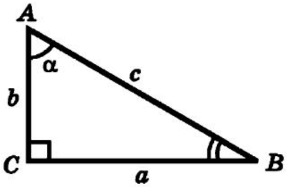


Рис. 7.31

Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*, две другие стороны – *катетами*.

Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, делит этот треугольник на два треугольника, подобных исходному.

Медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

Биссектриса прямого угла лежит между медианой и высотой и делит угол между ними пополам.

***Признаки равенства прямоугольных треугольников*:**

1) если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны;

2) если катет и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равен катету и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны;

3) если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны;

4) если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

***Признаки подобия прямоугольных треугольников*:**

1) если катеты одного прямоугольного треугольника пропорциональны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны;

2) если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны;

3) если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $c^2 = a^2 + b^2$.

Треугольник, стороны которого относятся как $3:4:5$, является прямоугольным.

Справедливы соотношения:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

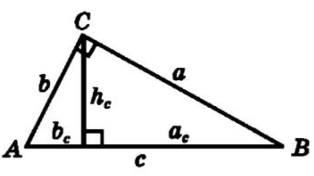


Рис. 7.32

Теорема. Пусть h_c – высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу (рис. 7.32). Тогда:

1) катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией катета на гипотенузу, т.е.

$$\frac{a}{c}=\frac{a_c}{a},\quad \frac{b}{c}=\frac{b_c}{b};$$

2) отношение одного из катетов к гипотенузе равно отношению высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу, к другому катету, т.е.

$$\frac{a}{c}=\frac{h_c}{b} \text{ или } \frac{b}{c}=\frac{h_c}{a};$$

3) высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу, т.е.

$$\frac{h_c}{a_c}=\frac{b_c}{h_c};$$

4) высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, делит гипотенузу в таком отношении, в каком находятся квадраты прилежащих катетов, т.е.

$$\frac{a_c}{b_c}=\frac{a^2}{b^2}.$$

Для медиан m_a и m_b, проведенных из вершин острых углов прямоугольного треугольника, справедливы равенства:

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2+a^2},\quad m_b=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2}.$$

Радиусы вписанной и описанной окружностей связаны со сторонами прямоугольного треугольника формулами:

$$a+b=c+2r,\quad a+b=2(R+r),\quad r=\frac{1}{2}(a+b-c),\quad r=p-c.$$

Площадь прямоугольного треугольника вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}ab.$$

Равнобедренный треугольник. *Равнобедренным* называется треугольник, у которого две стороны равны. Равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона – *основанием треугольника.*

***Признак равнобедренного треугольника*:** если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Свойства равнобедренного треугольника:

1) углы при основании равны;

2) биссектриса, проведенная к основанию, является также медианой и высотой;

3) медианы (а также высоты или биссектрисы), проведенные к боковым сторонам, равны.

Для равнобедренного треугольника справедливы все свойства и все метрические соотношения, верные для произвольного треугольника. Кроме того, имеют место следующие соотношения:

1) основание c равнобедренного треугольника выражается через его боковую сторону a и угол γ при вершине:

$$c = 2a\sin\frac{\gamma}{2};$$

2) высоты h_a, h_b, опущенные на боковые стороны равнобедренного треугольника, выражаются через его боковую сторону a и площадь S:

$$h_a = h_b = \frac{2S}{a};$$

3) медиана и высота, проведенные из вершины равнобедренного треугольника, и биссектриса угла при вершине выражаются через боковую сторону a и основание c треугольника:

$$m_c = h_c = l_c = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2};$$

4) радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, выражается через его основание c и угол α при основании:

$$r = \frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};$$

5) радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, выражается через его боковую сторону a и угол α при основании:

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha};$$

6) расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей выражается формулой

$$d = \sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

Для равнобедренного прямоугольного треугольника справедливы равенства:

$$m_a = m_b = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \quad m_c = h_c = l_c = \frac{c}{2}, \quad S = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{4}c^2.$$

Равносторонний треугольник. *Равносторонний* (или *правильный*) *треугольник* – это треугольник, все стороны которого равны. Равносторонний треугольник – частный случай равнобедренного треугольника.

Свойства равностороннего треугольника:

1) все углы равны между собой и составляют 60°;

2) любая биссектриса является также медианой и высотой;

3) все медианы (а также высоты и биссектрисы) равны между собой;

4) точка пересечения медиан (высот, биссектрис) является центром вписанной и описанной окружностей (называется *центром равностороннего треугольника*);

5) центр равностороннего треугольника делит его медианы (биссектрисы, высоты) в отношении 2:1, считая от вершины;

6) все равносторонние треугольники подобны.

Для равностороннего треугольника справедливы все метрические соотношения, верные для произвольного треугольника, и соотношения, справедливые для равнобедренного треугольника. Кроме того, имеют место следующие соотношения:

1) медианы, высоты и биссектрисы равностороннего треугольника выражаются через его боковую сторону a и площадь S:

$$m = h = l = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2S}{a};$$

2) радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, выражается через его сторону:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

а также через высоту:

$$r = \frac{h}{3};$$

3) радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, выражается через его сторону:

$$R = 2r = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

а также через высоту:

$$R = \frac{2}{3}h.$$

Площадь равностороннего треугольника вычисляется по формуле

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

7.4. Четырехугольники

Определение и общие свойства четырехугольников. *Четырехугольник* – это многоугольник, у которого четыре стороны (см. § 7.2). Он образован замкнутой ломаной линией с четырьмя различными вершинами, среди которых никакие три не лежат на одной прямой, и четырьмя сторонами, не имеющими общих точек, кроме концевых (рис. 7.33).

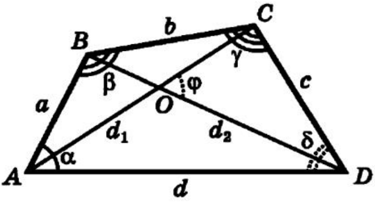


Рис. 7.33

Противолежащими сторонами четырехугольника называются любые две не смежные его стороны, *противолежащими углами* – два любых его угла, не имеющих общих сторон.

Вершины противоположных углов четырехугольника называются *противолежащими вершинами*.

Диагоналями четырехугольника называются отрезки, соединяющие противолежащие вершины. Четырехугольник имеет две диагонали (d_1 и d_2 на рис. 7.33).

Всюду далее будут рассматриваться выпуклые четырехугольники. *Выпуклым* называется четырехугольник, который лежит в одной полуплоскости от продолжения любой его стороны.

Справедливы теоремы:

1) если у двух четырехугольников равны соответствующие углы при вершинах, а также соответствующие углы между диагоналями, то такие четырехугольники подобны (***признак подобия***);

2) сумма внутренних углов четырехугольника равна 360°;

3) если a, b, c, d – последовательные стороны выпуклого четырехугольника, d_1 и d_2 – его диагонали, α и γ – два противолежащих угла (рис. 7.33), то

$$d_1^2 d_2^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha+\gamma)$$

(***теорема косинусов для четырехугольника***).

Вписанным в окружность называется такой четырехугольник, все вершины которого лежат на этой окружности (рис. 7.34). Окружность в таком случае называется *описанной около четырехугольника*.

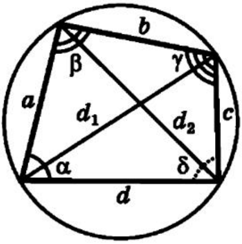


Рис. 7.34

Описанным около окружности называется такой четырехугольник, все стороны которого касаются этой окружности (рис. 7.35). Окружность в таком случае называется *вписанной в четырехугольник*.

Справедливы теоремы:

1) около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма любых его противоположных углов равна 180°;

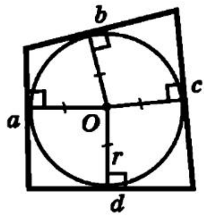


Рис. 7.35

2) в четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противолежащих сторон равны, т.е. $a + c = b + d$ (рис. 7.35);

3) если окружность описана около четырехугольника (см. рис. 7.34), то сумма произведений его противолежащих сторон равна произведению его диагоналей, т.е. $ac + bd = d_1 d_2$ (***теорема Птолемея***);

4) если окружность описана около четырехугольника (см. рис. 7.34), то между его сторонами и диагоналями имеет место равенство

$$d_1(ab + cd) = d_2(ad + bc)$$

(***теорема Стюарта***).

Площадь S четырехугольника выражается через его элементы по следующим формулам:

1) через диагонали d_1 и d_2 четырехугольника и угол φ между ними:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi;$$

2) через стороны a, b, c, d четырехугольника, его противолежащие углы α и γ и полупериметр $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}};$$

3) через полупериметр p четырехугольника, в который можно вписать окружность радиуса r:

$$S = pr;$$

4) через стороны a, b, c, d и сумму двух противолежащих углов α, γ описанного четырехугольника:

$$S = \sqrt{abcd}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2};$$

5) через полупериметр p и стороны a, b, c, d четырехугольника, около которого можно описать окружность (***формула Птолемея***):

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)};$$

6) через стороны a, b, c, d четырехугольника, около которого можно описать окружность радиуса R:

$$S = \frac{1}{4R}\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)};$$

7) через стороны a, b, c, d четырехугольника, в который можно вписать и около которого можно описать окружность:

$$S = \sqrt{abcd}.$$

Площади четырех треугольников, на которые четырехугольник делится двумя своими диагоналями (см. рис. 7.33), связаны равенством

$$S_{\Delta AOB}S_{\Delta COD} = S_{\Delta BOC}S_{\Delta AOD}.$$

Параллелограмм. *Параллелограммом* называется четырехугольник, противолежащие стороны которого попарно параллельны (рис. 7.36).

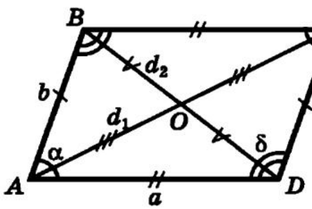


Рис. 7.36

Высотой параллелограмма называется перпендикуляр, проведенный из любой точки какой-либо стороны параллелограмма на противоположную сторону (или ее продолжение).

Признаки параллелограмма:

1) если в четырехугольнике две противолежащие стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм;

2) если в четырехугольнике противолежащие стороны попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм;

3) если в четырехугольнике противолежащие углы равны, то этот четырехугольник – параллелограмм;

4) если в четырехугольнике диагонали, пересекаясь, делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Свойства параллелограмма:

1) противолежащие стороны параллелограмма равны;

2) противолежащие углы параллелограмма равны;

3) сумма двух углов параллелограмма, прилежащих к одной его стороне, равна 180°;

4) диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника;

5) диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;

6) точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии;

7) две диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликих треугольника;

8) биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник (рис. 7.37);

9) биссектрисы углов параллелограмма, прилегающих к одной его стороне, взаимно перпендикулярны (рис. 7.37);

10) биссектрисы противолежащих углов параллелограмма параллельны или лежат на одной прямой (рис. 7.37);

11) высоты параллелограмма обратно пропорциональны его соответствующим сторонам, т.е. $h_a : h_b = b : a$ (рис. 7.38);

12) высоты параллелограмма, опущенные из любой его вершины, образуют угол, равный углу параллелограмма при смежной вершине, т.е. $\angle(h_a, h_b) = \alpha$ (рис. 7.38).

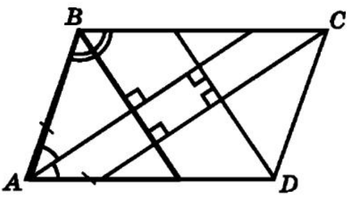


Рис. 7.37

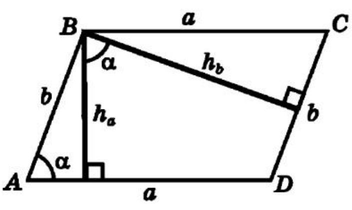


Рис. 7.38

Для параллелограмма справедливы также все свойства и формулы, общие для любых четырехугольников.

Если a, b, – стороны параллелограмма, d_1, d_2 – его диагонали, то справедливы следующие формулы:

1) периметр параллелограмма $P = 2(a + b)$;

2) сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Площадь параллелограмма вычисляется по формулам:

$$S = ah_a, \quad S = ab\sin\alpha, \quad S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi,$$

где α – угол между сторонами параллелограмма; h_a – высота, опущенная на сторону a; φ – угол между диагоналями (рис. 7.38).

Прямоугольник. *Прямоугольником* называется параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 7.39).

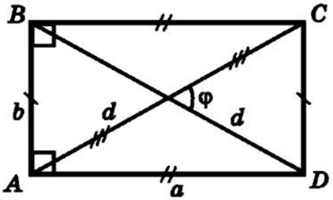


Рис. 7.39

***Признаки прямоугольника*:**

1) если в параллелограмме диагонали равны, то это – прямоугольник;

2) если в параллелограмме один угол прямой, то это – прямоугольник;

3) если в четырехугольнике три угла прямые, то это – прямоугольник.

Свойства прямоугольника:

1) диагонали прямоугольника равны;

2) перпендикуляры, проходящие через середины сторон прямоугольника, являются его осями симметрии;

3) около прямоугольника всегда можно описать окружность.

Для прямоугольника справедливы также все свойства, общие для любых четырехугольников, и свойства параллелограмма.

Если a, b – стороны прямоугольника, d – его диагональ, φ – угол между диагоналями, то справедливы следующие формулы:

1) диагональ треугольника

$$d = \sqrt{a^2 + b^2};$$

2) радиус описанной окружности

$$R = \frac{d}{2}.$$

Площадь прямоугольника вычисляют по формулам:

$$S = ab, \quad S = \frac{d^2}{2}\sin\varphi,$$

где φ – угол между диагоналями.

Ромб. *Ромбом* называется параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 7.40).

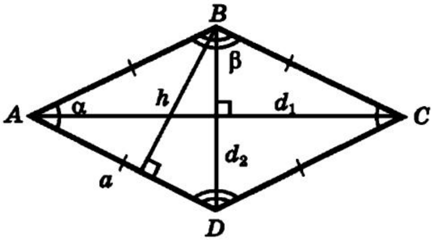


Рис. 7.40

Признаки ромба:

1) если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то это ромб;

2) если диагональ параллелограмма лежит на биссектрисе его угла, то это ромб;

3) если стороны четырехугольника равны, то это ромб.

Свойства ромба:

1) диагонали ромба взаимно перпендикулярны;

2) диагонали ромба являются биссектрисами его углов;

3) прямые, на которых лежат диагонали ромба, являются его осями симметрии;

4) высоты ромба равны;

5) в ромб можно всегда вписать окружность.

Для ромба справедливы также все свойства, общие для любых четырехугольников, и свойства параллелограмма.

Если a – сторона ромба, α – угол между его сторонами, то для радиуса вписанной окружности справедлива формула

$$r = \frac{1}{2}a\sin\alpha.$$

Площадь ромба вычисляется по формулам:

$$S = ah, \quad S = a^2 \sin\alpha, \quad S = \frac{1}{2} d_1 d_2,$$

где h – высота ромба; d_1, d_2 – его диагонали (рис. 7.40).

Квадрат. *Квадратом* называется прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 7.41).

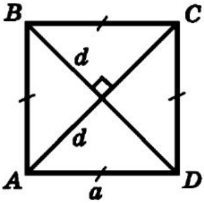


Рис. 7.41

***Признаки квадрата*:**

1) если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны и равны, то этот параллелограмм – квадрат;

2) если стороны четырехугольника равны и диагонали также равны, то этот четырехугольник – квадрат.

Свойства квадрата:

1) квадрат – правильный четырехугольник;

2) все углы квадрата прямые (равны 90°);

3) диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и являются биссектрисами его углов;

4) осями симметрии квадрата являются две его диагонали и два перпендикуляра к его сторонам, проходящих через их середины;

5) в квадрат со стороной a можно вписать окружность;

6) около квадрата со стороной a можно описать окружность.

Для квадрата верны также все свойства, общие для любых четырехугольников, свойства прямоугольника и ромба.

Если a – сторона квадрата, d – его диагональ, то справедливы формулы:

1) диагональ квадрата $d = a\sqrt{2}$;

2) радиус вписанной окружности $r = \frac{a}{2}$;

3) радиус описанной окружности

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2} a = \frac{d}{2}.$$

Площадь квадрата вычисляется по формулам:

$$S = a^2, \quad S = \frac{1}{2} d^2.$$

Трапеция. *Трапецией* называется четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие стороны не параллельны (рис. 7.42).

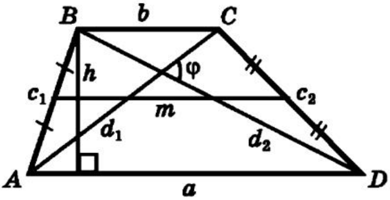


Рис. 7.42

Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*, а непараллельные – *боковыми сторонами*.

Высотой трапеции называется перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания трапеции на другое ее основание (или его продолжение).

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.

Свойства трапеции:

1) во всякой трапеции ее средняя линия параллельна основаниям и равна их полусумме:

$$m = \frac{a+b}{2};$$

2) сумма длин боковых сторон трапеции больше разности длин ее оснований;

3) середины боковых сторон и середины диагоналей трапеции лежат на одной прямой;

4) середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежат на одной прямой (рис. 7.43) (***теорема о четырех точках трапеции***);

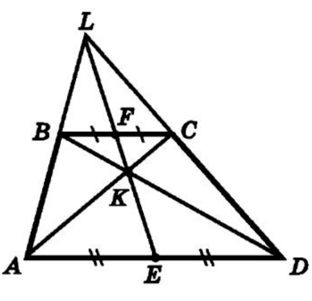


Рис. 7.43

5) если $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC, а AC и BD – ее диагонали, то треугольники ABD и ACD равновелики; треугольники ABC и BCD также равновелики (рис. 7.43);

6) если $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC, K – точка пересечения ее диагоналей, то треугольники ABK и CDK равновелики (рис. 7.43);

7) если $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC, K – точка пересечения ее диагоналей (рис. 7.43), то треугольники AKD и BKC подобны, а их площади относятся как квадраты оснований AD и BC трапеции:

$$S_{\Delta AKD} : S_{\Delta BKC} = (AD)^2 : (BC)^2;$$

8) в трапецию можно вписать окружность тогда и только тогда, когда сумма оснований трапеции равна сумме ее боковых сторон.

Для трапеции справедливы также все свойства, общие для любых четырехугольников.

Если a, b – основания трапеции ($a > b$), h – ее высота, опущенная на основание, c_1, c_2 – боковые стороны, m – средняя линия трапеции, d_1, d_2 – ее диагонали, φ – угол между ними (см. рис. 7.42), то справедливы формулы:

1) сумма квадратов диагонали трапеции

$$d_1^2 + d_2^2 = c_1{}^2 + c_2{}^2 + 2ab;$$

2) отрезок l с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный ее основаниям и проходящий через точку пересечения диагоналей,

$$l = \frac{2ab}{a+b};$$

при этом данный отрезок делится точкой пересечения диагоналей пополам;

3) отрезок q, параллельный основаниям трапеции и делящий ее на две равновеликие части,

$$q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Площадь трапеции вычисляют по формулам:

$$S = \frac{a+b}{2}h, \quad S = mh, \quad S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi.$$

Если $BB_1 \| CD$ (рис. 7.44), то для площади трапеции верна формула

$$S = S_{\Delta ABB_1}\left(\frac{a+b}{a-b}\right).$$

Равнобедренной (*равнобочной, равнобокой*) называется трапеция, боковые стороны которой равны (рис. 7.45).

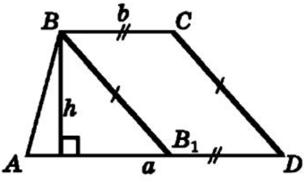


Рис. 7.44

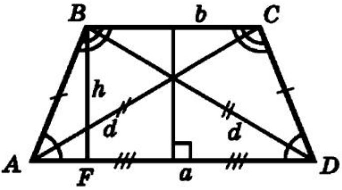


Рис. 7.45

Свойства равнобедренной трапеции:

1) углы при основании равны;

2) диагонали равны;

3) высота, опущенная из вершины на большее основание, делит его на два отрезка, один из которых равен полусумме оснований, другой – полуразности оснований:

$$FD = \frac{1}{2}(a+b), \quad AF = \frac{1}{2}(a-b);$$

4) прямая, проходящая через середины оснований, перпендикулярна основаниям и является осью симметрии трапеции;

5) около равнобедренной трапеции можно описать окружность;

6) если центр окружности, описанной около равнобедренной трапеции, лежит на основании трапеции, то ее диагональ перпендикулярна боковой стороне;

7) в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, если боковая сторона трапеции равна ее средней линии. Диаметр этой окружности равен высоте трапеции: $2r = h$;

8) если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, то верна формула $h^2 = ab$.

Трапеция называется *прямоугольной*, если одна из ее боковых сторон перпендикулярна основаниям.

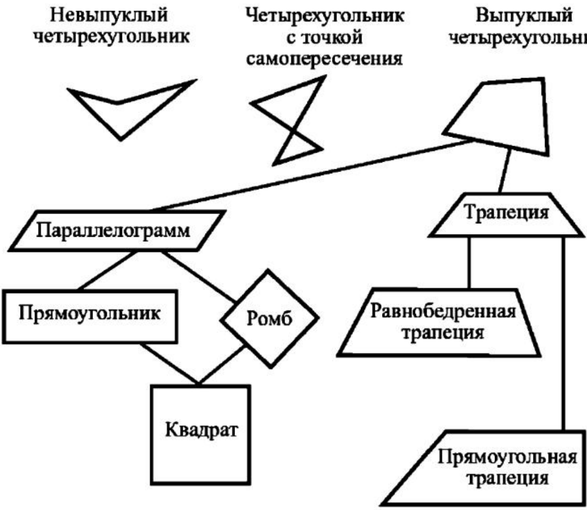


Рис. 7.46

Классификация четырехугольников. Классификация четырехугольников, рассмотренных выше, представлена на рис. 7.46.

7.5. Правильные многоугольники

Выпуклый многоугольник называется *правильным*, если все его стороны равны и все углы равны. Правильными многоугольниками являются, в частности, равносторонний треугольник и квадрат.

Так как сумма всех внутренних углов многоугольника равна $180°(n-2)$, то величина угла правильного многоугольника равна $\frac{180°(n-2)}{n}$ (n – число его сторон).

Правильный многоугольник всегда можно вписать в окружность и описать около нее.

Центром окружности, вписанной в правильный многоугольник и описанной около него, является одна и та же точка, которая называется *центром правильного многоугольника* (рис. 7.47).

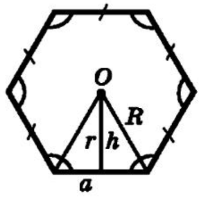


Рис. 7.47

Перпендикуляр, опущенный из центра правильного многоугольника на его сторону, называется *апофемой* (обозначается h).

Апофема равна радиусу описанной окружности: $h = r$.

Одноименные правильные многоугольники подобны, их площади относятся как квадраты соответствующих линейных элементов (сторон, апофем, радиусов).

Если a – сторона правильного n-угольника, r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей, то верны следующие формулы:

$$a = 2r\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}, \qquad a = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Площадь правильных многоугольников вычисляют по формулам:

$$S = pr, \qquad S = \frac{1}{2}nR^2\sin\frac{360^\circ}{n},$$

$$S = nr^2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}, \qquad S = \frac{1}{4}na^2\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n},$$

где p – полупериметр.

8
СТЕРЕОМЕТРИЯ

8.1. Базовые понятия

Общие сведения. *Стереометрия* – раздел геометрии, в котором изучаются пространственные геометрические фигуры, т.е. фигуры, не все точки которых лежат в одной плоскости.

Основные (*простейшие*) *фигуры* в стереометрии – точка, прямая и плоскость. Это неопределяемые понятия.

Геометрическим телом называется ограниченная в пространстве фигура, обладающая следующими свойствами:

1) имеет внутренние точки и любые две из них можно соединить ломаной, каждая точка которой является внутренней точкой фигуры;

2) содержит свою границу, которая совпадает с границей внутренней области фигуры.

Геометрическое тело имеет три измерения, которые условно называют *длиной*, *шириной* и *высотой*. Наглядно геометрическое тело можно представить как часть пространства, занятую физическим телом.

Равными называются геометрические тела, которые могут быть получены друг из друга движением.

Поверхностью тела называется его граница. Она состоит из точек и имеет два измерения – длину и ширину (и не имеет толщины). Поверхность образуется при движении линии.

Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к данной плоскости.

Секущей плоскостью геометрического тела называется такая плоскость, по обе стороны которой имеются внутренние точки данного тела.

Объем геометрического тела – это характеризующая данное тело положительная величина, числовое значение которой обладает следующими свойствами:

1) объем единичного куба (ребро которого равно единице длины) равен единице;

2) равные геометрические тела имеют равные объемы;

3) если геометрическое тело составлено из нескольких геометрических тел, не имеющих общих внутренних точек,

то объем данного тела равен сумме объемов составляющих его тел.

Аксиомы стереометрии. В основе стереометрии лежат аксиомы, выражающие основные свойства взаимного расположения точек, прямых и плоскостей в пространстве, аксиома о пересечении плоскостей и аксиома о разбиении пространства плоскостью.

Аксиомы о принадлежности точек некоторой плоскости:

1) через любые три точки в пространстве, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну;

2) в каждой плоскости лежат по крайней мере три точки;

3) существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Аксиома о принадлежности прямой плоскости. Если две точки прямой лежат в некоторой плоскости, то все точки данной прямой лежат в этой плоскости.

Аксиома о пересечении плоскостей. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по проходящей через эту точку прямой, все точки которой являются общими для обеих плоскостей.

Аксиома о разбиении пространства плоскостью. Каждая плоскость разбивает пространство на две части (два полупространства) так, что любые две точки одного и того же полупространства лежат по одну сторону от данной плоскости, а любые две точки разных полупространств – по разные стороны от этой плоскости.

8.2. Прямые в пространстве

В пространстве прямая однозначно задается:

1) двумя точками;

2) линией пересечения двух плоскостей.

Взаимное расположение прямых в пространстве. Случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве: 1) совпадают (все их точки общие); 2) пересекаются; 3) параллельны; 4) скрещиваются.

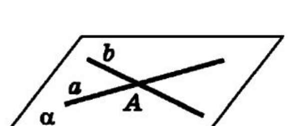


Рис. 8.1

Пересекающимися называются такие две прямые, которые имеют одну и только одну общую точку (рис. 8.1).

Параллельными прямыми в пространстве называются такие несовпадающие прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются, т.е. не имеют ни одной общей точки (рис. 8.2).

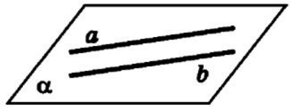


Рис. 8.2

Скрещивающимися называются такие две прямые, для которых не существует плоскость, в которой бы они лежали обе (рис. 8.3).

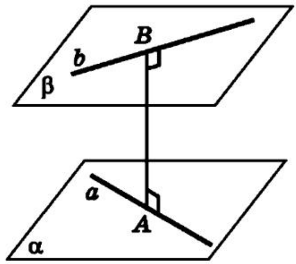


Рис. 8.3

Параллельные прямые в пространстве. Параллельность прямых устанавливается согласно ***признаку параллельности прямых***: если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.

Теоремы о параллельных прямых в пространстве:

1) через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной;

2) через две параллельные прямые можно провести одну и только одну плоскость;

3) если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость;

4) если прямые, проведенные в двух различных пересекающихся плоскостях, параллельны, то линия пересечения этих плоскостей параллельна данным прямым (или совпадает с одной из них).

Скрещивающиеся прямые. Взаимное расположение скрещивающихся прямых устанавливается по ***признаку скрещивающихся прямых***: если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то данные прямые скрещиваются (рис. 8.4).

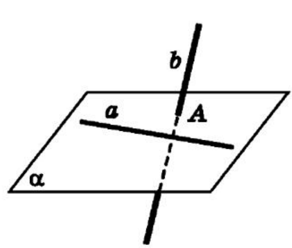


Рис. 8.4

***Теоремы о скрещивающихся прямых*:**

1) через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести одну и только одну плоскость, параллельную другой прямой;

2) любые две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Он является также общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.

Расстояние и угол между прямыми. *Расстояние между двумя пересекающимися прямыми* равно нулю.

Расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра с концами на данных прямых (или расстоянию от любой точки одной из этих прямых до другой прямой).

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра с концами на этих прямых (или расстоянию от одной из этих прямых до плоскости, проходящей через другую прямую и параллельной первой прямой, или расстоянию между двумя параллельными плоскостями, содержащими данные прямые, см. рис. 8.3).

Любые две пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и образуют четыре неразвернутых угла (по два тупых и острых или четыре равных угла).

Углом между двумя пересекающимися прямыми называется тот угол, который по величине не превосходит любой из трех остальных углов. Угол между двумя пересекающимися прямыми находится в пределах от 0° до 90°.

Если пересекающиеся прямые образуют четыре равных угла, то угол между этими прямыми равен 90°.

Угол между параллельными или совпадающими прямыми считается равным 0°.

Углом между скрещивающимися прямыми a и b называется угол, образованный пересекающимися прямыми a_1, b_1, параллельными прямым a, b соответственно и проходящими через произвольную точку O в пространстве (рис. 8.5). Угол между

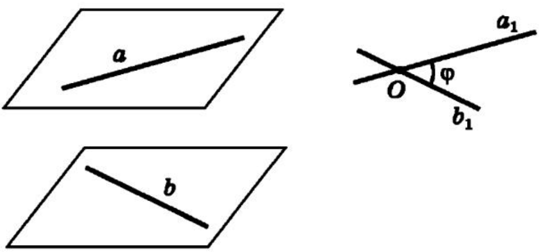


Рис. 8.5

скрещивающимися прямыми не зависит от положения точки O и не превосходит 90° (угол φ на рис. 8.5).

Перпендикулярные прямые пересекаются либо являются скрещивающимися;

Теоремы о прямых в пространстве:

1) через две пересекающиеся прямые можно провести одну и только одну плоскость;

2) если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой прямой;

3) если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.

8.3. Прямые и плоскости в пространстве

В пространстве плоскость однозначно задается:

1) двумя пересекающимися прямыми;

2) двумя параллельными прямыми;

3) прямой и не лежащей на ней точкой;

4) тремя точками, не лежащими на одной прямой.

Взаимное расположение прямой и плоскости. Прямая называется *лежащей в плоскости* β (или плоскость β называется *проходящей через прямую* a), если каждая точка прямой a лежит в плоскости β (пишут: $a \subset \beta$).

Прямая и плоскость называются *пересекающимися в точке* O, если O – единственная общая точка этих прямой и плоскости.

Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Отрезок (луч) называется *параллельным данной плоскости*, если он лежит на прямой, параллельной данной плоскости.

Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести одну и только одну плоскость.

Случаи взаимного расположения прямой и плоскости: 1) прямая лежит в данной плоскости; 2) прямая и плоскость пересекаются; 3) прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки.

Плоскость и не лежащая на ней прямая либо не пересекаются, либо пересекаются в единственной точке.

Если две различные прямые пересекаются в точке A, то все прямые, пересекающие обе данные прямые и не проходящие через точку A, лежат в одной плоскости.

Параллельность прямой и плоскости. Параллельность прямой и плоскости устанавливается согласно ***признаку параллельности прямой и плоскости***: если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна и самой данной плоскости.

Теоремы о плоскости и параллельной ей прямой:

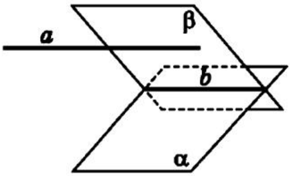


Рис. 8.6

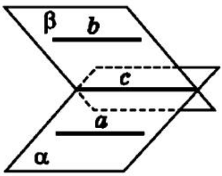


Рис. 8.7

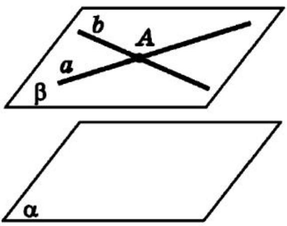


Рис. 8.8

1) если одна из двух параллельных прямых параллельна некоторой плоскости, то и другая прямая параллельна этой плоскости или лежит в ней;

2) если прямая параллельна двум пересекающимся плоскостям, то она параллельна линии их пересечения (рис. 8.6);

3) если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой;

4) если через каждую из двух параллельных прямых проведены плоскости и эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна каждой из этих прямых (рис. 8.7);

5) все прямые, проходящие через данную точку вне некоторой плоскости α и параллельные ей, лежат в плоскости, параллельной плоскости α (рис. 8.8).

Расстоянием между плоскостью и параллельной ей прямой называется расстояние от произвольной точки данной прямой до этой плоскости.

Перпендикулярность прямой и плоскости. Прямая, пересекающая плоскость, называется *перпендикулярной плоскости* (а плоскость называется *перпендикулярной данной прямой*), если данная прямая перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Перпендикуляром, проведенным из точки A к плоскости α, называется отрезок AO прямой a, проходящей через точку A

и перпендикулярной данной плоскости. Точка O пересечения прямой a с плоскостью α называется *основанием перпендикуляра* (рис. 8.9).

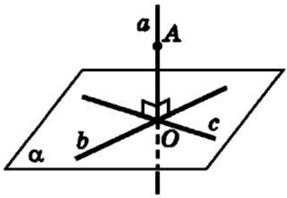


Рис. 8.9

Признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то она перпендикулярна и этой плоскости (рис. 8.9).

Теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости:

1) через любую точку пространства можно провести одну и только одну плоскость, перпендикулярную данной прямой;

2) через любую точку пространства можно провести одну и только одну прямую, перпендикулярную данной плоскости;

3) если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости;

4) если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны;

5) если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой;

6) если две прямые плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Наклонная и ее проекция на плоскость. *Наклонной прямой к плоскости* называется прямая, пересекающая эту плоскость, но не перпендикулярная ей. *Наклонной, проведенной из точки A (лежащей вне плоскости) к данной плоскости*, называется отрезок AB наклонной прямой, соединяющий данную точку с точкой B плоскости (рис. 8.10).

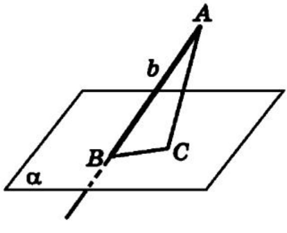


Рис. 8.10

Конец B отрезка, лежащего в плоскости, называется *основанием наклонной*.

Проекцией (перпендикулярной проекцией) наклонной называется отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки (рис. 8.11).

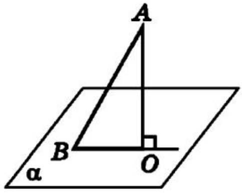


Рис. 8.11

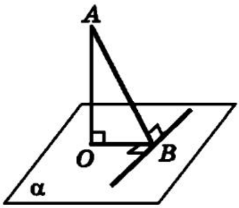


Рис. 8.12

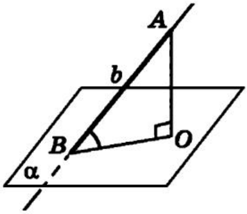


Рис. 8.13

Теоремы о перпендикулярах и наклонных:

1) прямая, проведенная в плоскости и перпендикулярная наклонной, перпендикулярна и ее проекции на эту плоскость (рис. 8.12);

2) ***теорема о трех перпендикулярах***: прямая, проведенная в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной (рис. 8.12);

3) если из одной точки, взятой вне плоскости, проведены к этой плоскости перпендикуляр и две наклонные, то: а) две наклонные, имеющие равные проекции, равны; б) из двух наклонных та больше, проекция которой больше.

Углом между прямой и плоскостью (если прямая не перпендикулярна плоскости) называется угол между наклонной, принадлежащей этой прямой, и ее проекцией на данную плоскость (на рис. 8.13 это $\angle ABO$ между прямой b и плоскостью α).

Перпендикулярная проекция многоугольника на плоскость. *Проекцией (перпендикулярной проекцией) многоугольника на плоскость* называется многоугольник, стороны которого – отрезки, являющиеся перпендикулярными проекциями сторон исходного многоугольника на данную плоскость (рис. 8.14).

Если S' – площадь заданного многоугольника, φ – угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проецирования, то $S = S'\cos\varphi$, где S – площадь перпендикулярной проекции многоугольника.

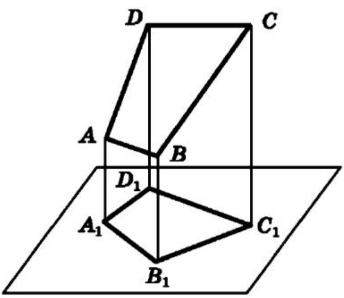


Рис. 8.14

8.4. Плоскости в пространстве

Взаимное расположение плоскостей. Две плоскости называются *пересекающимися*, если они имеют общие точки, причем множество этих точек представляет собой прямую, называемую *линией пересечения плоскостей*.

Две плоскости называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Случаи взаимного расположения плоскостей: 1) совпадают (все их точки – общие); 2) пересекаются; 3) параллельны.

Пересекающиеся плоскости. *Углом между пересекающимися плоскостями* α и β называется меньший из углов между прямыми a и b, проведенными соответственно в плоскостях α и β перпендикулярно линии l их пересечения через некоторую точку, принадлежащую l (рис. 8.15).

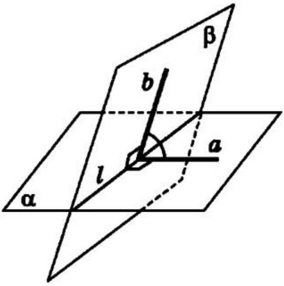


Рис. 8.15

Теоремы о пересекающихся плоскостях:

1) если одна из пересекающихся плоскостей проходит через прямую, параллельную другой плоскости, то линия пересечения плоскостей параллельна этой прямой (рис. 8.16);

2) если каждая из пересекающихся плоскостей проходит через одну из параллельных прямых, то прямая пересечения этих плоскостей параллельна заданным прямым (на рис. 8.17 $a \parallel c \parallel b$);

3) если две пересекающиеся плоскости пересечены третьей плоскостью по параллельным прямым, то линия их пересечения параллельна этим прямым (на рис. 8.17 $a \parallel b \parallel c$).

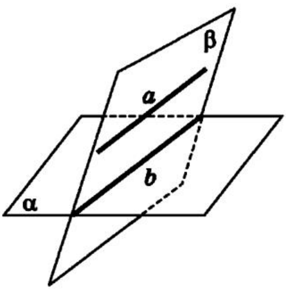


Рис. 8.16

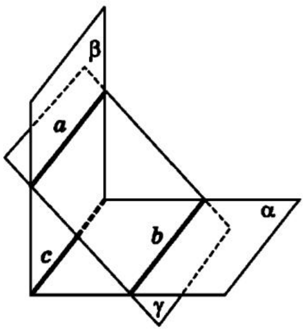


Рис. 8.17

Перпендикулярные плоскости. Две плоскости называются *взаимно перпендикулярными* (или, кратко, *перпендикулярными*), если угол между ними равен 90°. Перпендикулярные плоскости – частный случай пересекающихся плоскостей.

Признак перпендикулярности плоскостей: если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости взаимно перпендикулярны (рис. 8.18).

Прямая, лежащая в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная прямой, по которой эти плоскости пересекаются, перпендикулярна другой плоскости (рис. 8.18).

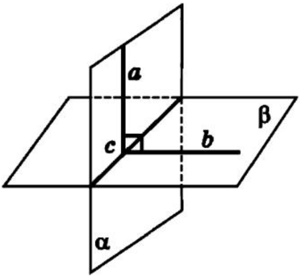


Рис. 8.18

Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то линия их пересечения перпендикулярна этой плоскости (на рис. 8.19 $a \perp \gamma$).

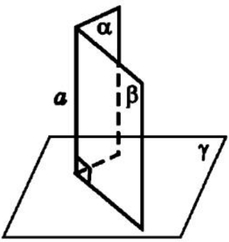


Рис. 8.19

Если прямая перпендикулярна одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, то она параллельна другой (на рис. 8.20 $a \perp \alpha$ и $a \parallel \beta$).

Параллельные плоскости. Параллельность плоскостей устанавливается согласно ***признаку параллельности плоскостей***: если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой, то эти плоскости параллельны (на рис. 8.21 $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$, $\alpha \parallel \beta$).

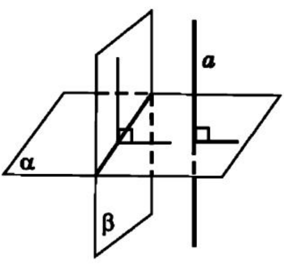


Рис. 8.20

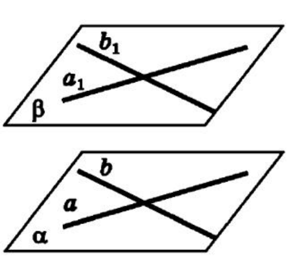


Рис. 8.21

Теоремы о параллельных плоскостях:

1) через точку, не лежащую на данной плоскости, можно провести одну и только одну плоскость, параллельную данной;

2) если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую;

3) если прямая перпендикулярна каждой из двух плоскостей, то эти плоскости параллельны;

4) отрезки параллельных прямых, расположенные между параллельными плоскостями, равны (рис. 8.22);

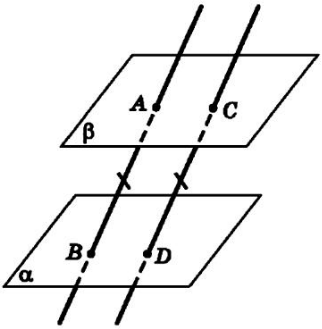


Рис. 8.22

5) если две различные плоскости параллельны третьей, то они параллельны между собой;

6) если плоскость пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую;

7) если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии (прямые) их пересечения параллельны (на рис. 8.23 $a \parallel b$).

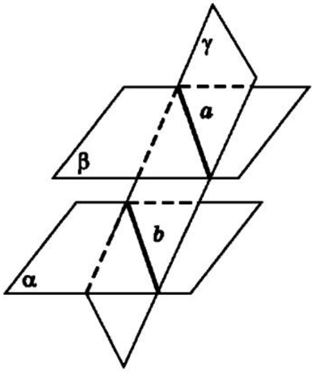


Рис. 8.23

Теорема Фалеса. Если параллельные плоскости, пересекающие две данные прямые, отсекают на одной прямой равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой прямой (рис. 8.24).

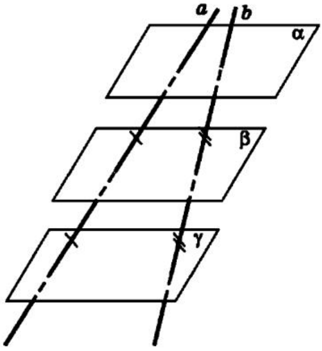


Рис. 8.24

Обобщенная теорема Фалеса. Параллельные плоскости, пересекающие две данные прямые, отсекают на этих прямых пропорциональные отрезки.

Расстоянием между двумя параллельными плоскостями называется расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости, т.е. длина отрезка их общего перпендикуляра, заключенного между этими плоскостями.

8.5. Углы в пространстве

Двугранный угол. *Двугранным углом* называется фигура, образованная двумя полуплоскостями (не принадлежащими одной плоскости), которые имеют общую границу – прямую линию (рис. 8.25).

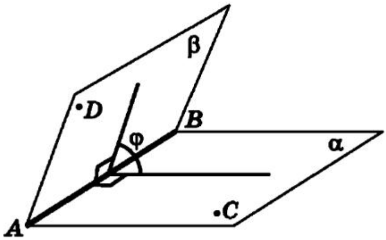


Рис. 8.25

Гранями двугранного угла называются полуплоскости, образующие этот угол.

Ребром двугранного угла называется общая граница (прямая линия) полуплоскостей, образующих этот угол.

Двугранный угол, ребро которого есть прямая AB (рис. 8.25), а гранями являются полуплоскости α и β, обозначается $\alpha AB\beta$ (или $CABD$, если на разных плоскостях отмечены точки C и D).

Линейным углом двугранного угла называется угол, который образован двумя лучами, имеющими общее начало, лежащее на ребре двугранного угла, и проведенными в обеих гранях перпендикулярно ребру (угол φ на рис. 8.25). Линейный угол двугранного угла – это угол, образованный пересечением двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.

Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.

Две пересекающиеся плоскости образуют в пространстве четыре попарно равных двугранных угла. Два двугранных угла называются *смежными*, если у них ребро и одна грань общие, а две другие грани составляют плоскость. Сумма смежных двугранных углов равна $180°$.

Трехгранный угол. *Трехгранным углом* называется фигура, образованная тремя лучами, которые имеют общую начальную точку и не лежат в одной плоскости, и заключенными между этими лучами частями плоскостей (рис. 8.26). Лучи, образующие трехгранный угол, называются его *ребрами*, а части плоскостей, ограниченные ребрами трехгранного угла, – его *гранями*.

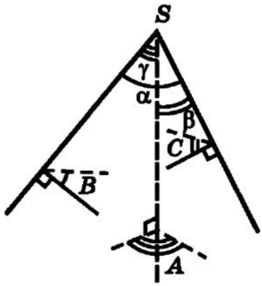


Рис. 8.26

Углы, образованные каждой парой ребер трехгранного угла, называются *плоскими углами* данного *трехгранного угла*, а углы между его гранями – *двугранными углами* данного *трехгранного угла* (на рис. 8.26 α, β, γ – плоские углы трехгранного угла, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ – противолежащие им двугранные углы).

С в о й с т в а п л о с к и х и д в у г р а н н ы х у г л о в т р е х г р а н н о г о у г л а:

1) сумма двух плоских углов больше третьего плоского угла: $\alpha+\beta>\gamma$, $\alpha+\gamma>\beta$, $\beta+\gamma>\alpha$;

2) $\alpha+\beta+\gamma<360°$;

3) $\angle A=\angle B$ тогда и только тогда, когда $\alpha=\beta$.

Теорема синусов:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\angle A}=\frac{\sin\beta}{\sin\angle B}=\frac{\sin\gamma}{\sin\angle C}.$$

Теорема косинусов: $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\angle C$.

Дополнительная теорема: $\cos\angle A=-\cos\angle B\cos\angle C+$ $+\sin\angle B\sin\angle C\cos\alpha$.

Теорема Пифагора: если $\angle A=\dfrac{\pi}{2}$ (т.е. если две грани взаимно перпендикулярны), то $\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma$.

8.6. Многогранники

Понятие многогранника. *Многогранником* называется геометрическое тело, ограниченное конечным числом плоских многоугольников, из которых любые два смежных не лежат в одной плоскости.

Гранью многогранника называется каждый из многоугольников, ограничивающих многогранник, *ребром* – каждая из сторон любого многоугольника, ограничивающего многогранник, *вершиной* – каждая из вершин любого многоугольника, ограничивающего многогранник.

Выпуклым называется многогранник, который лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани. Если это условие не выполняется, то многогранник называется *невыпуклым*.

Формула Эйлера для выпуклого многогранника:

$$N - L + F = 2,$$

где N – число вершин данного многогранника; L – число его ребер; F – число граней.

Диагональю многогранника называется отрезок, соединяющий две его вершины, не принадлежащие одной грани.

Полной поверхностью (или просто *поверхностью*) *многогранника* называется фигура, образованная всеми его гранями.

Площадью полной поверхности многогранника называется сумма площадей всех его граней.

Определение *объема многогранника* аналогично определению объема геометрического тела.

Теорема об объеме многогранника. Если в многогранник можно вписать шар, то верна формула

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{полн}} R,$$

где V – объем многогранника; $S_{\text{полн}}$ – площадь его полной поверхности; R – радиус вписанного шара.

Сечением многогранника называется фигура, состоящая из всех точек, которые являются общими для данного многогранника и секущей плоскости. Сечение многогранника есть многоугольник, лежащий в секущей плоскости, сторонами которого являются отрезки, по которым секущая плоскость пересекает грани многогранника. Для построения изображения сечения многогранника следует найти точки пересечения секущей плоскости с ребрами этого многогранника и соединить каждые две из них, лежащие в одной грани.

Простейшие многогранники – призма (ее частные случаи – параллелепипед, куб) и пирамида.

Призма. *Призмой* (*n-угольной*) называется многогранник, две грани которого – равные n-угольники (называемые *основаниями*) с соответственно параллельными сторонами, а остальные n граней – параллелограммы, две стороны каждого из которых являются соответствующими сторонами оснований (рис. 8.27).

Призма с основаниями $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ обозначается

$$A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n.$$

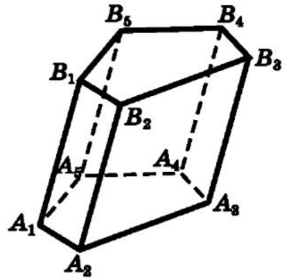


Рис. 8.27

Параллелограммы, не являющиеся основаниями, называются *боковыми гранями призмы*, а их стороны, не лежащие на основаниях призмы, – *боковыми ребрами.*

Ребром основания призмы называется каждая из сторон любого из оснований призмы.

Полной поверхностью призмы называется фигура, образованная всеми гранями призмы, а *боковой поверхностью* – фигура, образованная ее боковыми гранями.

Высотой призмы называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки плоскости одного основания к плоскости другого (или длина этого перпендикуляра).

Прямая призма – это призма, все боковые ребра которой перпендикулярны основаниям. Если призма не является прямой, то она называется *наклонной.*

Правильной называется прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники.

Диагональю призмы называется отрезок, концами которого служат вершины призмы, не лежащие в одной грани.

Диагональное сечение призмы – это ее сечение плоскостью, проходящей через два боковых ребра, которые не лежат в одной грани.

Перпендикулярным сечением призмы называется ее сечение плоскостью, пересекающей все боковые ребра призмы перпендикулярно им (многоугольник $ABCD$ на рис. 8.28).

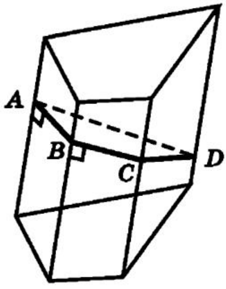


Рис. 8.28

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех ее граней (обозначается $S_{\text{полн}}$), *площадью боковой поверхности* – сумма площадей ее боковых граней (обозначается $S_{\text{бок}}$).

Свойства призмы:

1) n-угольная призма имеет $n+2$ граней, $3n$ ребер, $2n$ вершин, $n(n-3)$ диагоналей;

2) основания призмы лежат в параллельных плоскостях;

3) диагональным сечением призмы является параллелограмм;

4) угол между плоскостью перпендикулярного сечения призмы и плоскостью ее основания равен углу между боковым ребром и высотой призмы.

Если $P_\perp$, $S_\perp$ – соответственно периметр и площадь перпендикулярного сечения призмы, l – длина бокового ребра, H – высота призмы, то площадь боковой поверхности призмы вычисляется по формуле

$$S_{\text{бок}} = P_\perp l;$$

площадь полной поверхности призмы равна сумме площади ее боковой поверхности и удвоенной площади основания:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}};$$

объем призмы вычисляется по формулам:

$$V = S_{\text{осн}} H, \quad V = S_\perp l.$$

Если в перпендикулярное сечение призмы можно вписать круг радиуса $r = \dfrac{H}{2}$, то в саму призму можно вписать шар радиуса $R = r = \dfrac{H}{2}$; при этом $R = \dfrac{2S_\perp}{P_\perp}$.

Свойства прямой призмы:

1) все боковые грани – прямоугольники;

2) боковые ребра перпендикулярны плоскостям, в которых лежат основания;

3) все диагональные сечения – прямоугольники;

4) высота прямой призмы равна ее боковому ребру: $H = l$;

5) если около основания прямой призмы можно описать круг радиуса r, то около самой прямой призмы можно описать шар радиуса R, причем

$$R = \sqrt{r^2 + 0{,}25 l^2},$$

где l – боковое ребро призмы;

6) если в основание прямой призмы можно вписать круг, диаметр которой равен боковому ребру призмы, то в эту призму можно вписать шар;

7) если около основания прямой призмы можно описать круг, то около этой призмы можно описать цилиндр;

8) если в основание прямой призмы можно вписать круг, то в эту призму можно вписать цилиндр.

Если $P_{\text{осн}}$, $S_{\text{осн}}$ – соответственно периметр и площадь основания прямой призмы, то площадь ее боковой поверхности вычисляется по формуле

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} l,$$

а объем – по формуле

$$V = S_{\text{осн}} l.$$

Параллелепипед. *Параллелепипед* – это призма, основаниями которой являются параллелограммы (рис. 8.29).

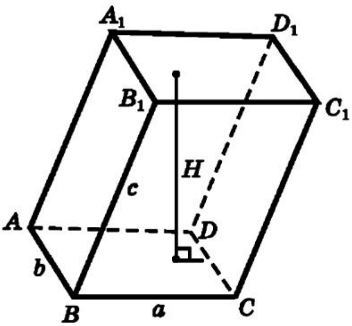


Рис. 8.29

Противоположными гранями параллелепипеда называются две его грани, не имеющие общего ребра, а *смежными гранями* – грани, имеющие общее ребро.

Противоположными вершинами параллелепипеда называются две его вершины, не принадлежащие одной грани.

Диагональю параллелепипеда называется отрезок, соединяющий противоположные вершины.

Для параллелепипеда справедливы все общие свойства призмы. Кроме того, он имеет специфические свойства.

Свойства параллелепипеда:

1) имеет шесть граней, каждая из которых – параллелограмм;

2) противоположные грани параллелепипеда равны и лежат в параллельных плоскостях;

3) все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам;

4) середина диагонали параллелепипеда является его центром симметрии.

Справедлива формула

$$d_1{}^2 + d_2{}^2 + d_3{}^2 + d_4{}^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2),$$

где d_1, d_2, d_3, d_4 – диагонали параллелепипеда; a, b, c – его ребра.

Объем параллелепипеда вычисляется по формуле

$$V = S_{\text{осн}}H,$$

где $S_{\text{осн}}$, H – соответственно площадь основания и высота параллелепипеда.

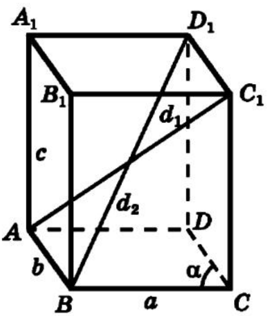


Рис. 8.30

Прямым параллелепипедом называется параллелепипед, все боковые грани которого – прямоугольники (рис. 8.30). Боковые ребра прямого параллелепипеда перпендикулярны его основаниям. Если параллелепипед не является прямым, то он называется *наклонным*.

Справедливы формулы:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha,$$

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha,$$

где d_1, d_2 – диагонали прямого параллелепипеда; a, b, c – его ребра; α – острый угол между смежными ребрами основания параллелепипеда.

Прямоугольным параллелепипедом называется параллелепипед, у которого все грани – прямоугольники.

Свойства прямоугольного параллелепипеда:

1) три ребра, имеющих общую вершину, взаимно перпендикулярны;

2) все диагонали равны.

Справедлива формула

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

где d – диагональ прямоугольного параллелепипеда; a, b, c – его ребра.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений:

$$V = abc.$$

Прямоугольный параллелепипед, у которого все грани – равные квадраты, называется *кубом.*

Пирамида. *Пирамидой* (*n-угольной*) называется многогранник, одна грань которого – некоторый n-угольник, а остальные грани – треугольники с общей вершиной; n-угольник называется *основанием пирамиды*, треугольники – ее *боковыми гранями*. Общая вершина треугольников называется *вершиной пирамиды*, стороны этих треугольников, содержащие вершину, – *боковыми ребрами. Ребром основания пирамиды* называется каждая из сторон ее основания.

Пирамида с основанием $A_1A_2...A_n$ и вершиной S обозначается $SA_1A_2...A_n$ (рис. 8.31).

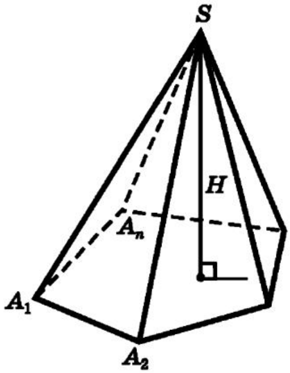


Рис. 8.31

Полной поверхностью пирамиды называется фигура, образованная всеми гранями данной пирамиды, а *боковой поверхностью* – фигура, образованная ее боковыми гранями.

Диагональным сечением пирамиды называется сечение плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не лежащих на одной грани.

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости ее основания.

Смежными боковыми гранями пирамиды называются две ее боковые грани, имеющие общее ребро.

Свойства пирамиды:

1) если боковое ребро пирамиды образует равные углы со смежными ребрами основания, то основание высоты пирамиды лежит на биссектрисе угла, образованного этими ребрами основания;

2) если две смежные боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, то общее боковое ребро этих граней является высотой пирамиды;

3) если боковые ребра пирамиды равны, то они образуют равные углы с основанием пирамиды;

4) если все боковые ребра пирамиды равны или образуют с ее основанием равные углы, то основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около многоугольника, лежащего в основании пирамиды;

5) если все боковые ребра пирамиды равны или образуют с ее основанием равные углы, то около этой пирамиды можно описать шар радиуса $R = \dfrac{l}{2\sin\alpha}$, центр которого лежит на прямой, содержащей высоту пирамиды (здесь l – длина бокового ребра, α – угол его наклона к основанию);

6) если все боковые грани пирамиды образуют с ее основанием равные углы, то основание высоты пирамиды совпадает с центром круга, вписанного в многоугольник, который лежит в основании пирамиды;

7) высота пирамиды, все боковые грани которой образуют с ее основанием равные углы, вычисляется по формуле $H = \mathrm{tg}\beta$, где r – радиус круга, вписанного в основание; β – двугранный угол при ребре основания;

8) если все боковые грани образуют с ее основанием равные двугранные углы, то в такую пирамиду можно вписать шар радиуса $R = r\,\mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2}$, центр которого лежит на высоте пирамиды.

Площадью боковой поверхности пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней (обозначается $S_{\text{бок}}$), а *площадью полной поверхности* – сумма площадей всех ее граней (обозначается $S_{\text{полн}}$).

Площадь полной поверхности пирамиды равна сумме площадей ее боковой поверхности и площади основания:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}.$$

Объем пирамиды вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H,$$

где $S_{\text{осн}}$ – площадь основания пирамиды; H – ее высота.

Если в пирамиду можно вписать шар радиуса R, то объем пирамиды можно вычислить по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{полн}} R.$$

Свойства сечения пирамиды плоскостью, параллельной основанию:

1) сечение представляет собой многоугольник, подобный основанию пирамиды;

2) плоскость отсекает пирамиду, подобную данной;

3) плоскость сечения разбивает боковые ребра и высоту пирамиды на пропорциональные отрезки;

4) площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний до вершины пирамиды.

Свойства треугольной пирамиды:

1) отрезки, соединяющие вершины треугольной пирамиды с точками пересечения медиан противолежащих граней, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 3:1, считая от вершины;

2) площади граней треугольной пирамиды обратно пропорциональны опущенным на них высотам;

3) в треугольную пирамиду всегда можно вписать шар;

4) около треугольной пирамиды всегда можно описать шар.

Правильная пирамида. Пирамида называется *правильной*, если в ее основании – правильный многоугольник и все боковые грани – равные равнобедренные треугольники (например, правильная четырехугольная пирамида на рис. 8.32).

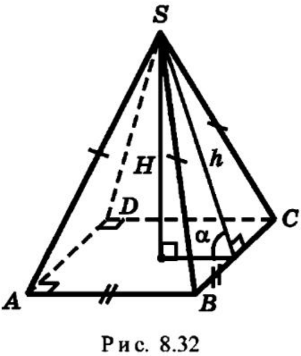


Рис. 8.32

Апофемой правильной пирамиды называется высота ее боковой грани, проведенная к стороне ее основания.

Свойства правильной пирамиды:

1) отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром многоугольника, служащего основанием, является высотой пирамиды;

2) все боковые ребра равны;

3) все двугранные углы при ребрах основания равны;

4) все плоские углы при вершине равны;

5) все двугранные углы при боковых ребрах равны;

6) в правильную пирамиду можно вписать шар.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды вычисляется по формулам:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} h, \quad S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha},$$

где $P_{\text{осн}}$ – периметр основания правильной пирамиды; h – апофема; α – двугранный угол при ребре основания.

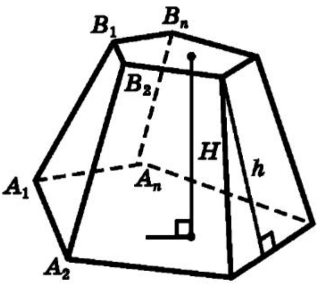


Рис. 8.33

Усеченная пирамида. *Усеченной пирамидой* называется многогранник, который отсекается от пирамиды плоскостью, параллельной плоскости основания, и заключен между этими плоскостями (рис. 8.33); n-угольники $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ называются соответственно *нижним* и *верхним основаниями усеченной пирамиды*, а четырехугольники $A_1A_2B_2B_1, ...,$ $A_nA_1B_1B_n$ – ее *боковыми гранями*.

Высотой усеченной пирамиды называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки плоскости одного основания к плоскости другого основания.

Площадью боковой поверхности усеченной пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней, а *площадью полной поверхности* – сумма площадей всех ее граней.

Свойства усеченной пирамиды:

1) боковые грани – трапеции;

2) многоугольники, являющиеся основаниями, подобны;

3) если в усеченную пирамиду можно вписать шар, то его радиус равен половине высоты этой пирамиды.

Объем усеченной пирамиды вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} H (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2),$$

где H – высота пирамиды; S_1, S_2 – площади ее оснований.

Усеченная пирамида называется *правильной*, если она является многогранником, который отсекается плоскостью, параллельной основанию правильной пирамиды.

Апофемой правильной усеченной пирамиды называется высота ее боковой грани.

Свойства правильной усеченной пирамиды:

1) основаниями являются правильные многоугольники;

2) боковые грани – равнобедренные трапеции.

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды вычисляется по формулам:

$$S_{бок} = \frac{1}{2}(P+p)h, \quad S_{бок} = \frac{S_1 - S_2}{\cos\alpha},$$

где P, p – периметры оснований пирамиды; h – апофема боковой грани; S_1, S_2 – площади соответственно большего и меньшего оснований; α – двугранный угол при ребре нижнего основания.

Правильная усеченная пирамида не является правильным многогранником.

8.7. Правильные многогранники

Понятие правильного многогранника. Выпуклый многогранник называется *правильным многогранником*, если все его грани – равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одно и то же количество ребер.

Свойства правильных многогранников:

1) все ребра – равные отрезки, все плоские углы равны между собой;

2) все многогранные углы при вершинах равны между собой;

3) каждая вершина может быть вершиной: а) трех, четырех и пяти равносторонних треугольников; б) трех квадратов; в) трех правильных пятиугольников;

4) не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные n-угольники при $n \geq 6$;

5) около каждого правильного многогранника можно описать шар;

6) в каждый правильный многогранник можно вписать шар.

Правильные многогранники – тетраэдр (правильный четырехгранник), куб, или гексаэдр (правильный шестигранник), октаэдр (правильный восьмигранник), додекаэдр (правильный двенадцатигранник), икосаэдр (правильный двадцатигранник). Других правильных многогранников не существует.

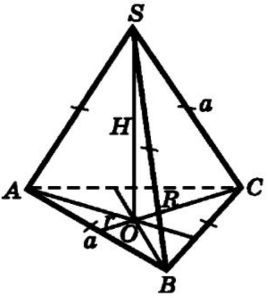


Рис. 8.34

Тетраэдр. Треугольная пирамида, все грани которой – равные равносторонние треугольники, называется *тетраэдром*. Тетраэдр имеет четыре грани, четыре вершины и шесть ребер, а в каждой вершине сходятся три ребра (рис. 8.34).

Если a – ребро тетраэдра, S – площадь полной поверхности, V – объем, H – высота, R – радиус описанного шара, r – радиус вписанного шара, то верны формулы:

$$S = a^2\sqrt{3}, \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12},$$

$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}, \quad R = \frac{a\sqrt{6}}{4}, \quad r = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

Элементы симметрии тетраэдра:

1) три оси симметрии – прямые, проходящие через середины его противолежащих ребер;

2) шесть плоскостей симметрии, каждая из которых проходит через одно из ребер тетраэдра перпендикулярно противолежащему ребру.

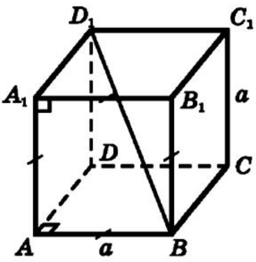


Рис. 8.35

Куб. Шестигранник (прямоугольный параллелепипед), все грани которого – равные между собой квадраты, называется *кубом*. Куб имеет 8 вершин и 12 ребер, в каждой вершине сходятся 3 ребра (рис. 8.35).

Если a – сторона куба, S – площадь полной поверхности, V – объем, H – высота, R – радиус описанного шара, r – радиус вписанного шара, то верны формулы:

$$S = 6a^2, \quad V = a^3, \quad H = a, \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad r = \frac{a}{2}.$$

Элементы симметрии куба:

1) центр симметрии – точка пересечения диагоналей куба;

2) оси симметрии – три прямые, проходящие через центры противоположных граней, и 6 прямых, проходящих через середины его противоположных ребер (всего 9 осей симметрии);

3) плоскости симметрии – три плоскости, проходящие через центр симметрии куба параллельно противоположным граням, и 6 плоскостей, проходящих через диагональ противоположных граней (всего 9 плоскостей симметрии).

Октаэдр, додекаэдр, икосаэдр. *Октаэдр* имеет 8 граней, 6 вершин и 12 ребер. Его грани – равносторонние треугольники, а каждая его вершина является вершиной четырех треугольников (рис. 8.36).

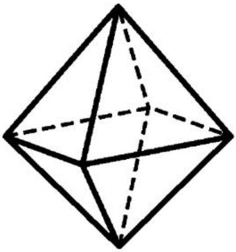


Рис. 8.36

Если a – сторона октаэдра, V – объем, R – радиус описанного шара, S – площадь полной поверхности, r – радиус вписанного шара, то верны формулы:

$$S = 2\sqrt{3}a^2, \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3},$$

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad r = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

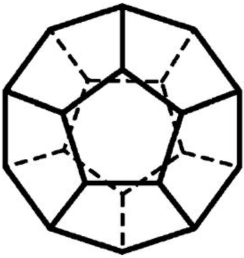


Рис. 8.37

Додекаэдр имеет 12 граней, 20 вершин и 30 ребер. Его грани – равносторонние пятиугольники, а каждая вершина является вершиной трех пятиугольников (рис. 8.37).

Икосаэдр имеет 20 граней, 12 вершин и 30 ребер. Его грани – равносторонние треугольники, а каждая вершина является вершиной пяти треугольников (рис. 8.38).

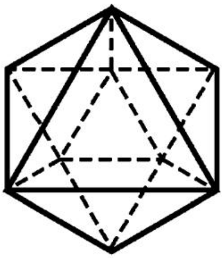


Рис. 8.38

8.8. Цилиндр, конус, усеченный конус

Цилиндр. *Цилиндрической поверхностью* называется поверхность, образованная всеми прямыми, проходящими через каждую точку заданной кривой параллельно фиксированной

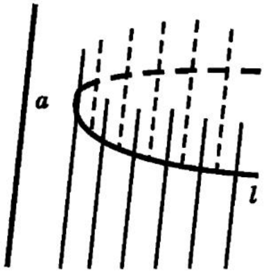


Рис. 8.39

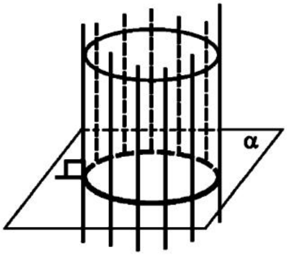


Рис. 8.40

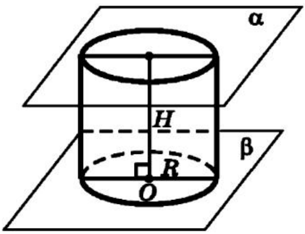


Рис. 8.41

прямой (рис. 8.39). Заданная кривая называется *направляющей*, а прямые – *образующими цилиндрической поверхности*.

Прямой круговой цилиндрической поверхностью называется поверхность, образованная всеми прямыми, проходящими через каждую точку заданной окружности перпендикулярно плоскости окружности (рис. 8.40). В дальнейшем эту поверхность будем кратко называть *цилиндрической*.

Цилиндром (*прямым круговым цилиндром*) называется геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, которые перпендикулярны образующим поверхности (рис. 8.41).

Поверхность цилиндра получается в результате вращения прямоугольника вокруг оси, содержащей одну из сторон прямоугольника.

Два круга, ограничивающих цилиндр, называются его *основаниями*. Прямая, проходящая через центры данных кругов, называется *осью цилиндра*. Отрезки, образующие цилиндрическую поверхность, называются *образующими цилиндра*. *Высотой цилиндра* называется перпендикуляр между его основаниями, *осевым сечением* – сечение, проходящее через ось цилиндра, *разверткой боковой поверхности* – прямоугольник со сторонами, равными длине окружности основания и длине образующей цилиндра.

Свойства цилиндра:

1) все образующие параллельны и равны между собой;

2) длина образующей равна высоте;

3) осевое сечение – прямоугольник, две стороны которого являются образующими цилиндра, а две другие – диаметрами его оснований;

4) сечением плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра, является круг, равный основанию цилиндра;

5) сечение плоскостью, проходящей через середину высоты цилиндра, делит цилиндр на два равных тела;

6) высота призмы, вписанной в цилиндр или описанной около него, равна высоте цилиндра;

7) около цилиндра всегда можно описать шар, центр которого лежит на середине отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра. При этом

$$R^2 = r^2 + 0{,}25H^2,$$

где R – радиус шара; r – радиус основания цилиндра; H – его высота;

8) шар можно вписать в цилиндр, только если цилиндр является равносторонним (т.е. если диаметр его основания равен высоте). Тогда радиус R оснований цилиндра и радиус r вписанного шара равны: $R = r = \dfrac{H}{2}$. Центр вписанного шара лежит на середине отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра.

Призма называется *вписанной в цилиндр*, если ее основания вписаны в основания цилиндра.

За *площадь боковой поверхности цилиндра* принимается предел, к которому стремится площадь боковой поверхности правильной призмы, вписанной в цилиндр, если количество сторон основания этой призмы неограниченно возрастает. Площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его боковой развертки:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH,$$

где R – радиус основания цилиндра; H – его высота.

Площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей его боковой поверхности и двух оснований:

$$S_{\text{полн}} = 2\pi R(H + R).$$

За *объем цилиндра* принимается предел, к которому стремится объем правильной призмы, вписанной в цилиндр, если количество сторон ее основания неограниченно возрастает. Объем цилиндра вычисляется по формуле

$$V = \pi R^2 H.$$

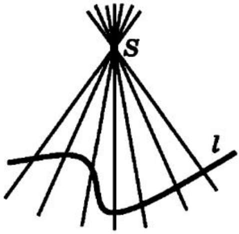


Рис. 8.42

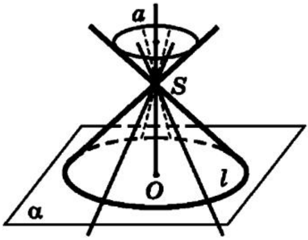


Рис. 8.43

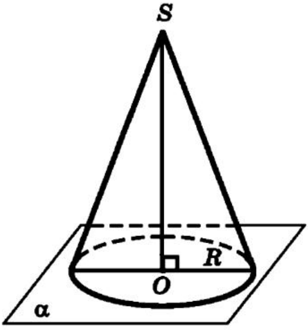


Рис. 8.44

Конус. *Конической поверхностью* называется поверхность, образованная всеми прямыми, проходящими через каждую точку данной кривой и точку вне кривой (рис. 8.42). Данная кривая называется *направляющей конической поверхности*, прямые – *образующими*, точка – *вершиной*.

Прямой круговой конической поверхностью называется поверхность, образованная всеми прямыми, проходящими через каждую точку заданной окружности и точку на прямой, которая перпендикулярна плоскости окружности и проходит через ее центр (рис. 8.43). В дальнейшем эту поверхность будем кратко называть *конической*.

Конусом (*прямым круговым конусом*) называется геометрическое тело, ограниченное частью прямой круговой конической поверхности (вместе с вершиной), расположенной по одну сторону от вершины, и плоскостью, которая параллельна плоскости направляющей окружности (рис. 8.44). Поверхность конуса получается в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей один из катетов треугольника.

Круг, ограничивающий конус, называется его *основанием*, вершина конической поверхности – *вершиной конуса*, отрезок, соединяющий вершину конуса с центром его основания, – *высотой конуса*. Отрезки, образующие коническую поверхность, называются *образующими конуса*. *Осью конуса* называется прямая, проходящая через вершину конуса и центр его основания.

Осевым сечением конуса называется сечение, проходящее через ось конуса, *разверткой боковой поверхности* – сектор, радиус которого равен длине образующей конуса, а длина дуги сектора – длине окружности основания конуса.

Свойства конуса:

1) все образующие равны между собой;

2) высота связана с радиусом R его основания и образующей l равенством $H^2 + R^2 = l^2$;

3) ось конуса является его осью симметрии, а любое осевое сечение – плоскостью симметрии;

4) осевое сечение представляет собой равнобедренный треугольник, основанием которого является диаметр основания конуса, а боковыми сторонами – образующие конуса;

5) сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, основанием которого является хорда основания конуса, а боковыми сторонами – образующие конуса;

6) сечение конуса плоскостью, проходящей через внутреннюю точку высоты конуса перпендикулярно его высоте, представляет собой круг, центр которого есть точка пересечения высоты и этой плоскости. Площадь такого круга

$$S_{\perp \text{сеч}} = \frac{\pi R^2 d^2}{H^2},$$

где R – радиус основания конуса; d – расстояние от сечения до вершины конуса; H – его высота;

7) в конус всегда можно вписать шар. Его центр лежит на оси конуса и совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник, который является осевым сечением конуса;

8) около конуса всегда можно описать шар. Его центр лежит на оси конуса и совпадает с центром окружности, описанной около треугольника, являющегося осевым сечением конуса.

Пирамида называется *вписанной в конус*, если основание пирамиды вписано в основание конуса, а ее боковые ребра являются образующими конуса.

За *площадь боковой поверхности конуса* принимается предел, к которому стремятся площади боковых поверхностей вписанных в этот конус правильных n-угольных пирамид, если количество n сторон основания неограниченно возрастает. Площадь боковой поверхности вычисляется по формуле

$$S_{\text{бок}} = \pi R l,$$

где R – радиус основания конуса; l – образующая.

Площадью полной поверхности конуса называется сумма площадей боковой поверхности и основания:

$$S_{\text{полн}} = \pi R(l + R).$$

За *объем конуса* принимается предел, к которому стремится объем правильной пирамиды, вписанной в конус, если количество сторон ее основания неограниченно возрастает. Объем вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

где H – высота конуса.

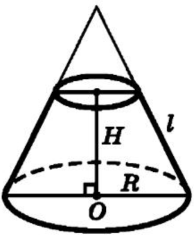


Рис. 8.45

Усеченный конус. *Усеченным конусом* называется часть конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию конуса (рис. 8.45). Поверхность усеченного конуса получается в результате вращения прямоугольной трапеции вокруг оси, содержащей боковую сторону трапеции, перпендикулярную основаниям.

Два круга, ограничивающих усеченный конус, называются его *основаниями*. *Высотой усеченного конуса* называется перпендикуляр между его основаниями. Отрезки образующих конуса, которые принадлежат усеченному конусу, называются его *образующими*. Прямая, проходящая через центры оснований, называется *осью усеченного конуса*. *Осевым сечением* называется сечение, проходящее через ось усеченного конуса.

Боковой поверхностью усеченного конуса называется часть конической поверхности, ограничивающая усеченный конус.

Свойства усеченного конуса:

1) все образующие равны между собой;

2) высота связана с радиусами оснований и образующей равенством

$$H^2 + (R - r)^2 = l^2,$$

где H – высота усеченного конуса; R – радиус нижнего основания; r – радиус верхнего основания; l – образующая;

3) в усеченный конус можно вписать шар тогда и только тогда, когда его образующая равна сумме радиусов оснований. Радиус этого шара $R_{\text{ш}} = \dfrac{H}{2}$;

4) около усеченного конуса всегда можно описать шар. Его центр лежит на оси данного конуса.

Для усеченного конуса верны формулы:

$$S_{\text{бок}} = \pi(R + r)l,$$

$$S_{\text{полн}} = \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2,$$

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr),$$

где $S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности усеченного конуса; $S_{\text{полн}}$ – площадь полной поверхности; V – объем.

8.9. Сфера и шар

Понятия сферы и шара, их свойства. *Сферой* называется множество всех точек пространства, равноудаленных от заданной точки – *центра сферы*. Отрезок, соединяющий центр сферы с любой ее точкой, называется *радиусом сферы*. *Хордой* называется отрезок, соединяющий две точки сферы, *диаметром* – хорда, проходящая через центр сферы (рис. 8.46).

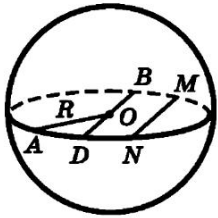


Рис. 8.46

Шар – это геометрическое тело, ограниченное сферой (рис. 8.46). Центр, радиус, хорда и диаметр сферы, ограничивающей шар, называются соответственно *центром*, *радиусом*, *хордой* и *диаметром шара*.

Сфера получается в результате вращения полуокружности вокруг своего диаметра. Шар можно рассматривать как тело, полученное при вращении полукруга вокруг оси, содержащей его диаметр. Сферой называется также поверхность шара.

Диаметральной плоскостью называется плоскость, проходящая через центр сферы (шара).

Большим кругом называется сечение шара диаметральной плоскостью, *большой окружностью* – сечение сферы диаметральной плоскостью, *касательной прямой к сфере* – прямая, имеющая со сферой только одну общую точку, называемую *точкой касания прямой* и *сферы*.

Плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку, называется *касательной плоскостью к сфере* (*шару*). Общая точка называется *точкой касания сферы* (*шара*) и *плоскости*.

Теорема. Для того чтобы плоскость была касательной к сфере (шару), необходимо и достаточно, чтобы эта плоскость была перпендикулярна радиусу сферы (шара), проведенному в точку касания.

Секущей плоскостью для сферы (*шара*) называется плоскость, имеющая со сферой (шаром) больше одной общей точки.

Концентрическими называются две сферы (два шара), имеющие общий центр.

Свойства сферы и шара:

1) все радиусы одной сферы (одного шара) равны между собой;

2) любой диаметр сферы (шара) радиуса R равен $2R$;

3) диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде;

4) прямая, касательная к сфере (шару), лежит в касательной плоскости и проходит через точку касания;

5) все касательные прямые, проходящие через одну точку сферы (шара), лежат в одной плоскости, касательной к данной сфере (шару);

6) отрезки касательных, проведенных из одной точки (лежащей вне сферы), равны;

7) всякое сечение сферы плоскостью есть окружность;

8) всякое сечение шара плоскостью есть круг, а основание перпендикуляра, проведенного из центра шара на плоскость сечения, есть центр круга, полученного в сечении;

9) если d – расстояние от центра сферы (шара) до секущей плоскости, то радиус r окружности (круга), полученного в результате сечения сферы (шара) данной плоскостью, равен $\sqrt{R^2 - d^2}$;

10) любая диаметральная плоскость сферы (шара) является плоскостью ее (его) симметрии и делит ее (его) на две равные части;

11) любой диаметр сферы (шара) является ее (его) осью симметрии;

12) центр сферы (шара) является ее (его) центром симметрии;

13) линия пересечения двух сфер есть окружность;

14) если две равные сферы радиуса R расположены так, что центр одной лежит на другой, то длина окружности, по которой эти сферы пересекаются, равна $\pi R\sqrt{3}$.

Для шара верны формулы:

$$S = 4\pi R^2, \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

где S – площадь поверхности шара (сферы); R – радиус шара; V – объем шара.

Шаровой и сферический сегменты. *Шаровым сегментом* называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью (рис. 8.47). Круг, получившийся в сечении, называется *основанием шарового сегмента*. Отрезок, соединяющий центр основания сегмента с точкой поверхности шара и перпендикулярный основанию, называется *высотой шарового сегмента*. Поверхность сферической части шарового сегмента называется *сферическим сегментом*.

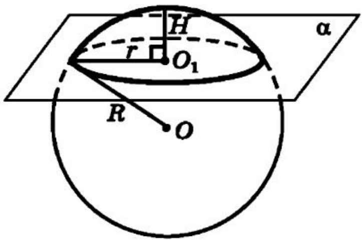


Рис. 8.47

Основанием сферических сегментов, на которые плоскость разбивает сферу, называется окружность, по которой секущая плоскость пересекает данную сферу, а *основанием шаровых сегментов*, на которые плоскость разбивает шар, – круг, по которому секущая плоскость пересекает данный шар.

Радиус r основания сферического (*шарового*) *сегмента*, полученного из сферы (шара) радиуса R, вычисляется по формуле

$$r = \sqrt{H(2R - H)},$$

где H – высота сегмента.

Для шарового сегмента верны формулы:

$$S = 2\pi RH, \qquad S_{\text{полн}} = 2\pi RH + \pi r^2, \qquad V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right),$$

где S – площадь сферической части шарового сегмента (площадь сферического сегмента); $S_{\text{полн}}$ – площадь полной поверхности шарового сегмента; V – объем шарового сегмента.

Шаровой слой и сферический пояс. *Шаровым слоем* называется часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями (рис. 8.48). Круги, получившиеся в сечении, называются *основаниями шарового слоя*. Перпендикуляр, опущенный из любой точки одного основания шарового слоя на другое основание, называется *высотой шарового слоя*. Поверхность сферической части шарового слоя называется *сферическим поясом*.

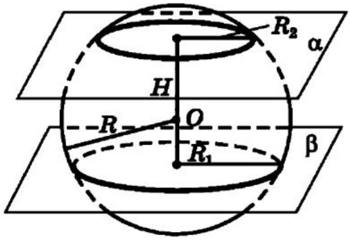


Рис. 8.48

Для шарового слоя верны формулы:

$$S_1 = \pi R_1^2, \qquad S_2 = \pi R_2^2, \qquad S = 2\pi RH,$$

$$S_{\text{полн}} = 2\pi RH + \pi R_1^2 + \pi R_2^2,$$

$$V = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi H(R_1^2 + R_2^2),$$

где S_1, S_2 – площади оснований; R_1, R_2 – радиусы оснований; S – площадь сферической части шарового слоя (площадь сферического пояса); R – радиус шара; H – высота шарового слоя; $S_{\text{полн}}$ – площадь полной поверхности; V – объем шарового слоя.

Шар, шаровой сегмент и шаровой слой можно рассматривать как геометрические тела вращения. При вращении полукруга вокруг оси, содержащей диаметр полукруга, получается шар, а при вращении соответствующих частей круга – части шара: шаровой сегмент и шаровой слой.

Шаровой сектор. *Шаровым сектором* называется геометрическое тело, полученное при вращении кругового сектора (с углом меньше 90°) вокруг оси, содержащей один из боковых радиусов, а также тело, которое дополняет этот шаровой сектор до шара. Шаровой сектор состоит из шарового сегмента и конуса (рис. 8.49, *а*) либо из шарового сегмента без конуса (рис. 8.49, *б*).

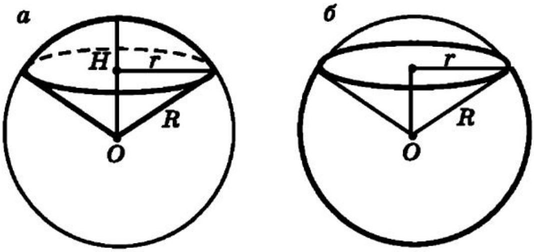


Рис. 8.49

Высотой шарового сектора называется высота части его сферической поверхности.

Для шарового сектора (рис. 8.49, *а*) верны формулы:

$$S = \pi R(r + 2H) \quad \text{или} \quad S = \pi R(\sqrt{2RH - H^2} + 2H),$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

где S – площадь поверхности шарового сектора; R – радиус шара; r – радиус основания сегмента; H – высота шарового сегмента; V – объем шарового сектора.

8.10. Комбинация геометрических тел

Шар, вписанный в многогранник или тело вращения. Шар называется *вписанным в многогранник*, если он касается всех его граней, а многогранник – *описанным около шара*.

Теоремы о вписанном шаре:

1) центр шара, вписанного в многогранник, находится от каждой из плоскостей, содержащих грани многогранника, на расстоянии, равном радиусу этого шара;

2) в призму можно вписать шар тогда и только тогда, когда в ее перпендикулярное сечение можно вписать круг, диаметр которого равен высоте призмы;

3) в прямую призму можно вписать шар тогда и только тогда, когда в основание призмы можно вписать круг диаметра, равного боковому ребру (или высоте) призмы;

4) если все боковые грани пирамиды образуют с ее основанием равные углы, то в такую пирамиду всегда можно вписать шар;

5) шар можно вписать в пирамиду, если в основание можно вписать круг, а вершина пирамиды ортогонально проецируется в центр этого круга;

6) шар можно вписать в любую треугольную пирамиду;

7) если в усеченную пирамиду можно вписать шар, то его радиус равен половине высоты этой пирамиды;

8) в любой правильный многогранник (тетраэдр, куб и др.) можно вписать шар.

Если в пирамиду можно вписать шар, то объем пирамиды вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{полн}} R_{\text{в}},$$

где $S_{\text{полн}}$ – площадь полной поверхности пирамиды; $R_{\text{в}}$ – радиус вписанного шара.

Шар называется *вписанным в цилиндр*, если он касается оснований и каждой образующей цилиндра. Цилиндр соответственно называется *описанным около шара*.

Для того чтобы шар можно было вписать в цилиндр, необходимо и достаточно, чтобы высота цилиндра равнялась диаметру его основания (т.е. осевое сечение – квадрат). Радиус вписанного шара $R_{\text{в}} = \frac{h}{2}$, где h – высота цилиндра.

Шар называется *вписанным в конус*, если он касается основания и каждой образующей конуса. Конус соответственно называется *описанным около шара*.

Шар можно вписать в любой конус; центр вписанного шара лежит на оси конуса и совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник, который является осевым сечением конуса.

Радиус $R_{\text{в}}$ вписанного в конус шара определяется по формулам:

$$R_{\text{в}} = R\,\text{tg}\frac{\alpha}{2}, \qquad R_{\text{в}} = \frac{S_{\Delta}}{R+l},$$

где R – радиус основания конуса; α – угол между образующей и диаметром основания; S_{Δ} – площадь осевого сечения конуса; l – его образующая.

Шар называется *вписанным в усеченный конус*, если он касается оснований и каждой образующей усеченного конуса, а усеченный конус называется *описанным около шара.*

Для того чтобы шар можно было вписать в усеченный конус, необходимо и достаточно, чтобы образующая усеченного конуса равнялась сумме радиусов оснований. Радиус вписанного шара $R_в = \frac{h}{2}$, где h – высота усеченного конуса.

Шар можно вписать в тело вращения, если в осевое сечение можно вписать круг.

Шар, описанный около многогранника или тела вращения. Шар называется *описанным около многогранника*, если все вершины многогранника лежат на шаре, а многогранник называется *вписанным в шар*.

Теоремы об описанном шаре:

1) если около многогранника можно описать шар, то около любой его грани можно описать круг;

2) центр шара, описанного около многогранника, находится от каждой вершины многогранника на расстоянии, равном радиусу этого шара;

3) около правильной призмы можно описать шар, центр которого является серединой отрезка, соединяющего центры оснований призмы;

4) для того чтобы шар можно было описать около призмы, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямой и около основания можно было описать круг;

5) около цилиндра, радиус которого R и высота H, можно описать шар радиуса

$$R_ш = \sqrt{R^2 + 0{,}25H^2};$$

6) для того чтобы шар можно было описать около пирамиды, необходимо и достаточно, чтобы около основания можно было описать круг;

7) шар можно описать около любой треугольной пирамиды;

8) шар можно описать около любой правильной пирамиды.

Шар называется *описанным около цилиндра*, если окружности оснований цилиндра лежат на сфере. Цилиндр соответственно называется *вписанным в шар*.

Шар называется *описанным около конуса*, если окружность основания и вершина конуса лежат на сфере, которая ограничивает шар. Конус соответственно называется *вписанным в шар*.

Шар можно описать около любого конуса. Радиус описанного шара равен радиусу круга, описанного около осевого сечения конуса.

Шар называется *описанным около усеченного конуса*, если окружности оснований конуса лежат на сфере. Усеченный конус соответственно называется *вписанным в шар*.

Шар можно описать около любого усеченного конуса.

Многогранники и тела вращения. Цилиндр называется *описанным около призмы*, если круги его оснований описаны около оснований призмы, а все боковые ребра призмы являются образующими цилиндра. Призма соответственно называется *вписанной в цилиндр*.

Для того чтобы около призмы можно было описать цилиндр, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямой и около ее основания можно было описать круг.

Цилиндр называется *вписанным в призму*, если окружности его оснований вписаны в основания призмы, а боковая поверхность цилиндра касается всех боковых граней призмы. Призма соответственно называется *описанной около цилиндра*.

Для того чтобы в призму можно было вписать цилиндр, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямой и в ее основание можно было вписать круг.

Конус называется *описанным около пирамиды*, если круг основания конуса описан около основания пирамиды, а все боковые ребра пирамиды являются образующими конуса. Пирамида соответственно называется *вписанной в конус*.

Для того чтобы около пирамиды можно было описать конус, необходимо и достаточно, чтобы боковые ребра пирамиды были равны.

Конус называется *вписанным в пирамиду*, если круг его основания вписан в основание пирамиды, а боковая поверхность конуса касается всех боковых граней пирамиды. Пирамида соответственно называется *описанной около конуса*.

Для того чтобы в пирамиду можно было вписать конус, необходимо и достаточно, чтобы в основание пирамиды можно было вписать круг, а вершина пирамиды ортогонально проецировалась в центр этого круга.

9
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

9.1. Матрицы

Понятие матрицы. Пусть M – некоторое множество чисел. *Матрицей размера m на n* ($m \times n$) (*числовой матрицей*) называется прямоугольная таблица, образованная из $m \cdot n$ чисел множества M и состоящая из m строк и n столбцов:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Вместо квадратных скобок для обозначения матрицы применяются также круглые скобки или прямые двойные линии. Матрицы обозначают прописными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \dots$.

Числа a_{ij} ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$), которые составляют матрицу, называются ее *элементами*, причем в записи a_{ij} первый индекс обозначает номер строки, а второй – номер столбца.

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ составляют i-ю строку, а элементы $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ – j-й столбец матрицы. Чтобы указать, из каких элементов состоит матрица A, используют запись $A = [a_{ij}]$, где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Матрицы A и B называются *равными* ($A = B$), если они имеют одинаковый размер и все элементы, стоящие на соответствующих местах, равны.

Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой*, а состоящая из одного столбца – *матрицей-столбцом*.

Нулевой называется матрица, все элементы которой равны нулю; ее обозначают буквой O.

По характеру распределения нулей среди элементов выделяют также *трапециевидную матрицу*:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1m} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2m} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{mm} & \ldots & a_{mn} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица A, число строк которой равно числу столбцов, т.е. $m = n$, называется *квадратной порядка n* (указывая порядок, ее можно обозначить A_n).

В квадратной матрице

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (9.1)$$

элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ составляют *главную диагональ*, а элементы $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{n1}$ – *побочную диагональ.*

Диагональной называется квадратная матрица (9.1), все элементы которой, стоящие не на главной диагонали, равны нулю. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной* и обозначается буквой E.

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, – нули. Различают *верхнюю треугольную* и *нижнюю треугольную матрицы* (соответственно A и B):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Квадратная матрица $A_n = [a_{ij}]$ называется *симметричной*, если $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = \overline{1, n})$.

Если элементами матрицы являются функции, то матрица называется *функциональной*.

Действия над матрицами. *Суммой* (*разностью*) *матриц* $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называется такая матрица $C_{m\times n} = A_{m\times n} \pm B_{m\times n}$, что $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ $(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ *на число* λ называется такая матрица $B_{m\times n}$, что $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ $(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$. Произведение матрицы A на число λ обозначается λA.

Умножение матрицы A на матрицу B рассматривается только в том случае, когда матрицы A и B *согласованны*, т.е. число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B (если A – матрица размера $m \times n$, а B – размера $n \times k$, где $m, n, k \in \mathbf{N}$).

Произведением AB *матрицы* $A_{m\times n}$ *на матрицу* $B_{n\times k}$ называется матрица $C_{m\times k}$, элементы которой c_{ij} находят по формуле

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}, \qquad (9.2)$$

т.е. $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$.

Из формулы (9.2) следует, что элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A и соответствующих элементов j-го столбца матрицы B.

Из существования произведения AB не следует существование произведения BA. В случае их существования возможно, что $BA \neq AB$. Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются *перестановочными* (или *коммутирующими*).

Свойства операций над матрицами. Если определены приведенные операции, то:

1) $A + O = A$;

2) $A + B = B + A$ – коммутативность сложения;

3) $A + (B + C) = (A + B) + C$ – ассоциативность сложения;

4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ – дистрибутивность относительно суммы чисел;

5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ – дистрибутивность относительно суммы матриц;

6) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$, где $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, – ассоциативность умножения на число;

7) $A(BC) = (AB)C$ – ассоциативность умножения матриц;

8) $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$ – дистрибутивность суммы матриц.

Целой положительной степенью A^k $(k > 1)$ *квадратной матрицы* называется произведение k матриц, каждая из которых равна A. *Нулевой степенью квадратной матрицы* A называется единичная матрица E того же порядка, что и A, т. е. $A^0 = E$.

Выражение $P(A) = a_0 A^k + a_1 A^{k-1} + \ldots + a_k E$ называется *многочленом от матрицы* A. Если $P(A)$ – нулевая матрица, то A называется *корнем многочлена*.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется *транспонированной*. Ее обозначают A^T:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Операция нахождения матрицы A^T называется *транспонированием матрицы*.

Свойства операции транспонирования:

1) $(A^T)^T = A$; 2) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

3) $(A + B)^T = A^T + B^T$, где матрицы A, B имеют одинаковый размер;

4) $(AB)^T = B^T A^T$, где матрица A согласована с матрицей B.

9.2. Определители

Понятие определителя и его вычисление. Понятие определителя (детерминанта) вводится только для квадратной матрицы.

Если $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, то *определителем второго порядка* называется число

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Если $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, то *определителем третьего порядка* называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (9.3)$$

Определитель матрицы A обозначают также $|A|$ или Δ.

Определитель третьего порядка можно вычислить по *правилу треугольников* (*правило Саррюса*), которое символически записывается в следующем виде:

(соединенные элементы перемножаются и полученные произведения складываются). В результате приходят к выражению, стоящему в правой части равенства (9.3).

Способ вычисления определителя третьего порядка *разложением по первой строке* задается равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (9.4)$$

Этот подход обобщается на определители порядка n $(n > 1)$, т.е. на определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (9.5)$$

Минором элемента a_{ij} определителя (9.5) называется определитель M_{ij}, который получается из заданного определителя (9.5) вычеркиванием i-й строки и j-го столбца $(i,\ j = \overline{1, n})$.

Определитель n-го порядка определяется как число:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} \qquad (n > 1). \quad (9.6)$$

Равенство (9.6) обобщает равенство (9.4). Оно задает способ вычисления определителя n-го порядка $(n \geq 2)$ разложением по первой строке.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} $(i,\ j = \overline{1, n})$ называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема Лапласа. Определитель равен сумме произведений элементов i-й строки $(i = \overline{1, n})$ на соответствующие алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Аналогичное утверждение справедливо для j-го столбца $(j = \overline{1, n})$.

Основные свойства определителей:

1) если поменять местами две строки (два столбца) определителя, то он изменит знак на противоположный;

2) если определитель содержит две одинаковые строки (два одинаковых столбца), то он равен нулю;

3) умножение всех элементов одной строки (одного столбца) определителя на число k ($k \in \mathbf{R}$) равносильно умножению самого определителя на k;

4) если все элементы одной строки (одного столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю;

5) если соответствующие элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то он равен нулю;

6) если каждый элемент i-й строки определителя ($i \in \mathbf{N}$) представляет собой сумму двух слагаемых, то данный определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, один из которых в i-й строке содержит первые из упомянутых слагаемых, а другой – вторые; остальные элементы одинаковы (аналогично для столбца);

7) если к элементам одной строки определителя прибавить элементы другой его строки, умноженные на число k ($k \in \mathbf{R}$), то величина определителя не изменится.

Справедливы формулы:

$$|AB| = |A||B|, \quad \left|A^n\right| = |A|^n \quad (n \in \mathbf{N}), \quad \left|A^T\right| = |A|.$$

9.3. Обратная матрица

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля: $|A| \neq 0$.

Матрица A^{-1} называется *обратной матрицей* для квадратной невырожденной матрицы A, если выполняется условие $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Матрица A имеет обратную матрицу A^{-1} тогда и только тогда, когда матрица A – невырожденная. Невырожденная матрица A имеет единственную обратную матрицу A^{-1}.

Если матрица (9.1) невырожденная, то обратную матрицу A^{-1} находят по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где $|A|$ – определитель матрицы A; A_{ij} – алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) матрицы A.

Свойства обратной матрицы:

1) $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$; 2) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

3) $\left(A^{k}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{k}$, где $k \in \mathbf{N}$; 4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

5) $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$.

9.4. Системы линейных алгебраических уравнений

Понятие системы линейных алгебраических уравнений. *Линейной системой m уравнений с n неизвестными* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{9.7}$$

где числа $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ – коэффициенты системы.

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

называется *матрицей системы*. Числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ в правых частях системы называются *свободными членами*. Если все свободные члены равны нулю, то система называется *однородной*, если же хотя бы один из них не равен нулю, то система называется *неоднородной*.

Решением системы называется всякая совокупность n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая, будучи подставлена в систему, превращает каждое ее уравнение в тождество. Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*. Если система не имеет решений, то она называется *несовместной*. Совместная система, имеющая единственное решение, называется *определенной*, а система, имеющая более одного решения, – *неопределенной*. *Решить систему* – значит определить, совместна она или нет, и в случае совместности найти множество всех ее решений.

Методы решения систем. Основным методом решения систем является метод Гаусса. Он базируется на понятии элементарных преобразований строк матрицы системы.

Элементарными преобразованиями строк называются:

1) перестановка строк;

2) умножение строки на одно и то же число λ ($\lambda \neq 0$);

3) прибавление к одной строке другой строки, умноженной на число.

В результате элементарных преобразований строк матрицы A получают *эквивалентную матрицу* B, что записывают $A \sim B$.

Метод Гаусса. Он состоит в следующем:

1) записывают *расширенную матрицу системы*:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right];$$

2) используют элементарные преобразования строк матрицы; при этом сводят матрицу A системы (как часть матрицы $[A|B]$) к треугольной или трапециевидной;

3) для преобразованной таким образом матрицы $[A|B]$ записывают соответствующую систему уравнений;

4) решают полученную систему начиная с последнего уравнения.

Если в результате использования метода Гаусса получили систему, у которой количество неизвестных больше количества уравнений, то такая система имеет бесконечное множество решений. Если же система содержит уравнение вида $0 \cdot x_k = b'_k$, где $b'_k \neq 0$, то она не имеет решения.

В качестве примера решим методом Гаусса систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -2\\ 2 & -3 & -1 & -6\\ 3 & 4 & 3 & -5\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -5 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right].$$

Последняя матрица получена в результате последовательного умножения первой строки матрицы $[A|B]$ на -2 и прибавления ко второй строке, а также умножения ее на -3 и прибавления к третьей строке. Далее переставим третью и вторую строки:

$$[A|B]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -5 & -3 & -2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 3\end{array}\right].$$

Итоговая матрица получена умножением второй строки предыдущей матрицы на 5 и прибавлением к третьей строке. Используя ее, возвращаемся к системе уравнений

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-2,\\ \quad\;\; x_2 \qquad\;\; =1,\\ \qquad\quad -3x_3=3,\end{cases}$$

которую решаем начиная с последнего уравнения: $x_3=-1$, $x_2=1$, x_1+1- $-1=-2$, т.е. $x_1=-2$. Получаем ответ: $(-2, 1, -1)$.

Если в системе (9.7) $m=n$, то она имеет вид

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases} \tag{9.8}$$

Определителем системы (9.8) называется число

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Если $\Delta\neq 0$, то система называется *невырожденной*.

Для решения невырожденной системы (9.8) используют метод Крамера и метод обратной матрицы.

М е т о д К р а м е р а. Необходимо:

1) вычислить определитель системы Δ;

2) в определителе Δ заменить поочередно столбцы элементов столбцом свободных членов и вычислить определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix};$$

3) вычислить значения $x_1, x_2, ..., x_n$ по *формулам Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \dots, \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta};$$

4) используя найденные значения, записать решение: $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

З а м е ч а н и е. Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Если $\Delta = 0$, то система не имеет решения или имеет бесконечное множество решений.

М е т о д о б р а т н о й м а т р и ц ы. Необходимо:

1) записать систему в матричном виде:

$$AX = B, \tag{9.9}$$

где A – матрица системы; X – матрица-столбец неизвестных; B – матрица-столбец свободных членов;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix};$$

2) решить матричное уравнение (9.9) умножением слева на обратную матрицу A^{-1}, т.е.

$$X = A^{-1}B.$$

Совокупность полученных значений неизвестных и дает решение системы.

З а м е ч а н и е. Метод Гаусса является наиболее общим, его используют для систем и в том случае, если $m = n$, и в том, если $m \neq n$. При этом система (в случае $m = n$) может быть вырожденной и невырожденной.

10
ВЕКТОРЫ

10.1. Векторы и линейные операции над ними. Проекция

Понятие вектора. Величина, которая полностью определяется заданием числового значения, называется *скалярной величиной* или *скаляром* (например, длина, площадь, объем, масса – скалярные величины).

Величина, которая определяется совокупностью числового значения и направления, называется *векторной величиной* (например, сила, скорость, ускорение и т.д.).

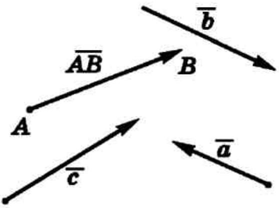


Рис. 10.1

Вектором называется направленный отрезок. Если начало вектора находится в точке A, а конец – в точке B, то вектор обозначается $\overline{AB}$ (или $\overrightarrow{AB}$). Если же начало и конец вектора не указываются, то его обозначают $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$ (или $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}, \ldots$, или **a**, **b**, **c**, ...). На рисунке направление вектора изображается стрелкой (рис. 10.1).

Через $\overline{BA}$ обозначают вектор, направленный противоположно вектору $\overline{AB}$. Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым* и обозначается $\overline{0}$. Его направление является неопределенным, т.е. такому вектору можно приписать любое направление.

Длиной или *модулем вектора* называется расстояние между его началом и концом. Записи $\left|\overline{AB}\right|$ и $|\overline{a}|$ обозначают модули векторов $\overline{AB}$ и $\overline{a}$ соответственно. Длина нулевого вектора равна нулю.

Единичным или *нормированным вектором* называется вектор, длина которого равна единице.

Векторы $\overline{a}, \overline{b}$ называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой, и *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

Два вектора называются *равными*, если они одинаково направлены и равны по длине. На рис. 10.2 изображены пары равных векторов: $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{a} = \overline{b}$.

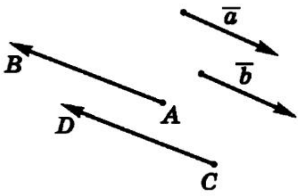


Рис. 10.2

Различают векторы связанные, скользящие и свободные. *Связанный вектор* – это вектор с фиксированным началом и фиксированным направлением, *скользящий* – вектор с фиксированным направлением, начало которого «скользит» по прямой, *свободный* – вектор, который может переноситься параллельно самому себе. Свободный вектор $\overline{a}$ – это каждый вектор из семейства равных ему векторов.

Углом между векторами $\overline{a}, \overline{b}$ называется наименьший угол φ, на который надо повернуть вектор $\overline{a}$, чтобы его направление совпало с направлением вектора $\overline{b}$ (обозначают $\varphi = (\overline{a}, \widehat{\ } \overline{b})$, где $0 \le \varphi \le \pi$).

Линейные операции над векторами. К *линейным операциям* над векторами относятся умножение вектора на число и сложение векторов.

Произведением вектора $\overline{a}$ *на число* $\lambda\,(\lambda \in \mathbf{R})$ называется вектор, обозначаемый $\overline{\lambda a}$, модуль которого равен $|\lambda||\overline{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$. Если $\lambda = 0$, то $0 \cdot \overline{a} = \overline{0}$. Вектор $(-1) \cdot \overline{a} = -\overline{a}$ является противоположным вектору $\overline{a}$.

Если $\overline{a} \neq \overline{0}$, то для любого вектора $\overline{b}$, коллинеарного $\overline{a}$, существует единственное число λ, удовлетворяющее равенству $\overline{b} = \lambda \overline{a}$.

Суммой векторов $\overline{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ называется вектор, обозначаемый $\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \ldots + \overline{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i$, начало которого находится в начале первого вектора $\overline{a}_1$, а конец – в конце последнего вектора $\overline{a}_n$ ломаной линии, составленной из последовательности векторов-слагаемых (рис. 10.3). При условии, что начало каждого следующего вектора совмещено с концом предыдущего, это пра-

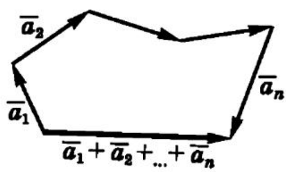


Рис. 10.3

вило сложения называется *правилом замыкания ломаной*. В случае суммы двух векторов оно называется *правилом треугольника* (рис. 10.4). Правило треугольника равносильно *правилу параллелограмма* (рис. 10.5), для использования которого совмещают начала двух векторов. Тогда суммой $\overline{a}+\overline{b}$ является вектор – диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}$.

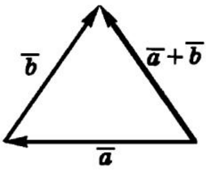


Рис. 10.4

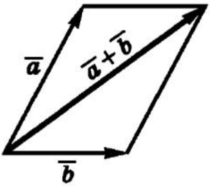


Рис. 10.5

Найти сумму трех некомпланарных векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ в пространстве можно также по *правилу параллелепипеда* (рис.10.6). Для этого начала векторов совмещают. Суммой векторов $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$, имеющих общее начало, является вектор – диагональ параллелепипеда с началом в той же точке.

Свойства линейных операций над векторами:

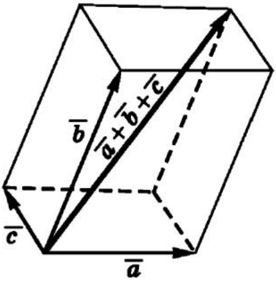


Рис. 10.6

1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$;

2) $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$;

3) $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$;

4) $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$;

5) $\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}\quad(\lambda\in\mathbf{R})$;

6) $(\lambda+\beta)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\beta\overline{a}\quad(\lambda,\beta\in\mathbf{R})$;

7) $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$;

8) $\lambda\cdot\overline{0}=\overline{0}\quad(\lambda\in\mathbf{R})$;

9) $\lambda(\beta\overline{a})=(\lambda\beta)\overline{a}\quad(\lambda,\beta\in\mathbf{R})$.

Разностью $\overline{a}-\overline{b}$ *векторов* называется вектор $\overline{a}+(-1)\overline{b}$. Для его построения используют *правило треугольника*. Для этого начала векторов $\overline{a}, \overline{b}$ совмещают. Вектор разности является вектором третьей стороны треугольника, причем его конец совпадает с концом вектора-уменьшаемого (рис. 10.7).

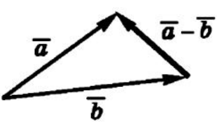


Рис. 10.7

Проекция вектора. Прямая l с заданным на ней направлением, принимаемым за положительное, называется *осью* l.

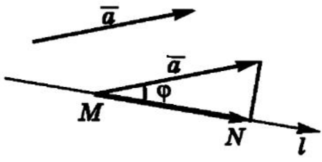


Рис. 10.8

Если построить перпендикулярные проекции на ось l начала и конца вектора $\overline{a}$, то полученный на оси вектор (с соответствующими началом и концом) называется *геометрической проекцией вектора* $\overline{a}$ *на ось* l ($\overline{MN}$ на рис. 10.8).

Алгебраической проекцией вектора $\overline{a}$ *на ось* l называется число

$$\text{пр}_l\overline{a} = |\overline{a}|\cos\varphi, \tag{10.1}$$

где φ – угол между положительным направлением оси l и направлением вектора $\overline{a}$ $(0 \le \varphi \le \pi)$. Алгебраическую проекцию называют просто *проекцией*.

Проекция вектора $\overline{a}$, определенная равенством (10.1), характеризуется длиной соответствующей геометрической проекции (длиной MN на рис. 10.8), взятой со знаком «+», если $0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, и со знаком «–», если $\dfrac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$. При $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ выполняется $\text{пр}_l\overline{a} = 0$.

Свойства проекции. Пусть $\overline{a}, \overline{b}$ – векторы. Тогда:

1) если $\overline{a} = \overline{b}$, то $\text{пр}_l\overline{a} = \text{пр}_l\overline{b}$;

2) $\text{пр}_l(\overline{a} + \overline{b}) = \text{пр}_l\overline{a} + \text{пр}_l\overline{b}$;

3) $\text{пр}_l(\beta\overline{a}) = \beta\,\text{пр}_l\overline{a}$ $(\beta \in \mathbf{R})$.

10.2. Координаты вектора

Базис. Вектор вида $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{a}_n$, где $\lambda_k \in \mathbf{R}$, $k = \overline{1, n}$, называется *линейной комбинацией векторов* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$. Если вектор $\overline{a}$ представлен как линейная комбинация векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$, то говорят, что он *разложен по векторам* $\overline{a}_k$ $(k = \overline{1, n})$.

Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbf{R}$, одновременно не равные нулю, такие, что выполняется равенство

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n = \overline{0}. \qquad (10.2)$$

Если равенство (10.2) выполняется только в случае $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, то векторы называются *линейно независимыми.*

Свойства линейной зависимости:

1) любые два коллинеарных вектора линейно зависимы, а два неколлинеарных вектора на плоскости линейно независимы;

2) три компланарных вектора в пространстве линейно зависимы, а три некомпланарных вектора линейно независимы;

3) всякие три вектора на плоскости линейно зависимы;

4) всякие четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

Базисом на плоскости (в $\mathbf{R}^2$) называют два неколлинеарных вектора этой плоскости, взятых в определенном порядке.

Если на плоскости выбран базис $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$, то любой вектор $\overline{a}$ этой плоскости можно разложить по векторам $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$, и такое разложение единственно.

Базисом в пространстве (в $\mathbf{R}^3$) называют три некомпланарных вектора, взятых в определенном порядке.

Если в пространстве $\mathbf{R}^3$ выбран базис $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$, то любой вектор $\overline{a}$ можно разложить по векторам $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$, и такое разложение единственно.

Если $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ – базис в $\mathbf{R}^3$ и $\overline{a} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3$, то числа x_1, x_2, x_3 называют *координатами вектора* $\overline{a}$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ и записывают: $\overline{a} = (x_1, x_2, x_3)$.

При умножении вектора $\overline{a} = (x_1, x_2, x_3)$ на число $\lambda \in \mathbf{R}$ все его координаты умножаются на это число:

$$\lambda\overline{a} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$

При сложении (вычитании) векторов $\overline{a} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\overline{b} = (y_1, y_2, y_3)$ складываются (вычитаются) их соответствующие координаты:

$$\overline{a} \pm \overline{b} = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, x_3 \pm y_3).$$

Аналогично определяются координаты векторов и линейные операции над векторами, заданными в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ на плоскости (в таком случае отсутствует третья координата).

Система координат. *Общей декартовой системой координат на плоскости* называется совокупность фиксированной точки O и некоторого базиса $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$. *Общей декартовой системой координат в пространстве* называется совокупность фиксированной точки O и некоторого базиса $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$. Точка O называется *началом системы координат,* а прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, – *осями координат.* Числовые коэффициенты в разложении вектора $\overline{a}$ по векторам $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ называются *декартовыми* (*аффинными*) *координатами вектора* $\overline{a}$ в системе координат $\{O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ (то же самое в случае вектора $\overline{a}$ на плоскости и системы координат $\{O, \overline{e}_1, \overline{e}_2\}$).

Базис называется *ортонормированным,* если базисные векторы попарно ортогональны и длина каждого из них равна единице.

Система координат на плоскости с ортонормированным базисом $\{\overline{i}, \overline{j}\}$, где $\overline{i} = (1, 0)$, $\overline{j} = (0, 1)$, называется *прямоугольной декартовой системой координат на плоскости* (рис. 10.9), а векторы $\overline{i}$, $\overline{j}$ – *ортами координатных осей Ox* и *Oy* соответственно. Прямоугольная декартова система координат на плоскости обозначается также Oxy.

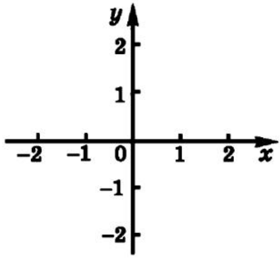


Рис. 10.9

Система координат в пространстве с ортонормированным базисом $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, где $\overline{i} = (1, 0, 0)$, $\overline{j} = (0, 1, 0)$, $\overline{k} = (0, 0, 1)$, называется *прямоугольной декартовой системой координат в пространстве* (рис. 10.10), а векторы $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – *ортами координатных осей Ox, Oy, Oz* соответственно. Как правило, рассматривают прямоугольную декартову систему координат с положительной ориентацией. Это означает, что с конца третьего векто-

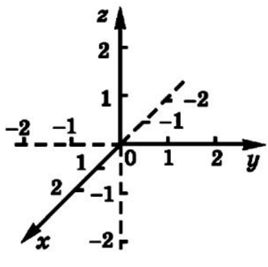


Рис. 10.10

ра $\overline{k}$ наименьший поворот вектора $\overline{i}$ до положения вектора $\overline{j}$ наблюдается как поворот против хода часовой стрелки. Прямоугольная декартова система координат на плоскости обозначается также $Oxyz$.

Прямая Ox называется *осью абсцисс*, Oy – *осью ординат*, Oz – *осью аппликат*. Плоскости, проходящие через две оси координат, называют *координатными плоскостями*: xOy, yOz, zOx.

Любой вектор $\overline{a}$ можно разложить по базису $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ единственным образом:

$$\overline{a} = x_a\overline{i} + y_a\overline{j} + z_a\overline{k},$$

т.е. $\overline{a} = (x_a, y_a, z_a)$. Числа x_a, y_a, z_a называются *прямоугольными декартовыми координатами вектора* $\overline{a}$.

Формула длины вектора:

$$|\overline{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}.$$

Вектор $\overline{OM}$ называется *радиусом-вектором точки* M.

Разложение радиуса-вектора $\overline{OM}$ точки $M(x, y, z)$ по ортам $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ имеет вид $\overline{OM} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, т.е. $\overline{OM} = (x, y, z)$. Такие же координаты имеет точка M, т.е. $M(x, y, z)$.

Операции над векторами в координатной форме. Для произвольных точек $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ и векторов $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ справедливы формулы:

$$\overline{a} \pm \overline{b} = (x_1 \pm y_1,\ x_2 \pm y_2,\ x_3 \pm y_3),$$

$$\lambda\overline{a} = (\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ \lambda z),$$

$$\overline{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A),$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Вектор $\overline{a}$ коллинеарен вектору $\overline{b}$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Направление вектора $\overline{a} = (x_a, y_a, z_a)$ определяется углами α, β, γ, образованными вектором $\overline{a}$ с положительными направлениями осей Ox, Oy и Oz соответственно. Косинусы этих углов называются *направляющими косинусами вектора* $\overline{a}$ и определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{x_a}{|\overline{a}|} = \frac{x_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{y_a}{|\overline{a}|} = \frac{y_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z_a}{|\overline{a}|} = \frac{z_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}}.$$

Если $\overline{e}$ – единичный вектор, то $\overline{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Направляющие косинусы связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

10.3. Произведения векторов

Скалярное произведение. *Скалярным произведением векторов* $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число (обозначаемое $(\overline{a}, \overline{b})$), равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi.$$

Скалярное произведение обозначают также $\overline{a}\cdot\overline{b}$.

Основные свойства скалярного произведения векторов:

1) $(\overline{a}, \overline{a}) = |\overline{a}|^2 = (\overline{a})^2$;

2) $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$;

3) $(\lambda\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{a}, \lambda\overline{b}) = \lambda(\overline{a}, \overline{b})$, где $\lambda \in \mathbf{R}$;

4) $(\overline{a}, \overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{a}, \overline{c})$;

5) два ненулевых вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$.

Справедливы формулы:

$$|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}, \qquad \cos\varphi = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}|\,|\overline{b}|},$$

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}|\ \text{пр}_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}|\ \text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}.$$

Физический смысл скалярного произведения: скалярное произведение равно работе постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения:

$$A = (\overline{F}, \overline{s}),$$

где $\overline{F}$ – сила; $\overline{s}$ – вектор перемещения.

Если в прямоугольной системе координат векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими координатами: $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$(\overline{a}, \overline{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Угол φ между векторами $\overline{a}, \overline{b}$ находят из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

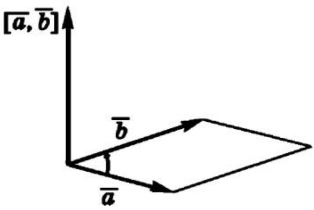


Рис. 10.11

Векторное произведение. *Векторным произведением векторов* $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор (обозначаемый $[\overline{a}, \overline{b}]$), удовлетворяющий следующим условиям (рис. 10.11):

1) вектор $[\overline{a}, \overline{b}]$ перпендикулярен каждому из векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

2) для модуля вектора $[\overline{a}, \overline{b}]$ справедливо равенство

$$\left|[\overline{a}, \overline{b}]\right| = |\overline{a}|\,|\overline{b}|\sin(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}); \tag{10.3}$$

3) упорядоченная тройка векторов $\overline{a}, \overline{b}, [\overline{a}, \overline{b}]$ – правая.

Векторное произведение обозначают также $\overline{a} \times \overline{b}$.

Условие (10.3) определяет *геометрический смысл векторного произведения*: модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}$.

Свойства векторного произведения векторов:

1) $[\overline{a}, \overline{b}] = -[\overline{b}, \overline{a}]$;

2) $[\lambda\overline{a}, \overline{b}] = [\overline{a}, \lambda\overline{b}]$, $\lambda \in \mathbf{R}$;

3) $[\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}] = [\overline{a}, \overline{c}] + [\overline{b}, \overline{c}]$;

4) два ненулевых вектора $\overline{a}, \overline{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $[\overline{a}, \overline{b}] = 0$.

Если $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то для вычисления векторного произведения в координатной форме верна формула

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

где определитель целесообразно вычислять разложением по первой строке.

В качестве примера вычислим векторное произведение $[\overline{a}, \overline{b}]$ векторов $\overline{a} = (-1, 2, 3)$, $\overline{b} = (-2, 1, 4)$:

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k} = (5,\ -2,\ 3).$$

Двойным векторным произведением векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называется вектор (обозначаемый $[\,[\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}\,]$), который равен векторному произведению вектора $[\overline{a}, \overline{b}]$ и вектора $\overline{c}$.

Двойное векторное произведение – это вектор, который компланарен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Для всяких нулевых векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ справедлива формула

$$\left[[\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}\right] = (\overline{a}, \overline{c})\overline{b} - (\overline{b}, \overline{c})\overline{a},$$

где $(\overline{a}, \overline{c})$, $(\overline{b}, \overline{c})$ – скалярные произведения.

Смешанное произведение. *Смешанным произведением векторов* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называется число (обозначаемое $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$), которое равно скалярному произведению вектора $[\overline{a}, \overline{b}]$ и вектора $\overline{c}$:

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = ([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}).$$

Смешанное произведение обозначают еще $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$.

Свойства смешанного произведения векторов:

1) $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{b}, \overline{c}, \overline{a}) = (\overline{c}, \overline{a}, \overline{b}) = -(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}) = -(\overline{c}, \overline{b}, \overline{a}) = -(\overline{a}, \overline{c}, \overline{b})$;

2) $(\beta\overline{a}_1 + \lambda\overline{a}_2, \overline{b}, \overline{c}) = \beta(\overline{a}_1, \overline{b}, \overline{c}) + \lambda(\overline{a}_2, \overline{b}, \overline{c})$, $\beta, \lambda \in \mathbf{R}$;

3) тройка векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ является правой тогда и только тогда, когда $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) > 0$, и левой, когда $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) < 0$;

4) три ненулевых вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 0$.

Геометрический смысл смешанного произведения: модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$:

$$V = \left|(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})\right|.$$

Если $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то для вычисления смешанного произведения в координатной форме верна формула

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

10.4. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат

Полярная система координат. Полярная система координат задается на плоскости как совокупность фиксированной точки O (*полюс*) и оси Op (*полярная ось*).

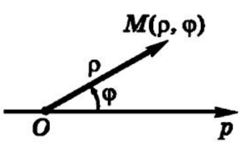


Рис. 10.12

Положение любой точки M на плоскости однозначно определяется расстоянием ρ ($\rho \geq 0$) от полюса O до точки M и *полярным углом* φ между полярной осью и радиусом-вектором $\overline{OM}$ (рис. 10.12).

Полярный угол φ определяется величиной поворота от полярной оси в положительном направлении (тогда считают $0 \leq \varphi < 2\pi$) или в положительном и отрицательном направлениях (тогда $-\pi < \varphi \leq \pi$). Координаты ρ, φ называются *полярными координатами* точки.

Полюс O имеет первой координатой число 0, второй координате φ приписывается произвольное значение.

Связь между полярными координатами ρ, φ и декартовыми координатами x, y точки M (рис. 10.13) задается равенствами:

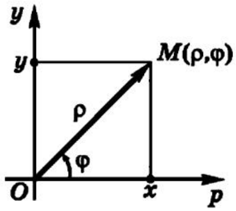


Рис. 10.13

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{cases}$$

где $x^2 + y^2 \neq 0$.

Цилиндрическая система координат. В цилиндрической системе координат (рис. 10.14) положение точки M в пространстве определяется тройкой чисел ρ, φ, z, где ρ, φ – полярные координаты ортогональной проекции точки M на плоскость xOy, а z – декартова координата точки M. При этом $\rho \in [0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \in (-\infty, +\infty)$.

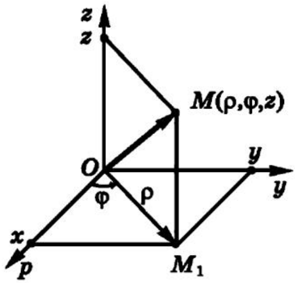


Рис. 10.14

Совокупность чисел (ρ, φ, z) называется *цилиндрическими координатами* точки M.

Связь между цилиндрическими ρ, φ, z и декартовыми координатами x, y, z точки M определяется формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{cases}$$

где $x^2 + y^2 \neq 0$.

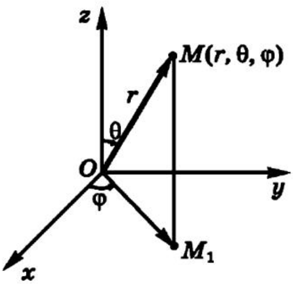


Рис. 10.15

Сферическая система координат. В сферической системе координат (рис. 10.15) точка M (декартовы координаты которой x, y, z) задается тройкой чисел r, θ, φ, где r – расстояние от точки M до начала координат O; $r \in [0, +\infty)$; φ – полярный угол для ортогональной проекции точки M на плоскость xOy ($\varphi \in [0, 2\pi)$); θ – угол, наименьший между радиусом-вектором OM и осью Oz ($\theta \in [0, \pi]$). Совокупность чисел r, θ, φ называется *сферическими координатами* точки M.

Связь между сферическими координатами и декартовыми точки M определяется формулами:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \end{cases}$$

где $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$.

11 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

11.1. Прямая на плоскости

Пусть L – прямая на плоскости, уравнение которой надо записать, $M(x, y)$ – произвольная точка прямой L.

Вектор $\overline{a}$ называется *направляющим вектором прямой* L, если $\overline{a} \parallel L$.

Вектор $\overline{n}$ называется *нормальным вектором прямой* L, если $\overline{n} \perp L$.

Векторно-параметрическое уравнение прямой L:

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{a},$$

где $\overline{r}$ – радиус-вектор произвольной точки прямой; $\overline{r}_0$ – радиус-вектор заданной точки прямой; $t \in \mathbf{R}$; $\overline{a}$ – ненулевой направляющий вектор.

Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases}$$

где $M_0(x_0, y_0) \in L$; $\overline{a} = (l, m)$ – ненулевой направляющий вектор; $t \in \mathbf{R}$.

Каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m},$$

где $M_0(x_0, y_0) \in L$; $\overline{a} = (l, m)$ – ненулевой направляющий вектор.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом, проходящей через точку:

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$ – угловой коэффициент прямой L; α – угол, который прямая L образует с осью Ox; $M_0(x_0, y_0) \in L$.

Уравнение прямой в явном виде:

$$y = kx + b,$$

где k – угловой коэффициент; b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Угол φ между прямыми на плоскости вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|k_1 - k_2|}{|1 + k_1 k_2|},$$

где k_1, k_2 – угловые коэффициенты прямых.

Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0},$$

где точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ принадлежат прямой L.

Уравнение прямой «в отрезках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $M_0(a, 0)$ и $M_1(0, b)$ – точки пересечения прямой L с координатными осями.

Уравнение прямой с нормальным вектором, проходящей через точку:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \qquad (11.1)$$

где $\overline{n} = (A, B)$ – нормальный вектор прямой L; $M_0(x_0, y_0) \in L$.

Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0, \qquad (11.2)$$

где $A^2 + B^2 \neq 0$; $C = -Ax_0 - By_0$ (уравнение (11.2) получают преобразованием уравнения (11.1)).

Формула расстояния от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой, которая задана уравнением (11.2):

$$d(M_0, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Нормальное уравнение прямой:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0, \tag{11.3}$$

где $\overline{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta)$ – единичный нормальный вектор, образующий с осями Ox, Oy углы α и β соответственно; p – расстояние от начала координат до прямой ($p > 0$).

От общего уравнения (11.2) прямой к нормальному уравнению (11.3) можно перейти умножением на нормирующий множитель

$$\mu = -\frac{\operatorname{sign}C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Величина

$$\delta(M_0, L) = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta - p,$$

где $M_0(x_0, y_0) \notin L$, называется *отклонением точки M_0 от прямой L*, уравнение которой задано в виде (11.3). Если $\delta < 0$, то точки M_0 и $O(0, 0)$ лежат по одну сторону от прямой L, если $\delta > 0$, – то по разные стороны.

Расстояние $d(M_0, L)$ от точки до прямой равно абсолютному значению отклонения:

$$d(M_0, L) = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta - p|.$$

Уравнение прямой в полярной системе координат:

$$\rho\cos(\varphi - \varphi_0) = p,$$

где φ_0 – угол между полярной осью и перпендикуляром; p – длина перпендикуляра, проведенного из полюса к прямой.

Взаимное расположение прямых. Если $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2 соответственно, $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$ – нормальные векторы этих прямых, k_1, k_2 – их угловые коэффициенты, то:

$L_1 \parallel L_2$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий: $\overline{a}_1 \parallel \overline{a}_2$, $\overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2$, $k_1 = k_2$;

$L_1 \perp L_2$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий: $\overline{a}_1 \perp \overline{a}_2$, $\overline{n}_1 \perp \overline{n}_2$, $k_1 k_2 = -1$.

11.2. Кривые второго порядка

Эллипс. *Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (11.4)$$

где $a>b>0$.

Уравнение (11.4) называется *каноническим уравнением эллипса* (рис. 11.1).

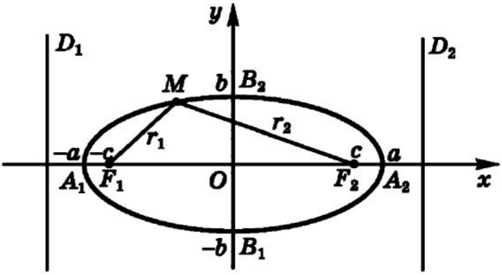


Рис. 11.1

Числа a, b называются соответственно *большой* и *малой полуосью эллипса*; точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$, – *фокусами эллипса*, величина $2c$ определяет *фокусное расстояние*.

Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ называются *вершинами эллипса*, точка $O(0,0)$ – его *центром*;

$\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ – *эксцентриситет эллипса*, $0<\varepsilon<1$ (величина ε выражает меру «сжатости» эллипса);

$r_1=\left|\overline{F_1M}\right|$, $r_2=\left|\overline{F_2M}\right|$ – *фокальные радиусы эллипса* (точка M принадлежит эллипсу), причем $r_1=a+\varepsilon x$, $r_2=a-\varepsilon x$, $r_1+r_2=2a$;

D_1: $x=-\dfrac{a}{\varepsilon}$, D_2: $x=\dfrac{a}{\varepsilon}$ – *директрисы эллипса*; они не пересекают границу и внутреннюю область эллипса; для них справедливо равенство

$$\frac{r_1}{d(M,D_1)}=\frac{r_2}{d(M,D_2)}=\varepsilon.$$

Если $b>a>0$, то эллипс задается также уравнением (11.4), где a – малая полуось, b – большая полуось, $c=\sqrt{b^2-a^2}$, $F_1(0,-c)$,

$F_2(0, c)$ – фокусы (рис. 11.2). При этом $r_1 + r_2 = 2b$, $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$, директрисы определяются уравнениями: $D_1\colon\ y = -\dfrac{b}{\varepsilon}$, $D_2\colon\ y = \dfrac{b}{\varepsilon}$.

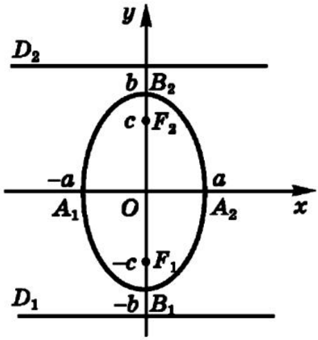


Рис. 11.2

Характеристическое свойство эллипса: сумма расстояний от каждой точки эллипса до фокусов есть величина постоянная, равная $2a$, если a – большая полуось, и $2b$, если b – большая полуось.

Если для эллипса допустить, что $a = b \neq 0$, то в качестве частного случая получается окружность радиуса $R = a$. При этом $c = 0$ и $\varepsilon = 0$.

Параметрическое задание эллипса:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi),$$

где параметр t – величина угла между радиусом-вектором точки, лежащей на эллипсе, и положительным направлением оси Ox.

Если центр эллипса с полуосями a, b ($a, b \neq 0$) находится в точке $C(x_0, y_0)$, то его уравнение имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Гипербола. *Гиперболой* (рис. 11.3) называется геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{11.5}$$

где $a, b > 0$.

Уравнение (11.5) называется *каноническим уравнением гиперболы*.

Числа a, b называются *полуосями гиперболы* (a – действительная полуось, b – мнимая), точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, – ее *фокусами*, величина $2c$ ($c > a > 0$) определяет *фокусное расстояние*.

Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ – *вершины гиперболы*, точка $O(0, 0)$ – ее *центр*;

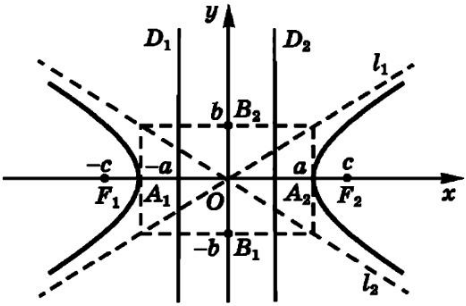


Рис. 11.3

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ – *эксцентриситет гиперболы*, $\varepsilon > 1$ (величина ε характеризует меру «сжатости» гиперболы);

$r_1 = \left|\overline{F_1M}\right|, r_2 = \left|\overline{F_2M}\right|$ – *фокальные радиусы гиперболы* (точка M принадлежит гиперболе), причем $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = -a + \varepsilon x$ для точек правой ветви гиперболы, $r_1 = -(a + \varepsilon x)$, $r_2 = -(-a + \varepsilon x)$ для точек левой ветви;

$D_1\colon\ x = -\dfrac{a}{\varepsilon},\ D_2\colon\ x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ – *директрисы гиперболы*; они не пересекают границу и внутреннюю область гиперболы; для них справедливо равенство

$$\frac{r_1}{d(M, D_1)} = \frac{r_2}{d(M, D_2)} = \varepsilon;$$

$l_{1,2}\colon\ y = \pm\dfrac{b}{a}x$ – *асимптоты гиперболы.*

Уравнение

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (11.6)$$

задает *гиперболу, сопряженную данной* (рис. 11.4). В таком случае отрезок b – *действительная полуось*, отрезок a – *мнимая полуось*; вершины находятся в точках $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$, фокусы – в точках $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$; $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$ – эксцентриситет; $D_{1,2}\colon\ y = \pm\dfrac{b}{\varepsilon}$ – уравнения директрис.

Характеристическое свойство гиперболы: абсолютное значение разности расстояний от каждой точки гиперболы до ее

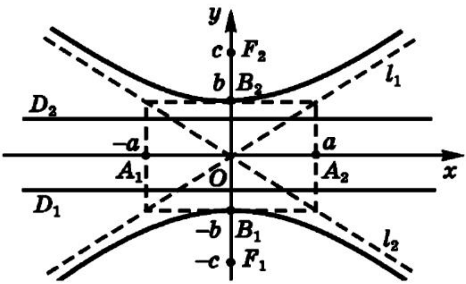


Рис. 11.4

фокусов есть величина постоянная, равная $2a$ для гиперболы (11.5) и $2b$ для гиперболы (11.6).

Параметрическое задание гиперболы:

$$\begin{cases} x = a\operatorname{ch} t, \\ y = b\operatorname{sh} t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi),$$

где параметр t – величина угла между радиусом-вектором точки, лежащей на гиперболе, и положительным направлением оси Ox.

Если центр гиперболы (11.5) находится в точке $C(x_0, y_0)$, то ее уравнение имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Парабола. *Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$y^2 = 2px \ (p > 0). \qquad (11.7)$$

Уравнение (11.7) называется *каноническим уравнением параболы* (рис. 11.5).

Точка $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ – *фокус параболы*, p – *параметр*, точка $O(0, 0)$ – *вершина*, Ox – *ось симметрии параболы*.

Величина $r = x + \dfrac{p}{2}$, где x – абсцисса произвольной точки $M(x, y)$ параболы, называется *фокальным*

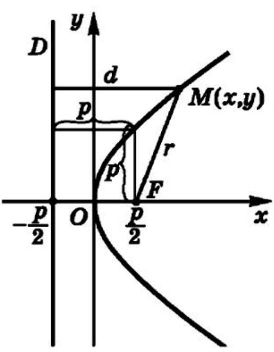


Рис. 11.5

радиусом, прямая D: $x=-\dfrac{p}{2}$ – *директрисой*; она не пересекает внутреннюю область параболы;

$\varepsilon=\dfrac{r}{d(M,D)}=1$ – *эксцентриситет параболы*.

Характеристическое свойство параболы: каждая точка параболы равноудалена от директрисы и фокуса.

Кроме уравнения (11.7) существуют иные формы канонических уравнений параболы: а) $y^2=-2px$; б) $x^2=2py$; в) $x^2=-2py$; они определяют другие направления ветвей параболы в системе координат (рис. 11.6, *а–в* соответственно).

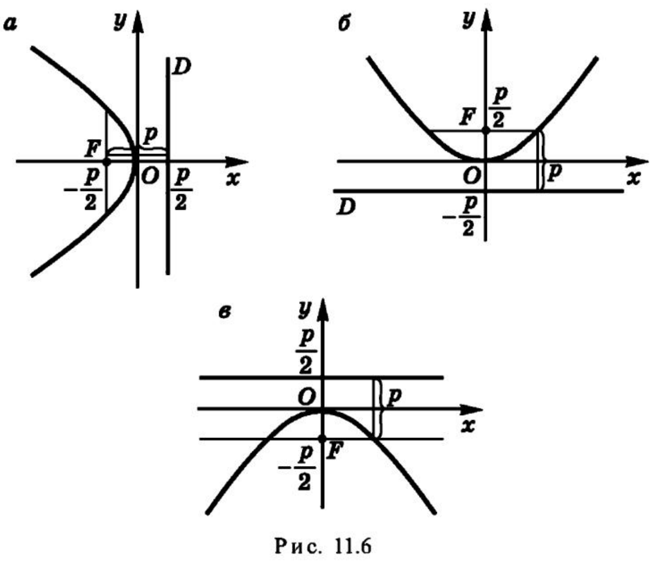


Рис. 11.6

Параметрическое задание параболы:

$$\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2p}, \\ y=t, \end{cases}$$

где t – произвольное действительное число.

Эллипс, гипербола, парабола относятся к *невырожденным кривым второго порядка*.

Вырожденные кривые второго порядка. К таким кривым относятся:

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ – пустое множество (мнимый эллипс);

$a^2x^2+b^2y^2=0$ $(a, b\neq 0)$ – точка (0; 0);

$a^2x^2-b^2y^2=0$ $(a, b\neq 0)$ – пара пересекающихся прямых;

$x^2-a^2=0$ $(a\neq 0)$ – пара параллельных прямых (параллельных Oy);

$y^2-b^2=0$ $(b\neq 0)$ – пара параллельных прямых (параллельных Ox);

$x^2+a^2=0$ $(a\neq 0)$ – пустое множество точек;

$y^2+b^2=0$ $(b\neq 0)$ – пустое множество точек;

$x^2=0$ – прямая (ось Oy);

$y^2=0$ – прямая (ось Ox).

11.3. Плоскость в пространстве

Пусть P – плоскость, уравнение которой надо записать, $M(x, y, z)$ – произвольная точка этой плоскости. Вектор $\overline{n}=(A, B, C)$ называется *нормальным вектором плоскости* P, если $\overline{n}\perp P$.

Векторно-параметрическое уравнение плоскости P:

$$\overline{r}=\overline{r_0}+s\overline{a_1}+t\overline{a_2},$$

где r – радиус-вектор произвольной точки плоскости; $\overline{r_0}$ – радиус-вектор заданной точки плоскости; $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$ – неколлинеарные векторы, параллельные плоскости; $s, t\in\mathbf{R}$.

Параметрические уравнения плоскости:

$$\begin{cases} x=x_0+sk_1+tk_2, \\ y=y_0+sl_1+tl_2, \\ z=z_0+sm_1+tm_2, \end{cases}$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – заданная точка плоскости; $\overline{a_1}=(k_1, l_1, m_1)$, $\overline{a_2}=(k_2, l_2, m_2)$ – неколлинеарные векторы, параллельные плоскости P; $s, t\in\mathbf{R}$.

При тех же условиях плоскость можно задать уравнением

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0,$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – известные три точки плоскости, не лежащие на одной прямой.

Уравнение плоскости «в отрезках»:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

где $M_0(a, 0, 0)$, $M_1(0, b, 0)$, $M_2(0, 0, c)$ – точки пересечения плоскости с координатными осями.

Уравнение плоскости с нормальным вектором, проходящей через точку:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \qquad (11.8)$$

где $\overline{n} = (A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости; $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – заданная точка плоскости.

Общее уравнение плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (11.9)$$

где $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$ (уравнение (11.9) получают преобразованием уравнения (11.8)).

Формула расстояния $d(M_0, P)$ от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости P, заданной уравнением (11.9), имеет вид

$$d(M_0, P)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Нормальное уравнение плоскости:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

где $p > 0$ – расстояние от начала координат до плоскости; $\overline{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичный нормальный вектор плоскости, образующий с осями Ox, Oy, Oz углы α, β, γ соответственно.

От общего уравнения плоскости к нормальному уравнению можно перейти умножением уравнения (11.9) на *нормирующий множитель*

$$\mu = -\frac{\text{sign}D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Величина

$$\delta(M_0, P) = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p \qquad (11.10)$$

называется *отклонением точки* M_0 *от плоскости* P, заданной уравнением (11.10). При этом $\delta < 0$, если точки M_0 и $O(0, 0, 0)$ лежат по одну сторону от плоскости; $\delta > 0$, если они лежат по разные стороны; $\delta = 0$, если $M_0 \in P$. *Расстояние* $d(M_0, P)$ *от точки* M_0 *до плоскости* P равно абсолютному значению ее отклонения:

$$d(M_0, P) = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma|.$$

Косинус угла φ между плоскостями вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\overline{n}_1, \overline{n}_2}) = \frac{(\overline{n}_1, \overline{n}_2)}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|},$$

где $\overline{n}_1, \overline{n}_2$ – нормальные векторы этих плоскостей.

11.4. Прямая в пространстве

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка прямой L, уравнение которой надо записать.

Векторно-параметрическое уравнение прямой:

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{a},$$

где $\overline{r}$ – радиус-вектор произвольной точки прямой; $\overline{r}_0$ – радиус-вектор заданной точки прямой; $\overline{a}$ – направляющий вектор прямой; $t \in \mathbf{R}$.

Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + kt, \\ y = y_0 + lt, \\ z = z_0 + mt, \end{cases}$$

где $\overline{a} = (k, l, m)$ – направляющий вектор прямой; $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – заданная точка прямой; $t \in \mathbf{R}$.

При тех же условиях прямую можно задать *каноническими уравнениями*:

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}.$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

где $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – заданные точки прямой.

Общие уравнения прямой в пространстве (линия пересечения двух плоскостей):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

где $\overline{n}_1 \nparallel \overline{n}_2$; $\overline{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$; $\overline{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Если $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2 соответственно, то:

$L_1 \parallel L_2$ тогда и только тогда, когда $\overline{a}_1 \parallel \overline{a}_2$;

$L_1 \perp L_2$ тогда и только тогда, когда $\overline{a}_1 \perp \overline{a}_2$.

Угол φ между прямыми можно определить через косинус угла между направляющими векторами:

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{a}_1, \overline{a}_2)}{|\overline{a}_1||\overline{a}_2|}.$$

Расстояние от точки M_0 до прямой L вычисляется по формуле

$$d(M_0, L) = \frac{|[\overline{M_0M_1}, \overline{a}]|}{|\overline{a}|},$$

где M_1 – точка прямой; $\overline{a}$ – направляющий вектор.

Если прямые L_1 и L_2 являются скрещивающимися, то расстояние между ними определяют по формуле

$$d(L_1, L_2) = \frac{|(\overline{r}_1 - \overline{r}_2, \overline{a}_1, \overline{a}_2)|}{|[\overline{a}_1, \overline{a}_2]|},$$

где $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$ – радиусы-векторы точек M_1 и M_2, принадлежащих прямым L_1 и L_2 соответственно; $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ – направляющие векторы прямых.

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Если прямая L задана каноническими уравнениями:

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m},$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$; $\overline{a} = (k, l, m) \parallel L$, и плоскость P задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где $\overline{n} = (A, B, C) \perp P$, то:

$L \parallel P$ тогда и только тогда, когда $\overline{a} \perp \overline{n}$;

L лежит в плоскости P тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \overline{a} \perp \overline{n}, \\ M_0 \in P; \end{cases}$$

$L \perp P$ тогда и только тогда, когда $\overline{a} \parallel \overline{n}$.

Углом φ *между прямой и плоскостью* называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость. Верна формула

$$\sin\varphi = \frac{|(\overline{a}, \overline{n})|}{|\overline{a}||\overline{n}|},$$

где $\overline{a}$ – направляющий вектор прямой; $\overline{n}$ – нормальный вектор плоскости.

11.5. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется поверхность S, общее уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + \\ + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0, \qquad (11.11)$$

где коэффициенты при одночленах второй степени одновременно не равны нулю.

Существует 9 типов невырожденных поверхностей, уравнения которых путем преобразования координат могут быть приведены к одному из указанных ниже видов. Эти уравнения определяют тип поверхности и называются *каноническими уравнениями*.

Эллипсоид (рис. 11.7):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Гиперболоид:

1) *однополостный* (рис. 11.8):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

2) *двуполостный* (рис. 11.9):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

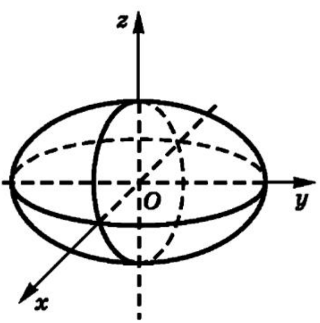


Рис. 11.7

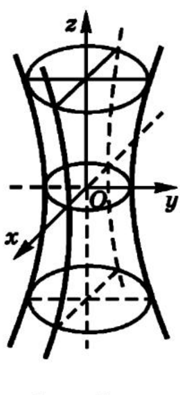


Рис. 11.8

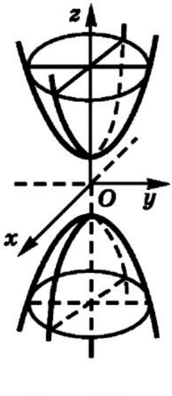


Рис. 11.9

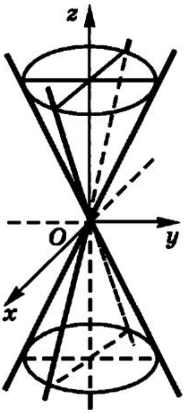


Рис. 11.10

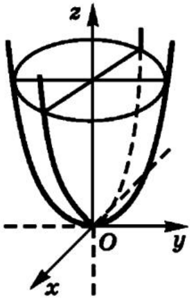


Рис. 11.11

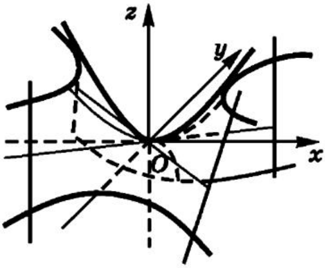


Рис. 11.12

Конус второго порядка (рис. 11.10):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Параболоид:

1) *эллиптический* (рис. 11.11):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z;$$

2) *гиперболический* (рис. 11.12):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

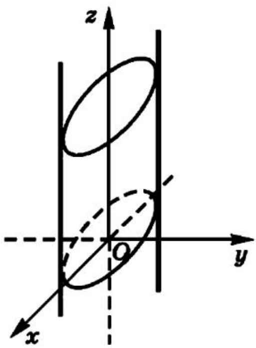


Рис. 11.13

Цилиндр:

1) *эллиптический* (рис. 11.13):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

2) *гиперболический* (рис. 11.14):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$$

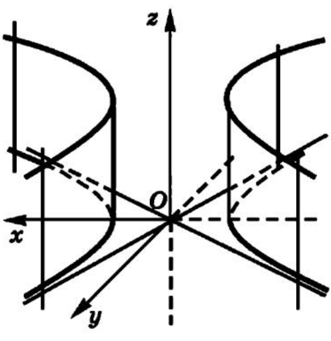


Рис. 11.14

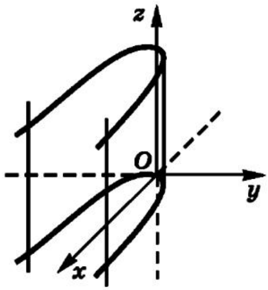


Рис. 11.15

3) *параболический* (рис. 11.15):

$$y^2 = 2px \ (p > 0).$$

В определенных случаях уравнение (11.11) поверхности может быть приведено к уравнениям, задающим так называемые *вырожденные поверхности*, в частности:

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ – пустое множество точек (мнимый эллипсоид);

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$ – точка $(0, 0, 0)$;

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ – пустое множество точек (мнимый эллиптический цилиндр);

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ – прямая (ось Oz);

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ – пара пересекающихся плоскостей;

$x^2 - a^2 = 0 \ (a \neq 0)$ – пара параллельных плоскостей (параллельных плоскости yOz);

$x^2 + a^2 = 0 \ (a \neq 0)$ – пустое множество точек;

$x^2 = 0$ – плоскость (yOz).

11.6. Некоторые плоские кривые

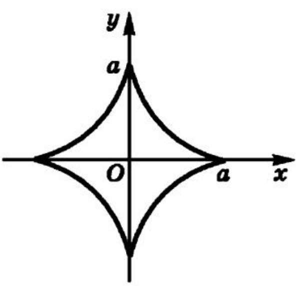


Рис. 11.16

Астроида. Параметрически астроида (рис. 11.16) задается уравнениями:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi), \ a > 0.$$

Астроиду можно рассматривать как траекторию движения точки окружности, катящейся по внутренней стороне другой окружности, радиус которой в 4 раза больше.

Декартов лист. В прямоугольной декартовой системе координат декартов лист (рис. 11.17) задается уравнением

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \ (a \neq 0).$$

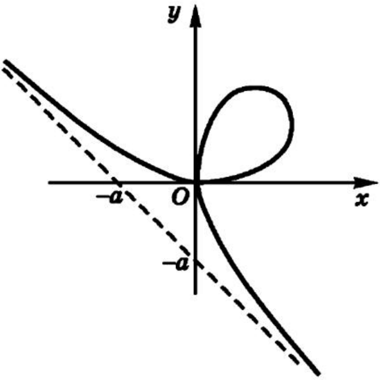


Рис. 11.17

Параметрически он задается уравнениями

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{t^3+1}, \\ y = \dfrac{3at^2}{t^3+1}, \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Кардиоида. В полярной системе координат кардиоида (рис. 11.18, 11.19) задается соответственно уравнениями:

$$\rho = a(1 - \cos\varphi),\ \ a > 0,$$

$$\rho = a(1 + \cos\varphi),\ \ a > 0.$$

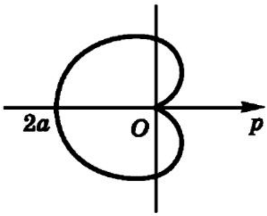


Рис. 11.18

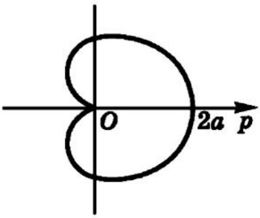


Рис. 11.19

Кардиоиду можно рассматривать как траекторию точки окружности, которая катится по окружности такого же радиуса.

Лемниската Бернулли. В полярной системе координат лемниската (рис. 11.20, 11.21) задается соответственно уравнениями:

$$\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi, \quad \rho^2 = 2a^2\sin 2\varphi, \quad a > 0,$$

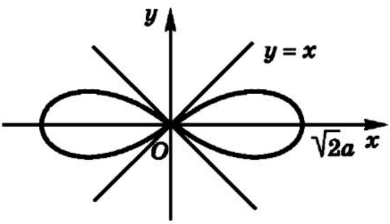


Рис. 11.20

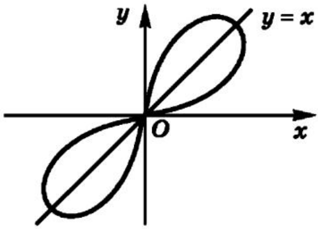


Рис. 11.21

в прямоугольных декартовых координатах – соответственно уравнениями:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \quad a > 0,$$
$$(x^2 + y^2)^2 = 4a^2xy, \quad a > 0.$$

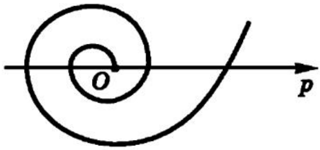


Рис. 11.22

Логарифмическая спираль. В полярной системе координат логарифмическая спираль (рис. 11.22) задается уравнением

$$\rho = a^{\varphi},$$

где $a > 0$; $a \neq 0$; $\varphi \in \mathbf{R}$.

Роза. В полярной системе координат роза задается уравнением

$$\rho = a\sin k\varphi \text{ или } \rho = a\cos k\varphi,$$

где $a, k > 0$; $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Частные случаи розы:

двухлепестковая роза (рис. 11.23, 11.24) задается соответственно уравнениями:

$$\rho = \sin 2\varphi, \rho = \cos 2\varphi;$$

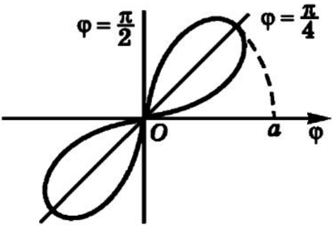


Рис. 11.23

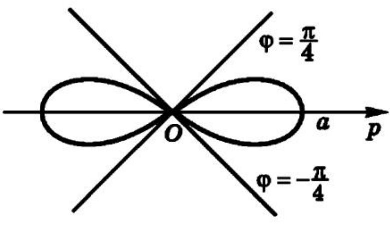


Рис. 11.24

трехлепестковая роза (рис. 11.25, 11.26) – уравнениями:

$$\rho = \sin 3\varphi, \qquad \rho = \cos 3\varphi;$$

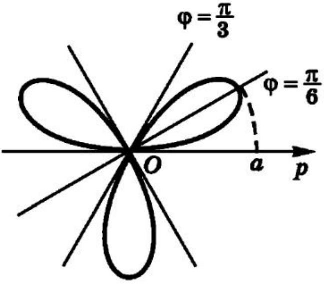


Рис. 11.25

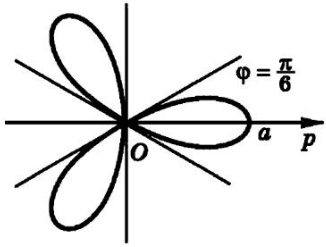


Рис. 11.26

четырехлепестковая роза (рис. 11.27, 11.28) – уравнениями:

$$\rho = \sin 4\varphi, \qquad \rho = \cos 4\varphi.$$

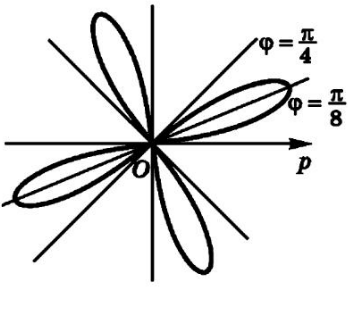


Рис. 11.27

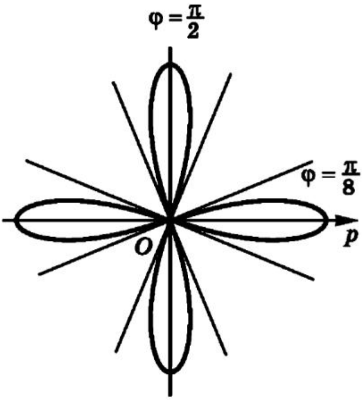


Рис. 11.28

Строфоида. В полярной системе координат строфоида (рис. 11.29) задается уравнением

$$\rho = -a\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}, \qquad a > 0,$$

в прямоугольных декартовых координатах – уравнением

$$y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}.$$

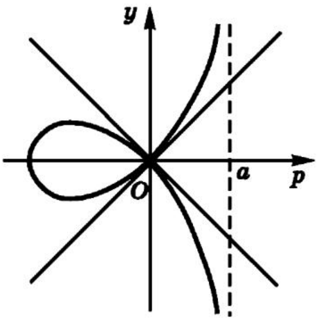


Рис. 11.29

Цепная линия. В прямоугольных декартовых координатах цепная линия (рис. 11.30) задается уравнением

$$y = a\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} \text{ или } y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$$

$$(a > 0).$$

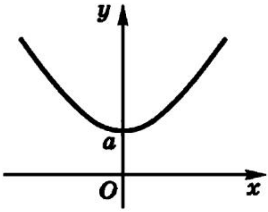


Рис. 11.30

Цепную линию можно рассматривать как кривую, форму которой принимает под действием силы тяжести однородная гибкая нерастяжимая нить с закрепленными концами.

Циклоида. Параметрически циклоида (рис. 11.31) задается уравнениями

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}, a > 0.$$

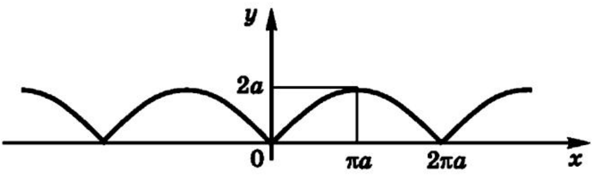


Рис. 11.31

Циклоиду можно рассматривать как траекторию движения фиксированной точки окружности радиуса a, которая катится по прямой.

12

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

12.1. Числовая последовательность

Понятие числовой последовательности. *Числовой последовательностью* называется числовая функция натурального аргумента $x_n = f(n)$, определенная на множестве всех натуральных чисел, т.е. $n \in \mathbf{N}$.

Задать числовую последовательность – значит задать правило, по которому каждому натуральному числу n соответствует одно и только одно число. В общем случае бесконечная числовая последовательность записывается в виде

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

(обозначают (x_n) или $\{x_n\}$, где $n \in \mathbf{N}$). При этом x_n называется *n-м членом* или *общим членом последовательности* (x_1 – первый член последовательности, x_2 – второй и т.д.).

Способы задания последовательности:

1) *аналитический* – с помощью формулы n-го члена последовательности, по которой могут быть вычислены все остальные.

Например, пусть $x_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$. Придавая n значения 1, 2, 3, 4, … , получаем развернутую запись этой последовательности:

$$-1,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{5},\ \frac{1}{7}, \dots,\ \frac{(-1)^n}{2n-1}, \dots;$$

2) *табличный* – каждому $n \in \mathbf{N}$ ставят в соответствие определенное числовое значение, что оформляют в виде таблицы;

3) *рекуррентный* – указывают несколько первых членов последовательности и правило (или формулу), позволяющее найти все последующие члены, используя предыдущие.

Например, пусть $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ и каждый следующий член равен сумме двух предыдущих.

Получаем последовательность чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … , называемых *числами Фибоначчи*;

4) *словесный* – последовательность задают описательно (словами).

Способы изображения последовательности:

1) точками на числовой оси.

Например, для $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbf{N}$ (рис. 12.1);

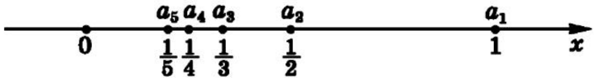


Рис. 12.1

2) точками на координатной плоскости.

Например, для $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbf{N}$ (рис. 12.2).

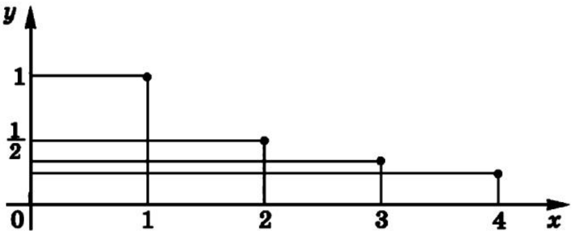


Рис. 12.2

Виды последовательностей. Последовательность (x_n) называется *убывающей* (*строго*), если каждый ее последующий член меньше предыдущего, т.е.

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots,$$

или короче: $x_n > x_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$.

Последовательность (x_n) называется *невозрастающей*, если каждый ее последующий член не больше предыдущего, т.е.

$$x_n \geq x_{n+1}, \ n \in \mathbf{N}.$$

Последовательность (x_n) называется *возрастающей* (*строго*), если каждый ее последующий член больше предыдущего, т.е.

$$x_n < x_{n+1},\ n \in \mathbf{N}.$$

Последовательность (x_n) называется *неубывающей*, если каждый ее последующий член не меньше предыдущего, т.е.

$$x_n \le x_{n+1},\ n \in \mathbf{N}.$$

Убывающая, возрастающая, невозрастающая, неубывающая последовательности называются *монотонными*.

Последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху*, если существует такое число M, что для всех $n \in \mathbf{N}$ выполняется $x_n \le M$.

Последовательность (x_n) называется *ограниченной снизу*, если существует такое число m, что для всех $n \in \mathbf{N}$ выполняется $x_n \ge m$.

Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если существует такое число C, что для всех $n \in \mathbf{N}$ выполняется $|x_n| \le C$.

12.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Арифметическая прогрессия. *Арифметической прогрессией* называют числовую последовательность (a_n), каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом. Это число называют *разностью арифметической прогрессии* и обозначают буквой d:

$$a_{n+1} = a_n + d \ \ (n \in \mathbf{N}).$$

Если a_n – n-й член арифметической прогрессии, S_n – сумма n первых ее членов, то:

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad (n \ge 2),$$

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} \quad (n, k \in N,\ n \ge 2,\ k < n),$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n,$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Если имеется n последовательных членов, то суммы членов, равноотстоящих от концов, равны, т.е.

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots .$$

Геометрическая прогрессия. *Геометрической прогрессией* называют числовую последовательность (b_n), первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число, не равное нулю. Это число называют *знаменателем геометрической прогрессии* и обозначают буквой q:

$$b_{n+1} = b_n q \quad (b_1 \neq 0,\ n \in \mathbf{N}).$$

Если $q < 0$, то прогрессия называется *знакопеременной.*

Если b_n $(n \in \mathbf{N})$ – общий член геометрической прогрессии, S_n – сумма n первых ее членов, то

$$b_n = b_1 q^{n-1},$$

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}} \quad (n \geq 2),$$

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-k} b_{n+k}} \quad (n, k \in N,\ n \geq 2,\ k < n),$$

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q}, \quad S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Если имеется n последовательных членов, то произведения членов, равноотстоящих от ее концов, равны, т.е.:

$$b_1 b_n = b_2 b_{n-1} = b_3 b_{n-2} = \dots .$$

Бесконечно убывающей геометрической прогрессией называют геометрическую прогрессию, знаменатель которой по модулю меньше единицы, т.е. $|q| < 1$.

Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называют предел последовательности (S_n) при неограниченном возрастании n:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

где S_n – сумма n первых членов геометрической прогрессии.

Сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n) выражается формулой

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

12.3. Предел числовой последовательности

Понятие предела последовательности. Число a называется *пределом последовательности* (x_n), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $n(\varepsilon)$, что для всех $n \geq n(\varepsilon)$ выполняется

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (12.1)$$

Пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

Выполнение неравенства (12.1) геометрически означает, что в случае существования предела все члены последовательности с номерами $n \geq n(\varepsilon)$ содержатся внутри интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

Свойства сходящихся последовательностей:

1) если последовательность (x_n) имеет предел, то он единственный;

2) если последовательность имеет предел, то она ограничена;

3) если последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху, то она имеет предел;

4) если последовательность монотонно убывает и ограничена снизу, то она имеет предел;

5) если для последовательностей (x_n), (y_n), начиная с некоторого номера, выполняется $x_n < y_n$ (или $x_n \leq y_n$), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

6) если для последовательностей (x_n), (y_n), (z_n), начиная с некоторого номера n, выполняется $x_n < y_n < z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Вычисление предела числовой последовательности. В основе вычисления предела лежит следующая ***теорема***: если последовательности (x_n) и (y_n) имеют пределы, то:

$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\lim_{n\to\infty} x_n, \tag{12.2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n + y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{12.3}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{12.4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \quad \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0. \tag{12.5}$$

Формулы (12.3) и (12.4) обобщаются на произвольное конечное количество слагаемых (множителей). Если таких слагаемых (множителей) бесконечно много, то переход от предела суммы (произведения) к сумме (произведению) пределов может привести к ошибке.

В результате непосредственного использования формул (12.2)–(12.5) могут возникнуть *неопределенности* вида

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ (+\infty)-(+\infty),\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}.$$

В таком случае предел считают не найденным. Для его вычисления необходимо вначале тождественно преобразовать выражение, стоящее под знаком предела.

Замечание. Если последовательность имеет предел, то это число.

Неограниченная последовательность не может стремиться к числу. При возрастании n ее значения бесконечно возрастают по модулю и стремятся к $+\infty$ или $-\infty$. В таком случае считают, что последовательность не имеет предела. Однако это записывают с помощью символа lim:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Эти последовательности называют *бесконечно большими*.

Таким образом, все последовательности делятся на *сходящиеся* (имеют предел, равный числу) и *расходящиеся* (бесконечно большие или такие, для которых предел не определен).

12.4. Предел функции

Предел функции в точке и на бесконечности. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой области $D \subseteq \mathbf{R}$.

Определение (*по Гейне*). Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0, если:

1) функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (за исключением, может быть, самой точки x_0);

2) для всякой последовательности (x_n) из окрестности точки x_0 такой, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$ и $x_n \neq x_0$, последовательность соответствующих значений функции стремится к числу A: $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$.

Определение (*по Коши*). Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0, если (рис. 12.3):

1) функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (за исключением, может быть, самой точки x_0);

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon)$, что для любого $x \in D$ из неравенства

$$0 < |x - x_0| < \delta \tag{12.6}$$

следует неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{12.7}$$

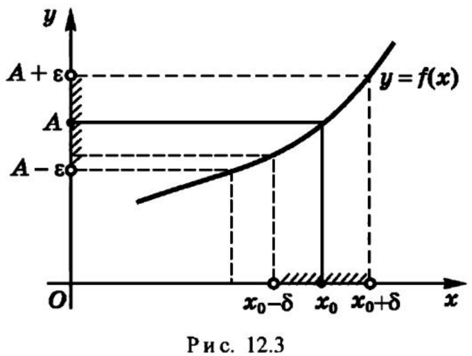


Рис. 12.3

В случае существования предела пишут: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Определение предела функции по Коши имеет следующую геометрическую интерпретацию. Условие (12.6) геометрически означает, что $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, т.е. x принадлежит проколотой δ-окрестности точки x_0. В таком случае условие (12.7) показывает, что значения функции лежат в ε-окрестности точки A, т.е. $f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$.

Определения предела функции в точке по Гейне и по Коши равносильны.

Предел функции определяют и на бесконечности.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если функция определена на полуоси $(a,+\infty)$ (на $(-\infty, a)$), $a \in \mathbf{R}$, и для всякой последовательности (x_n) такой, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$ $(-\infty)$, последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$ стремится к числу A.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число M, что из неравенства $|x| > M$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 12.4).

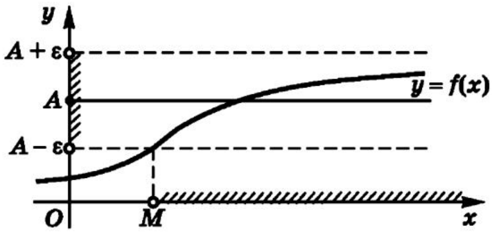


Рис. 12.4

В случае существования предела при $x \to \pm\infty$ пишут:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x) = A.$$

Свойства функций, имеющих предел:

1) если функция имеет в точке предел, то он единственный;

2) функция, имеющая предел в точке, ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки;

3) если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $A > 0$ $(A < 0)$, то существует проколотая окрестность точки x_0, в которой $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$;

4) если $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = A$ и в некоторой проколотой окрестности точки x_0 справедливо неравенство $f_1(x) \le f(x) \le$ $\le f_2(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$;

5) если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то:

$$\lim_{x\to x_0}\left(cf(x)\right)=c\lim_{x\to x_0} f(x),\quad c=\text{const}, \tag{12.8}$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x), \tag{12.9}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x), \tag{12.10}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},\quad \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0. \tag{12.11}$$

На формулах (12.8)–(12.11) основывается практическое вычисление пределов.

В результате непосредственного использования формул (12.9)–(12.11) могут возникнуть неопределенности вида:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ (+\infty)-(+\infty),\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}.$$

Для их устранения необходимо сначала тождественно преобразовать выражение, стоящее под знаком предела, а затем вычислить предел. В определенных случаях возможно также использование формул замечательных пределов (см. далее формулы (12.14)–(12.18), таблицы эквивалентных бесконечно малых функций, правила Лопиталя.

Формулы (12.9) и (12.10) обобщаются на любое конечное количество соответственно слагаемых и множителей. В случае бесконечного количества слагаемых (множителей) равенства могут нарушиться.

Для элементарных функций и точки x_0 из области определения имеет место равенство

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x)=f(x_0).$$

Бесконечно большая функция. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x\to x_0$, если для любого $N>0$ существует такое число δ, что из неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x)| > N$ (рис. 12.5). Это записывают так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, (\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty). \qquad (12.12)$$

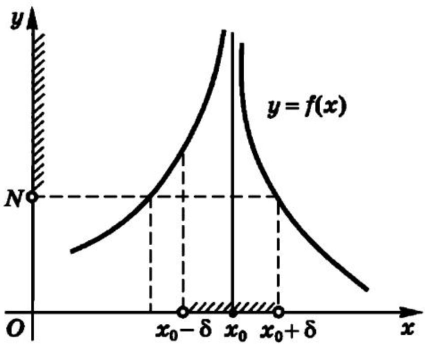


Рис. 12.5

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to \pm\infty$, если для любого $N > 0$ существует такое число M, что из неравенства $|x| > M$ следует неравенство $|f(x)| > N$ (рис. 12.6). Это записывают так:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \quad (\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty). \qquad (12.13)$$

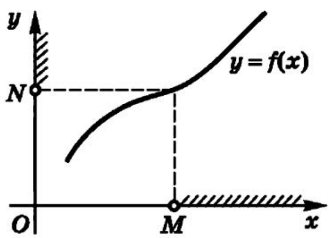


Рис. 12.6

Замечание. Записи (12.12) и (12.13) используют для обозначения бесконечно большой функции. При этом считают, что функция предела не имеет.

Бесконечно малая функция. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если выполняется условие

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Свойства бесконечно малых функций:

1) сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$ есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$;

2) произведение бесконечно малой функции при $x \to x_0$ и ограниченной функции есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Связь функции, ее предела в точке и бесконечно малой функции устанавливает следующая ***теорема***: для того чтобы число A было пределом функции $f(x)$ в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Замечательные пределы. При вычислении пределов в случае некоторых неопределенностей часто используются формулы пределов:

первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \tag{12.14}$$

второй замечательный предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ или } \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e, \tag{12.15}$$

где e – иррациональное число: $e \approx 2,718281828459045\ldots$; а также:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e \quad (a = \text{const}), \tag{12.16}$$

в частности $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1;$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (a=\text{const}), \tag{12.17}$$

в частности $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha \quad (\alpha=\text{const}). \tag{12.18}$$

С помощью формул (12.14), (12.16)–(12.18) раскрывают неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$, с помощью формулы (12.15) – неопределенность типа 1^∞.

Пусть $\alpha, \beta, k, a \in \mathbf{R}$. Тогда справедливы формулы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\beta x}=\frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta\neq 0), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta\neq 0),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha x}{\beta x}=\frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta\neq 0), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha x}{\operatorname{tg}\beta x}=\frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta\neq 0),$$

$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^k \quad (k\neq 0), \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k \quad (k\neq 0),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha x)}{x}=\alpha\log_a e \quad (\alpha\neq 0, a>0, a\neq 1),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}=\alpha \quad (\alpha\neq 0), \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^{\alpha x}-1}{x}=\alpha\ln a\,(\alpha\neq 0, a>0, a\neq 1),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{x}=\alpha \quad (\alpha\neq 0), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+\beta x)^\alpha-1}{x}=\alpha\beta \quad (\alpha\neq 0, \beta\neq 0).$$

При нахождении пределов вида

$$\lim_{x\to x_0} \left(u(x)\right)^{v(x)},$$

где $u(x)$, $v(x)$ – выражения с переменной, необходимо иметь в виду, что:

1) если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=a \quad (a>0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \left(u(x)\right)^{v(x)}=a^b$;

2) если $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=a$ $(a>1)$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \left(u(x)\right)^{v(x)}=+\infty$;

3) если $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=a \quad (0<a<1)$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \left(u(x)\right)^{v(x)}=0$;

4) если $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=a \ (a>1)$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=-\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \left(u(x)\right)^{v(x)}=0$;

5) если $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=a \quad (0<a<1)$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=-\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \left(u(x)\right)^{v(x)}=+\infty$;

6) если $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\infty$, то для вычисления пределов вида $\lim\limits_{x\to x_0} \left(u(x)\right)^{v(x)}$ используют второй замечательный предел. Для этого функцию $u(x)^{v(x)}$ преобразуют так, чтобы можно было применить второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(1+\left(u(x)-1\right)\right)^{\frac{1}{u(x)-1}\left(u(x)-1\right)v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\left(u(x)-1\right)v(x)}.$$

Сравнение бесконечно малых функций. Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x\to x_0$, для которых существует

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c,$$

где $c\in\mathbf{R}$. Тогда:

1) если $c \neq 0$, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *бесконечно малыми одного порядка*;

2) если $c = 1$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентными* и пишут: $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to x_0$;

3) если $c = 0$, то $\alpha(x)$ называют *бесконечно малой более высокого порядка*, чем $\beta(x)$, и пишут: $\alpha(x) = o(\beta(x))$;

4) если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\beta(x)$ является *бесконечно малой более высокого порядка*, чем $\alpha(x)$, т.е. $\beta(x) = o(\alpha(x))$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c$, где $c \neq 0$, $c \neq \infty$, то функцию $\alpha(x)$ называют *бесконечно малой порядка k относительно функции* $\beta(x)$.

Теорема. Для того чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентны при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$f(x) = g(x) + o(g(x)). \tag{12.19}$$

При выполнении равенства (12.19) функция $g(x)$ называется *главной частью функции* $f(x)$ при $x \to x_0$.

При вычислении пределов функций часто бывает эффективным применение следующей ***теоремы***: если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, то в случае существования пределов верны формулы:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot h(x)) = \lim_{x \to x_0} (g(x) \cdot h(x)), \tag{12.20}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)}. \tag{12.21}$$

Формулы (12.20) и (12.21) показывают, что при выполнении условий теоремы в произведении и частном функцию можно заменять эквивалентной ей функцией.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций. Пусть $u(x) \to 0$, если $x \to x_0$ ($x \to \pm\infty$), α, $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$. Тогда верны следующие эквивалентности:

$\sin u(x) \sim u(x)$, $\quad$ $\operatorname{tg} u(x) \sim u(x)$,

$\arcsin u(x) \sim u(x)$, $\quad$ $\operatorname{arctg} u(x) \sim u(x)$,

$$1-\cos u(x) \sim \frac{(u(x))^2}{2},$$

$$\log_a(1+u(x)) \sim u(x)\log_a e, \qquad \ln(1+u(x)) \sim u(x),$$

$$a^{u(x)}-1 \sim u(x)\ln a, \qquad e^{u(x)}-1 \sim u(x),$$

$$(1+u(x))^{\alpha}-1 \sim \alpha u(x).$$

В качестве примера использования таблицы эквивалентных бесконечно малых функций вычислим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{1-\sqrt[3]{1+2x}}. \qquad (12.22)$$

Отметим, что непосредственное вычисление предела (12.22) приводит к неопределенности типа $\frac{0}{0}$.

Используем формулу (12.21) и соответствующие эквивалентности из таблицы. Поскольку при $x \to 0$ справедливы условия $-\sin x \to 0$ и $2x \to 0$, то

$$\ln(1-\sin x) = \ln(1+(-\sin x)) \sim -\sin x \sim -x,$$

а также

$$1-\sqrt[3]{1+2x} = -\left((1+2x)^{\frac{1}{3}}-1\right) \sim -\frac{1}{3}\cdot 2x.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{1-\sqrt[3]{1+2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{-\frac{1}{3}\cdot 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}.$$

Односторонние пределы. Если $x \to x_0$ и $x < x_0$, то пишут: $x \to x_0-0$; аналогично если $x \to x_0$ и $x > x_0$, то пишут: $x \to x_0+0$. В случае существования предела при условии $x \to x_0 \pm 0$ пишут:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x-0), \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0).$$

Эти пределы называют соответственно *пределом слева функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и *пределом справа функции* $f(x)$ *в точке* x_0. Пределы слева и справа называют *односторонними пределами*.

Для существования предела функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы оба односторонних предела в точке x_0 существовали и были равны, т.е.

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Простейшие случаи, которые встречаются при вычислении пределов различных выражений ($a = \text{const}$, $a > 0$):

$$\lim_{x \to -0} \frac{a}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x \to +0} \frac{a}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < a < 1, \\ +\infty, & \text{если } a > 1, \end{cases} \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{если } 0 < a < 1, \\ 0, & \text{если } a > 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{если } 0 < a < 1, \\ +\infty, & \text{если } a > 1, \end{cases} \qquad \lim_{x \to +0} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & \text{если } 0 < a < 1, \\ -\infty, & \text{если } a > 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \ (\alpha = \text{const},\, a > 1), \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \ (\alpha = \text{const},\, a > 1).$$

12.5. Непрерывность и точки разрыва функций

Непрерывные функции и их свойства. Существуют различные равносильные определения непрерывности функции в точке.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если:

1) она определена в точке x_0 и ее окрестности;
2) существует ее предел в точке x_0;
3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если:

1) она определена в точке x_0 и ее окрестности;

2) бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0.$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если:

1) она определена в точке x_0 и ее окрестности;

2) в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0);$$

3) эти пределы равны между собой и равны значению функции в точке x_0:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна во внутренних точках этого отрезка, непрерывна справа на левом его конце и непрерывна слева на правом конце.

Свойства непрерывных функций:

1) элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены;

2) если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ также непрерывны в точке x_0; если, кроме того, $g(x_0) \neq 0$, то и функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0;

3) если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а $y = f(u)$ – в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0;

4) если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и возрастает (убывает) на этом отрезке и если $[c, d]$ – область значений функции $f(x)$, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ на отрезке $[c, d]$ оси Oy существует и является также непрерывной и возрастающей (убывающей) функцией.

Если $f(x)$ определена в точке x_0, а также в некоторой правой ее полуокрестности и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, то $f(x)$ называется *функцией, непрерывной справа в точке* x_0.

Если $f(x)$ определена в точке x_0, а также в некоторой левой ее полуокрестности и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$, то $f(x)$ называется *функцией, непрерывной слева в точке* x_0.

Классификация точек разрыва. Пусть функция $f(x)$ определена в выколотой окрестности точки x_0. Если нарушается условие существования или равенства односторонних пределов в этой точке, то точка $x = x_0$ называется *точкой разрыва*.

Если существуют односторонние пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, то в точке x_0 функция имеет *устранимый разрыв* (рис. 12.7).

Если существуют $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то разрыв в точке x_0 называется *скачком* (рис. 12.8).

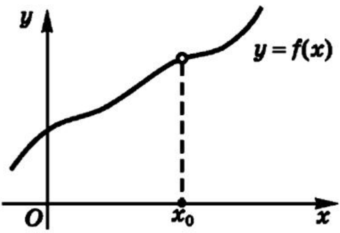


Рис. 12.7

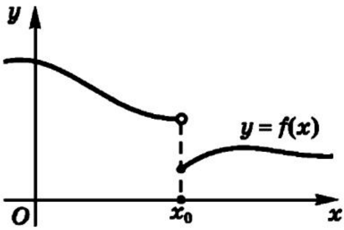


Рис. 12.8

Устранимый разрыв и скачок называют *разрывами первого рода*.

Если в точке x_0 хотя бы один из односторонних пределов не существует (как число), то в точке x_0 функция имеет *разрыв второго рода* (рис. 12.9). При этом возможны два случая: в точке x_0 функция имеет *бесконечный скачок*, т.е. является бесконеч-

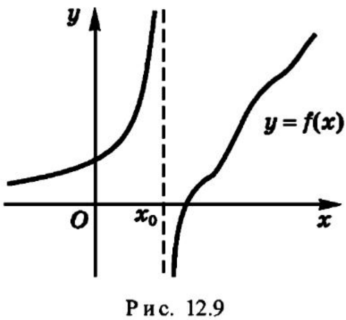


Рис. 12.9

но большой (рис. 12.9), или в точке x_0 предел функции не определен (например, для $y = \sin\dfrac{1}{x}$ при $x \to 0$, см. рис. 12.10).

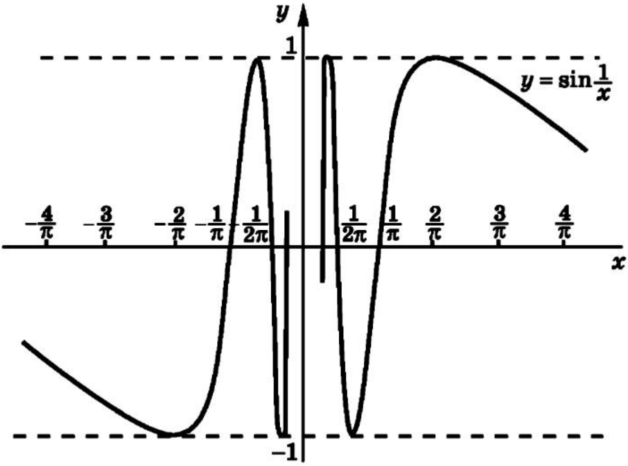


Рис. 12.10

Асимптоты графика функции. Прямая $x = x_0$ (см. рис. 12.9) называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty$. В случае вертикальной асимптоты $x = x_0$ точка x_0 является точкой разрыва второго рода (точкой бесконечного скачка).

Прямая $y = c$ (рис. 12.11) называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = c \quad (c \in \mathbf{R}).$$

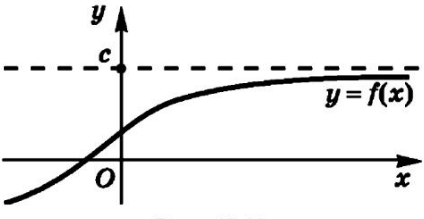


Рис. 12.11

Например, $y = \operatorname{arctg} x$ имеет две горизонтальные асимптоты: $y = -\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$.

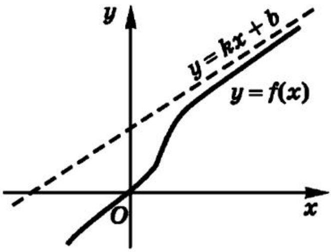


Рис. 12.12

Прямая $y = kx + b$, где $k \neq 0$ (рис. 12.12), является *наклонной асимптотой* тогда и только тогда, когда существуют пределы:

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (f(x) - kx) = b.$$

13
ПРОИЗВОДНАЯ

13.1. Производная, ее геометрический и физический смысл

Понятие производной. При определении производной функции $f(x)$ в точке x_0 допускают, что $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности. Аргументу придается такое приращение Δx, что функция $f(x)$ определена в точке $x_0 + \Delta x$. Рассматривают приращение функции в точке x_0:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Производной функции $f(x)$ *в точке* x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Производная обозначается $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $f'_x(x_0)$, $f_x^{(1)}(x_0)$. По определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (13.1)$$

Если предел (13.1) существует, то функция называется *дифференцируемой в точке* x_0. Производная функции в точке равна определенному числу. Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого промежутка, то она называется *дифференцируемой на промежутке*. На этом промежутке производная $f'(x)$ является функцией.

Процесс вычисления производной функции называется *дифференцированием*.

Если функция определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности, которой принадлежит точка x, то производная функции определяется также равенством

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (13.2)$$

при условии существования предела (13.2).

Геометрический и физический смысл производной. *Геометрический смысл производной* выражает формула

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha,$$

где α – угол между касательной к графику данной функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ и положительным направлением оси Ox (рис. 13.1).

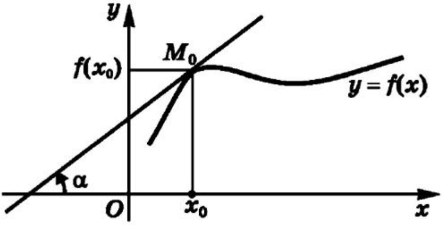


Рис. 13.1

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Уравнение нормали (перпендикуляра) к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0), \quad f'(x_0) \neq 0.$$

Физический смысл производной состоит в следующем: если t – время прямолинейного движения материальной точки, $s(t)$ – путь, пройденный за время t, то $s'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ – мгновенная скорость движения точки в момент времени t_0.

13.2. Правила дифференцирования

Основные формулы. Если $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, то справедливы следующие *формулы дифференцирования арифметических операций*:

$$(cu)' = cu' \quad (c = \text{const}), \tag{13.3}$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \tag{13.4}$$

$$(uv)' = u'v + uv', \tag{13.5}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Формулы (13.3) и (13.4) выражают *свойство линейности* операции дифференцирования. Формула (13.4) имеет аналогичный вид для любого конечного количества слагаемых.

Равенство (13.4) не всегда верно для бесконечного количества функций.

Формула дифференцирования произведения (13.5) обобщается на любое конечное количество множителей $f_k = f_k(x)$, $k = \overline{1, n}$:

$$(f_1 f_2 f_3 \cdot \ldots \cdot f_{n-1} f_n)' = f_1' f_2 f_3 \cdot \ldots \cdot f_{n-1} f_n +$$
$$+ f_1 f_2' f_3 \cdot \ldots \cdot f_{n-1} f_n + \ldots + f_1 f_2 f_3 \cdot \ldots \cdot f_{n-1} f_n'.$$

***Дифференцирование сложной и обратной функций*:**

1) если $y = f(g(x))$ – сложная функция, где $y = f(u)$, $u = g(x)$ – дифференцируемые функции, то

$$y_x' = f_g' g_x' \quad \left(\text{или } \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}\right);$$

2) если для дифференцируемой функции $y = f(x)$ существует обратная дифференцируемая функция $x = g(y)$, то

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} \quad (g'(y) \neq 0).$$

Таблица производных. На области определения соответствующих функций справедливы следующие формулы:

$(c)' = 0$, где $c = \text{const}$;

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$ $(\alpha = \text{const})$, в частности

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\qquad \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$,

$(a^x)' = a^x \ln a$ $(a = \text{const}, a > 0)$, в частности

$(e^x)' = e^x$,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} \quad (a = \text{const},\ a > 0,\ a \neq 1), \text{ в частности}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \qquad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \qquad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Если вместо независимой переменной x в качестве аргумента используется функция $u(x)$, то верна следующая *обобщенная таблица производных*:

$$(c)' = 0, \quad c = \text{const},$$

$$(u(x)^\alpha)' = \alpha(u(x))^{\alpha-1}u'(x), \text{ в частности}$$

$$(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}, \qquad \left(\frac{1}{u(x)}\right)' = -\frac{u'(x)}{(u(x))^2},$$

$$(a^{u(x)})' = a^{u(x)}\ln a \cdot u'(x), \text{ в частности}$$

$$(e^{u(x)})' = e^{u(x)}u'(x),$$

$$(\log_a u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)\ln a}, \text{ в частности}$$

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)},$$

$$(\sin u(x))' = \cos u(x) u'(x), \qquad (\cos u(x))' = -\sin u(x) u'(x),$$

$$(\operatorname{tg} u(x))' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}, \qquad (\operatorname{ctg} u(x))' = -\frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)},$$

$$(\arcsin u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}, \qquad (\arccos u(x))' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}},$$

$$(\operatorname{arctg} u(x))' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}, \qquad (\operatorname{arcctg} u(x))' = -\frac{u'(x)}{1+u^2(x)},$$

$$(\operatorname{sh} u(x))' = \operatorname{ch} u(x) u'(x), \qquad (\operatorname{ch} u(x))' = \operatorname{sh} u(x) u'(x),$$

$$(\operatorname{th} u(x))' = \frac{u'(x)}{\operatorname{ch}^2 u(x)}, \qquad (\operatorname{cth} u(x))' = -\frac{u'(x)}{\operatorname{sh}^2 u(x)}.$$

В качестве примера вычислим производные сложных функций:

$$(\sin^2 3x)' = 2\sin 3x \cos 3x \cdot 3 = 3\sin 6x,$$

$$(\operatorname{tg}^3(x^2+2x-5))' = 3\operatorname{tg}^2(x^2+2x-5)\frac{1}{\cos^2(x^2+2x-5)}(2x+2),$$

$$(\sqrt{\ln(5x-4)})' = \frac{1}{2\sqrt{\ln(5x-4)}}\frac{1}{5x-4}\cdot 5.$$

Дифференцирование выражений с переменной в основании степени и в показателе. При вычислении производной функции $y = f(x)^{g(x)}$ (переменная содержится и в основании степени, и в показателе) не представляется возможным воспользоваться табличными формулами, так как формула дифференцирования степенной функции предполагает, что показатель степени – постоянная величина (число), а у показательной функции постоянно основание.

Первый способ – *логарифмическое дифференцирование*. В данном случае необходимо реализовать «пошагово» следующий процесс:

1) прологарифмировать равенство $y = f(x)^{g(x)}$, например по основанию e, при условии $f(x) > 0$:

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)},$$

$$\ln y = g(x)\ln f(x); \tag{13.6}$$

2) вычислить производную по x для равенства (13.6), считая при этом, что $y = y(x)$:

$$\frac{1}{y}y'(x) = g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x); \tag{13.7}$$

3) выразить $y'(x)$ из уравнения (13.7):

$$y'(x) = y\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)}f'(x)\right); \qquad (13.8)$$

4) в правую часть равенства (13.8) вместо y подставить заданное выражение:

$$y'(x) = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)}f'(x)\right).$$

З а м е ч а н и е. Способ логарифмического дифференцирования можно использовать и тогда, когда задана функция, содержащая большое количество множителей, делителей, степеней. Вначале логарифмированием переводят выражение в сумму, разность логарифмов, а затем дифференцируют.

В т о р о й с п о с о б – по основному свойству логарифмов:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Полученное выражение дифференцируют как сложную функцию.

Производная неявной функции. Допустим, что функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением

$$F(x, y) = 0 \qquad (13.9)$$

и требуется найти $y'(x)$.

П е р в ы й с п о с о б. Если практически возможно, из уравнения (13.9) явно выражают $y = y(x)$ и вычисляют $y'(x)$ по правилам нахождения производной.

В т о р о й с п о с о б. Не выражая из уравнения (13.9) переменную y через x, необходимо сделать следующее:

1) продифференцировать уравнение (13.9) по x, считая, что $y = y(x)$;

2) выразить $y'(x)$ из полученного равенства как из уравнения.

После того как выразили $y'(x)$, в правой части равенства останется y. Поскольку явное выражение y через x не всегда возможно, считают, что такая зависимость y от x существует.

Например, вычислить $y'(x)$, если $y^2\sin x + \ln y = 5$.
Дифференцируем уравнение, считая $y = y(x)$:

$$2yy'\sin x + y^2\cos x + \frac{1}{y}y' = 0.$$

Имеем:

$$y'\left(2y\sin x+\frac{1}{y}\right)=-y^2\cos x.$$

Получаем: $y'(x)=-\dfrac{y^2\cos x}{2y\sin x+\dfrac{1}{y}}$.

Дифференцирование функций, заданных параметрически. Пусть функция задана параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in[\alpha, \beta], \tag{13.10}$$

где t – параметр, и требуется найти $y'(x)$.

П е р в ы й с п о с о б. Если практически возможно и целесообразно, то из первого уравнения системы (13.10) выражают t через x и подставляют во второе уравнение. Полученное выражение дифференцируют как сложную функцию.

В т о р о й с п о с о б. Используют формулу

$$y'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{13.11}$$

Если возможно, то из первого уравнения системы (13.10) выражают t через x и подставляют в равенство (13.11). Если это сделать проблематично, то считают, что таким образом можно выразить t через x.

13.3. Дифференциал функции

Понятие дифференциала и его свойства. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0. *Приращением функции* $f(x)$ *в точке* x_0 называется разность $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, где $\Delta x=x-x_0$ – приращение аргумента.

Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если ее приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y=A\Delta x+\alpha\Delta x,$$

где $A\in\mathbf{R}$; $\alpha=\alpha(x)$ – бесконечно малая при $\Delta x\to 0$. В случае дифференцируемости функции в точке выполняется $A=f'(x_0)$, т.е.

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x.$$

Главная часть приращения дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x)$ называется *дифференциалом функции в точке*:

$$dy(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Для независимой переменной верно равенство $dx = \Delta x$. Окончательно формула дифференциала функции $f(x)$ в точке дифференцируемости принимает вид

$$dy = f'(x)dx.$$

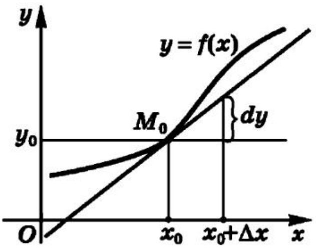


Рис. 13.2

Геометрический смысл дифференциала функции в точке x_0 состоит в следующем: дифференциал представляет собой приращение ординаты касательной к графику функции в точке $M(x_0, y_0)$ (рис. 13.2).

Верны следующие формулы:

$$d(cf) = cdf, \quad d(f + g) = df + dg,$$

$$d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg,$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2} \quad (g(x) \neq 0),$$

где $f = f(x)$, $g = g(x)$ – дифференцируемые функции.

Дифференциал используют для приближенных вычислений значения функции:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x + f(x_0),$$

при условии, что Δx мало.

13.4. Производные и дифференциалы высших порядков

Производные и дифференциалы высших порядков, их вычисление. Допустим, что функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ на некотором промежутке и $f'(x)$ дифференцируема на этом промежутке.

Производной второго порядка $f''(x)$ функции $f(x)$ называется производная первой производной:

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Производную второго порядка обозначают также $f^{(2)}(x)$, $\frac{d^2 f}{dx^2}$, f''_{x^2}.

При условии дифференцируемости второй производной определяется *производная третьего порядка*:

$$f'''(x) = (f''(x))'.$$

Ее обозначают также $f^{(3)}(x)$, $\frac{d^3 f}{dx^3}$, f'''_{x^3}.

По определению полагают $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Производная любого порядка n, $n \in \mathbf{N}$ (при условии дифференцируемости производной предыдущего порядка), определяется формулой

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Производную порядка n обозначают также $\frac{d^n f}{dx^n}$, $f^{(n)}_{x^n}$.

Если $f = f(x)$ и $g = g(x)$ – функции, дифференцируемые n раз ($n \in \mathbf{N}$), то справедливы формулы, выражающие *свойство линейности* производной порядка n:

$$(cf(x))^{(n)} = cf^{(n)}(x), \quad c = \text{const},$$

$$(f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x).$$

Для дифференцируемости произведения функций верна *формула Лейбница*:

$$(f(x)g(x))^{(n)} = C_n^0 f^{(n)} g^{(0)} + C_n^1 f^{(n-1)} g^{(1)} + C_n^2 f^{(n-2)} g^{(2)} + \ldots +$$
$$+ C_n^{n-1} f^{(1)} g^{(n-1)} + C_n^n f^{(0)} g^{(n)},$$

где C_n^m $(m = 0, 1, \ldots, n)$ – биномиальные коэффициенты.

Дифференциал порядка n ($n \in \mathbf{N}$) функции $f(x)$ определяется формулой

$$d^n f = f^{(n)}(x) dx^n.$$

Формула Тейлора. Пусть функция $f(x)$ определена и $n+1$ раз дифференцируема в точке x_0 и некоторой ее окрестности. Тогда верна формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x), \tag{13.12}$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}; \tag{13.13}$$

ξ – некоторая точка из окрестности точки x_0.

Выражение (13.13) называется *остаточным членом в форме Лагранжа*.

Если $x_0 = 0$, то формула Тейлора (13.12) называется *формулой Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$.

Формулы Маклорена для элементарных функций. Пусть $n \in \mathbf{N}$ и ξ – некоторая точка из окрестности точки 0, в которой функция определена и $n+1$ раз дифференцируема. Тогда верны формулы:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$;

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x),$$

где $R_{2n+2}(x) = \dfrac{\sin\left(\xi + (2n+3)\dfrac{\pi}{2}\right)}{(2n+3)!} x^{2n+3};$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x),$$

где $R_{2n+1}(x) = \dfrac{\cos(\xi + (n+1)\pi)}{(2n+2)!} x^{2n+2};$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} x^{n+1};$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1} x^{n+1}.$

13.5. Исследование функций методами дифференциального исчисления

Условия монотонности и экстремума функции. Исследование функций на экстремум выполняют по приведенным ниже теоремам.

Достаточное условие монотонности функции. Если для дифференцируемой на (a, b) функции f выполняется условие $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, то f возрастает (убывает) на этом интервале.

Необходимое условие экстремума. Если x_0 – точка локального экстремума и функция $f(x)$ дифференцируема в этой точке, то

$$f'(x) = 0. \tag{13.14}$$

Геометрически условие (13.14) означает, что для точки экстремума x_0 касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ параллельна оси Ox.

Те точки x из области определения функции, для которых производная существует и равна нулю, называются *стационарными точками функции*.

Те точки x_0 из области определения функции, для которых выполняется условие (13.14) или производная в которых не существует, называются *критическими точками функции*. Не всякая критическая точка функции является точкой ее экстремума.

Первое достаточное условие экстремума. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в критической точке x_0 и дифференцируема в выколотой ее окрестности. Если

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ для } x < x_0, \\ f'(x) < 0 \text{ для } x > x_0, \end{cases}$$

то x_0 – точка максимума, а если

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \text{ для } x < x_0, \\ f'(x) > 0 \text{ для } x > x_0, \end{cases}$$

то x_0 – точка минимума.

Второе достаточное условие экстремума. Если x_0 – критическая точка $f(x)$, в которой функция дважды дифференцируема, и $f''(x_0) < 0 \quad (f''(x_0) > 0)$, то x_0 – точка максимума (минимума).

Третье достаточное условие экстремума. Пусть в точке x_0 функция f дифференцируема n раз ($n > 1$) и

$$\begin{cases} f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0, \end{cases}$$

причем $f^{(n)}(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда при четном n функция f имеет экстремум в точке x_0: максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$; минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$. При нечетном n в точке x_0 экстремума нет.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке называют еще *глобальным максимумом* и *минимумом* соответственно.

Теорема Вейерштрасса. Непрерывная на отрезке функция достигает на этом отрезке своих наибольшего и наименьшего значений.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ необходимо:

1) вычислить производную функции;

2) найти критические точки функции $f(x)$;

3) отобрать для исследования только критические точки, которые принадлежат (a,b);

4) вычислить значения функции в отобранных критических точках и на концах отрезка;

5) среди вычисленных значений функции найти наибольшее (т.е. $\max\limits_{[a,b]} f(x)$) и наименьшее (т.е. $\min\limits_{[a,b]} f(x)$).

Выпуклость и вогнутость графика функции. График функции $y=f(x)$, непрерывной на промежутке X, $X\subseteq\mathbf{R}$, называется *выпуклым* (*выпуклым вверх*) на промежутке X, если точки любой части AB графика функции $y=f(x)$, где $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, лежат не ниже отрезка AB (рис. 13.3).

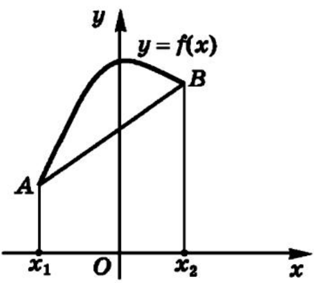


Рис. 13.3

График функции $y=f(x)$, непрерывной на промежутке X ($X\subseteq\mathbf{R}$), называется *вогнутым* (*выпуклым вниз*) на промежутке X, если точки любой части AB графика функции $y=f(x)$, где $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, лежат не выше отрезка AB (рис. 13.4).

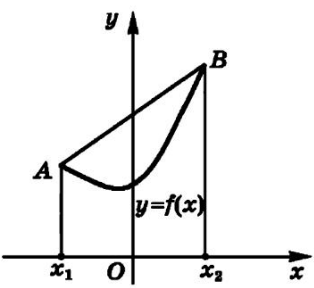


Рис. 13.4

Для непрерывной на промежутке X функции $y=f(x)$ приведенные выше определения равносильны следующим: график функции $y=f(x)$, непрерывной на промежутке X, называется *выпуклым* (*вогнутым*), если для любых точек x_1 и x_2 из этого промежутка справедливо неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\qquad\left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right).$$

Достаточное условие выпуклости, вогнутости. Пусть на промежутке X, $X \subset \mathbf{R}$, функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную. Если $f''(x) < 0$ для всех $x \in X$, то график функции выпуклый на X, если $f''(x) > 0$, – то вогнутый.

Точки перегиба. Точка x_0 называется *точкой перегиба* графика функции, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ график функции выпуклый (вогнутый), а для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ – вогнутый (выпуклый).

В точке перегиба происходит изменение выпуклости на вогнутость или наоборот (рис. 13.5).

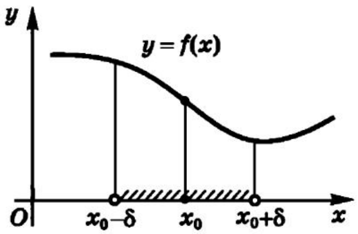


Рис. 13.5

Точками возможного перегиба графика функции $f(x)$ могут быть точки, в которых $f''(x) = 0$ или в которых производная второго порядка не существует.

Первое достаточное условие перегиба. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки x_0 и

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \quad (f''(x) > 0) \quad \text{для } x < x_0, \\ f''(x) < 0 \quad (f''(x) < 0) \quad \text{для } x > x_0, \end{cases}$$

то x_0 является точкой перегиба графика функции $f(x)$.

Пусть в точке x_0 существует непрерывная производная n-го порядка $(n \geq 2)$ функции $f(x)$ и выполнены условия:

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \;\; f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Если n – нечетное число, то в точке x_0 график функции $f(x)$ имеет перегиб.

Общий план исследования функции. Под *исследованием функции* $f(x)$ понимают изучение ее свойств и построение графика. Это целесообразно делать в соответствии со следующим планом:

1) найти область определения $D(f)$;

2) найти область значений $E(f)$ (если это возможно на данном этапе исследования);

3) исследовать функцию на четность и нечетность;

4) исследовать функцию на периодичность;

5) найти точки пересечения графика с осями координат (нули функции): а) с Ox (полагают $y = 0$); б) с Oy (полагают $x = 0$);

6) исследовать функцию на непрерывность и разрывы;

7) найти горизонтальную, вертикальную и наклонную асимптоты, если они существуют;

8) исследовать функцию на монотонность и экстремум;

9) исследовать график функции на выпуклость, вогнутость и точки перегиба;

10) построить график функции.

13.6. Правило Лопиталя для вычисления предела функции

Во многих случаях для раскрытия неопределенности типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении предела к цели приводит *правило Лопиталя*. Оно базируется на следующих теоремах.

Теорема 1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции, которые имеют производные в окрестности точки x_0, за исключением, может быть, самой этой точки. Пусть также $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ в указанной окрестности и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$. Тогда если существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и справедливо равенство

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции, которые имеют производные в окрестности точки x_0, за исключением, может быть, самой точки x_0. Пусть также $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ в указанной окрестности и

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty.$$

Тогда если существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и справедливо равенство

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 1 указывает способ раскрытия неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$, а теорема 2 – неопределенности типа $\dfrac{\infty}{\infty}$. Если после использования этих теорем снова получаем неопределенность $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, то в случае выполнения условий соответствующей теоремы правило Лопиталя можно применить повторно.

Теоремы 1 и 2 приведены для случая $x \to x_0$ (предела в точке). Аналогичные теоремы справедливы и для раскрытия неопределенностей типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ при $x \to \pm\infty$.

Если имеются неопределенности иного типа $\left(\text{кроме} \dfrac{0}{0} \text{ и } \dfrac{\infty}{\infty}\right)$, то использование правила Лопиталя также не исключается. Однако вначале выражение, стоящее под знаком предела, необходимо тождественно преобразовать, чтобы возникла неопределенность $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

14

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

14.1. Неопределенный интеграл и его вычисление

Понятие неопределенного интеграла. Допустим, что функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на некотором промежутке $X \subseteq \mathbf{R}$.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для $f(x)$, если для всех $x \in X$ выполняется $F'(x) = f(x)$. Если функция $f(x)$ имеет первообразную, то она имеет бесчисленное множество первообразных, причем любые две из них отличаются друг от друга на постоянную величину.

График первообразной $F(x)$ для функции $f(x)$ называется *интегральной кривой*.

Если $F_1(x), F_2(x), \ldots$ – первообразные данной функции $f(x)$, то их графики представляют собой семейство кривых, смещенных вдоль оси Oy параллельным переносом.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных данной функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{14.1}$$

Функция $f(x)$ в равенстве (14.1) называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, $F(x)$ – какая-либо из первообразных для $f(x)$, C – произвольная постоянная.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство всех интегральных кривых, получаемых при непрерывном параллельном переносе одной из них по направлению оси Oy от $-\infty$ до $+\infty$.

Отыскание первообразных называется *интегрированием*. Интегрирование есть действие, обратное дифференцированию (с точностью до константы).

Свойства неопределенного интеграла:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; 2) $d\int f(x)dx = f(x)dx$; 3) $\int dF(x) = F(x) + C$;

4) если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(u)du = F(u)+C$, где u – любая дифференцируемая функция от x;

5) $\int c f(x)dx = c\int f(x)dx$, $c=\text{const}$;

6) $\int \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ (это свойство обобщается на любое конечное число слагаемых).

Свойства 5 и 6 в совокупности выражают *линейность неопределенного интеграла.*

Таблица основных интегралов. Всюду далее $C=\text{const}$. Верны формулы:

$$\int 0dx = C,$$

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \ (\alpha\neq -1), \quad \int\frac{dx}{x} = \ln|x|+C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C \quad (a=\text{const},\ a>0), \text{ в частности}$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \qquad \int\frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C, \qquad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C,$$

$$\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C, \qquad \int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\begin{array}{l}\arcsin\dfrac{x}{|a|}+C,\\ -\arccos\dfrac{x}{|a|}+C,\end{array}\right. \qquad \int\frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C,\\ -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a}+C,\end{array}\right.$$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C, \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C.$$

Формулы таблицы основных интегралов верны на ОДЗ соответствующих функций.

Обобщенная таблица основных интегралов. Пусть $u = u(x)$ – дифференцируемая функция, $du = u'(x)dx$ (дифференциал функции u), $C = \text{const}$. Верны формулы:

$$\int 0\,du = C,$$

$$\int u^{\alpha} du = \frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{du}{u} = \ln|u(x)| + C,$$

$$\int a^{u} du = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + C \quad (a = \text{const}, \ a > 0), \text{ в частности}$$

$$\int e^{u} du = e^{u(x)} + C,$$

$$\int \sin u\,du = -\cos u(x) + C, \qquad \int \cos u\,du = \sin u(x) + C,$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\,u(x) + C, \qquad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\,u(x) + C,$$

$$\int \mathrm{sh}\,u\,du = \mathrm{ch}\,u(x) + C, \qquad \int \mathrm{ch}\,u\,du = \mathrm{sh}\,u(x) + C,$$

$$\int \frac{du}{\mathrm{ch}^2 u} = \mathrm{th}\,u(x) + C, \qquad \int \frac{du}{\mathrm{sh}^2 u} - \mathrm{cth}\,u(x) + C,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \left[\begin{array}{l} \arcsin\dfrac{u(x)}{|a|} + C, \\[2ex] -\arccos\dfrac{u(x)}{|a|} + C, \end{array}\right.$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{u(x)}{a} + C, \\[2ex] -\dfrac{1}{a}\,\mathrm{arcctg}\,\dfrac{u(x)}{a} + C, \end{array}\right.$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u(x) - a}{u(x) + a}\right| + C,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u(x) + \sqrt{u(x)^2 \pm a^2}\right| + C.$$

Формулы обобщенной таблицы основных интегралов верны на ОДЗ соответствующих функций.

Некоторые дополнительные формулы интегралов. На ОДЗ выражений верны следующие формулы:

Неопределенный интеграл

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}dx = \frac{ax}{c} - \frac{ad-cb}{c^2}\ln|cx+d| + C \quad (c \neq 0),$$

$$\int \frac{x^2dx}{ax+b} = \frac{x^2}{2a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2}{a^3}\ln|ax+b| + C \quad (a \neq 0),$$

$$\int \frac{xdx}{(ax+b)^2} = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2}\ln|ax+b| + C \quad (a \neq 0),$$

$$\int \frac{x^2dx}{(ax+b)^2} = \frac{x}{a^2} - \frac{b^2}{a^3(ax+b)} - \frac{2b}{a^3}\ln|ax+b| + C \quad (a \neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)} + \frac{1}{b^2}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right| + C \quad (b \neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a \neq 0),$$

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+a} = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{a}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}} + C \quad (a > 0),$$

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-a} = 2\sqrt{x} - \sqrt{a}\ln\left|\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right| + C \quad (a > 0),$$

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{(x+a)^2} = -\frac{\sqrt{x}}{x+a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}} + C \quad (a > 0),$$

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{(x-a)^2} = -\frac{\sqrt{x}}{x-a} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right| + C \quad (a > 0),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)} = \frac{2}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}} + C \quad (a > 0),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-a)} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right| + C \quad (a>0),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)^2} = \frac{\sqrt{x}}{a(x+a)} + \frac{1}{a\sqrt{a}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}} + C \quad (a>0),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-a)^2} = -\frac{\sqrt{x}}{a(x-a)} + \frac{1}{2a\sqrt{a}} \ln\left|\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right| + C \quad (a>0),$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C,$$

$$\int \sin^4 x dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C,$$

$$\int \cos^4 x dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \pm \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\pm\frac{\pi}{8}\right)\right| + C,$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C,$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C,$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x + C,$$

$$\int \operatorname{ctg}^2 x dx = -\operatorname{ctg} x - x + C,$$

$$\int \arcsin\frac{x}{a}dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C,$$

$$\int \arccos\frac{x}{a}dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C,$$

$$\int \operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx = x\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(x^2 + a^2) + C,$$

$$\int \operatorname{arcctg}\frac{x}{a}dx = x\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(x^2 + a^2) + C.$$

Некоторые неберущиеся интегралы. Существуют неопределенные интегралы от элементарных функций, которые не могут быть выражены через элементарные функции. Такими интегралами, в частности, являются следующие:

$$\int e^{-x^2}dx, \qquad \int e^{x^2}dx,$$

$$\int \frac{dx}{\ln x}, \qquad \int \frac{e^x}{x}dx,$$

$$\int \sin x^2 dx, \qquad \int \cos x^2 dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}dx, \qquad \int \frac{\cos x}{x}dx,$$

$$\int \frac{x}{\sin x}dx, \qquad \int \frac{x}{\cos x}dx,$$

$$\int x \operatorname{tg} x dx, \qquad \int \frac{\operatorname{tg} x}{x}dx,$$

$$\int x \operatorname{ctg} x dx, \qquad \int \frac{\operatorname{ctg} x}{x}dx,$$

$$\int \frac{\arcsin x}{x}dx, \qquad \int \frac{\arccos x}{x}dx,$$

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx, \qquad \int \frac{\operatorname{arcctg} x}{x}dx.$$

Методы интегрирования. В зависимости от вида подынтегрального выражения используют различные методы интегрирования.

Метод непосредственного интегрирования. Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании основных свойств неопределенного интеграла и таблицы простейших интегралов.

Метод замены переменной. В интеграле

$$\int f(u(x))u'(x)dx \tag{14.2}$$

делают замену $u(x)=t$ и вычисляют: $dt=u'(x)dx$. Получают $\int f(t)dt$. Далее используют таблицу простейших интегралов. Метод математически обоснован при условии, что $f(t)$ – непрерывная функция, а функция $t=u(x)$ имеет непрерывную производную, причем область значений функции $t=u(x)$ принадлежит области определения функции $f(t)$.

Интегрирование методом замены переменной записывают в виде

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \begin{vmatrix} u(x)=t, \\ u'(x)dx=dt \end{vmatrix} = \int f(t)dt =$$

$$= F(t)+C = F(u(x))+C, \tag{14.3}$$

где $F(t)$ – первообразная для $f(t)$.

Метод подстановки. Его суть выражают равенства:

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x=u(t), \\ dx=u'(t)dt \end{vmatrix} = \int f(u(t))u'(t)dt. \tag{14.4}$$

Фактически формула (14.4) – это часть цепочки формул (14.3) при реализации процесса справа налево. Часто последний интеграл в выражении (14.4) вычисляется проще, чем заданный.

Метод поднесения под знак дифференциала. Заданный интеграл (14.2) преобразуют к виду

$$\int f(u(x))d(u(x)),$$

где $u(x)$ – некоторая дифференцируемая функция. Замену переменной не применяют. Далее интеграл вычисляют, пользуясь обобщенной таблицей интегралов (если это возможно).

М е т о д и н т е г р и р о в а н и я п о ч а с т я м. *Интегрированием по частям* называется вычисление интеграла по формуле

$$\int u dv = uv - \int v du, \tag{14.5}$$

где функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные.

Выражение uv в формуле (14.5) называется *внеинтегральным слагаемым*. В качестве u берется функция, которая при дифференцировании упрощается, а в качестве dv – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

В процессе решения примера формула (14.5) может быть использована несколько раз.

Формула интегрирования по частям может быть записана также в виде

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx.$$

Приведем некоторые случаи использования метода интегрирования по частям.

Для нахождения интегралов

$$\int p(x)e^{\alpha x}dx, \quad \int p(x)\sin axdx, \quad \int p(x)\cos axdx,$$

где $p(x)$ – многочлен, за u следует принять многочлен $p(x)$, а за dv – выражения соответственно $e^{\alpha x}dx$, $\sin axdx$, $\cos axdx$.

Для нахождения интегралов

$$\int p(x)\ln xdx, \quad \int p(x)\arccos xdx, \quad \int p(x)\arcsin xdx,$$

где $p(x)$ – многочлен (в частности, число), за u принимают функции соответственно $\ln x$, $\arccos x$, $\arcsin x$, а за dv – выражение $p(x)dx$.

Для нахождения интегралов

$$\int e^{\alpha x}\sin bxdx, \quad \int e^{\alpha x}\cos bxdx$$

формулу интегрирования по частям применяют последовательно 2 раза, причем оба раза за $u(x)$ принимают либо показательную функцию, либо тригонометрическую. В результате снова получают интеграл заданного вида, который находят из полученного равенства как из уравнения.

Например, интегралы:

1) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$; 2) $\int \sqrt{1-x^2} dx$; 3) $\int e^x \sin x dx$

могут быть найдены с помощью основных методов интегрирования.

1. Используем метод поднесения под дифференциал:

$$\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx = \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C.$$

2. Используем метод подстановки:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \begin{vmatrix} x = \sin t, \\ dx = \cos t dt \end{vmatrix} = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt =$$

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{4} \int \cos 2t d(2t) = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + C.$$

3. Используем метод интегрирования по частям:

$$\int e^x \sin x dx = \begin{vmatrix} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{vmatrix} = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{vmatrix} = -e^x \cos x - e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Получим:

$$\int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx.$$

Тогда $2\int e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x)$, т.е. $\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$.

14.2. Интегрирование некоторых классов функций

Интегрирование квадратного трехчлена. Всюду далее $a, b, c \in \mathbf{R}$, дискриминант квадратного трехчлена $D \neq 0$. Возможны приведенные ниже случаи.

Интеграл $\int (ax^2 + bx + c)^n dx$, где $n \in \mathbf{N}$, находят возведением в n-ю степень квадратного трехчлена и вычислением интеграла от суммы степенных функций.

Интеграл

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \tag{14.6}$$

находят выделением полного квадрата в знаменателе и поднесением под дифференциал; этот интеграл сводится к табличному.

Интеграл $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$, где $M, N = \text{const}$, представляют суммой

$$M\int \frac{xdx}{ax^2+bx+c} + N\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Первый интеграл в этой сумме вычисляют методом поднесения под дифференциал (выражение в числителе дополняют до полного дифференциала знаменателя), а второй – аналогично интегралу (14.6).

Интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{14.7}$$

вычисляют выделением полного квадрата в знаменателе и поднесением под дифференциал, в результате чего интеграл сводится к табличному.

Интеграл

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \tag{14.8}$$

представим суммой

$$M\int (ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}xdx + N\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $M, N = \text{const}$. Методом поднесения под дифференциал первый интеграл в сумме (14.8) сводится к табличному (к интегралу от степенной функции), второй интеграл вычисляют аналогично интегралу (14.7).

Интеграл

$$\int \frac{dx}{(Mx+N)\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{14.9}$$

где $M, N = \text{const}$, вычисляют заменой $Mx+N = \frac{1}{t}$, в результате чего он сводится к интегралу вида (14.7).

Интеграл $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ может быть вычислен тригонометрической подстановкой (см. далее вычисление интеграла (14.16)).

Например:

$$\int\frac{3x-5}{x^2-6x+8}dx=3\int\frac{xdx}{x^2-6x+8}-5\int\frac{dx}{x^2-6x+8}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{2x-6+6}{x^2-6x+8}dx-5\int\frac{dx}{x^2-6x+8}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-6)dx}{x^2-6x+8}+\frac{3\cdot 6}{2}\int\frac{dx}{x^2-6x+8}-5\int\frac{dx}{x^2-6x+8}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2-6x+8)}{x^2-6x+8}+4\int\frac{d(x-3)}{(x-3)^2-1}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-6x+8\right|+\frac{4}{2}\ln\left|\frac{x-3-1}{x-3+1}\right|+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-6x+8\right|+2\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|+C.$$

Интегрирование рациональных дробей. Основным методом вычисления интегралов вида

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx, \tag{14.10}$$

где $P(x), Q(x)$ – многочлены, является *разложение подынтегральной функции на сумму простейших дробей*. Тогда вычисление интеграла (14.10) сводится к вычислению интеграла от многочлена или простейших дробей четырех типов.

***Интегралы от простейших дробей*:**

$$\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C \quad (a\in\mathbf{R}),$$

$$\int\frac{dx}{(x-a)^n}=\int(x-a)^{-n}dx=\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C=$$

$$=\frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C \quad (n\in\mathbf{N},\ n\geq 2,\ a\in\mathbf{R}),$$

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=A\int\frac{xdx}{x^2+px+q}dx+B\int\frac{dx}{x^2+px+q}\,(A, B, p, q\in\mathbf{R})$$

(два последних интеграла вычисляют соответственно поднесением под дифференциал и выделением полного квадрата в знаменателе);

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = A\int (x^2+px+q)^{-n}xdx +$$

$$+B\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} \quad (n \in \mathbf{N},\ n \geq 2,\ A, B, p, q \in \mathbf{R}). \quad (14.11)$$

Первый интеграл из правой части равенства (14.11) вычисляют поднесением под дифференциал и далее как интеграл от степенной функции.

Для вычисления второго интеграла справа в знаменателе дроби выделяют полный квадрат, делают замену переменной и приходят к интегралу

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}, \quad a = \text{const}. \quad (14.12)$$

Интегралы типа (14.12) вычисляют с помощью рекуррентной формулы

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2}\,\frac{t}{(t^2+a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2}I_k, \quad (14.13)$$

последовательно полагая в ней $k = 1, 2, \ldots, n-1$. При этом исходный интеграл I_1 (для $k=1$) – это

$$I_1 \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}. \quad (14.14)$$

Формула (14.13) для $k=1$ приобретает вид

$$I_2 = \frac{1}{2a^2}\,\frac{t}{t^2+a^2} + \frac{1}{2a^2}I_1,$$

где I_1 – интеграл вида (14.14).

Процесс вычисления продолжается до получения значения I_n при заданном n.

Интегрирование тригонометрических выражений. Выбор способа интегрирования зависит от вида подынтегрального выражения.

Вычисление интегралов от произведения тригонометрических функций. 1. Интегралы

$$\int \sin\alpha x\cos\beta x dx, \quad \int \sin\alpha x \sin\beta x dx, \quad \int \cos\alpha x\cos\beta x dx$$

вычисляются после сведения подынтегрального выражения к сумме (разности) тригонометрических функций.

2. Интегралы

$$\int \sin^m \alpha x \cos^{2n-1}\alpha x dx, \int \cos^m \alpha x \sin^{2n-1}\alpha x dx \; (m\in\mathbf{R}, n\in\mathbf{N}) \quad (14.15)$$

(т.е. хотя бы одна из функций имеет нечетный показатель) вычисляют поднесением под дифференциал. В частности, если в первом из интегралов (14.15) $n=1$, $\alpha=1$, то

$$\int \sin^m x\cos x dx = \int \sin^m x d(\sin x) = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + C,$$

а если $n>1$, $n\in\mathbf{N}$, то

$$\int \sin^m x\cos^{2n-1} x dx = \int \sin^m x\cos^{2n-2} x\cos x dx =$$
$$= \int \sin^m x(1-\sin^2 x)^{n-1} d(\sin x).$$

Последний интеграл вычисляют как интеграл от степенной функции относительно $\sin x$.

3. Для вычисления интеграла

$$\int \sin^{2m}\alpha x\cos^{2n}\beta x dx \quad (m, n\in\mathbf{N})$$

используют формулы понижения степени:

$$\int \sin^{2m}\alpha x\cdot\cos^{2n}\beta x dx = \int\left(\frac{1-\cos 2\alpha x}{2}\right)^m \left(\frac{1+\cos 2\beta x}{2}\right)^n dx.$$

В зависимости от значений m, n возможно дальнейшее понижение степени и преобразование произведения тригонометрических функций.

Вычисление интегралов от тригонометрических функций заменой переменной. 1. Интегралы вида

$$\int R(\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)dx,$$

где R – рациональная функция, вычисляют заменой $\operatorname{tg} x = t$. Поскольку $x = \operatorname{arctg} t$, то $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. В результате приходят к интегралу от рациональной функции относительно t.

2. Если под интегралом хотя бы одна из функций $\sin x$, $\cos x$ содержится в четной степени в знаменателе дроби, то часто к цели приводит использование в вычислении формул

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$$

с дальнейшей заменой $\operatorname{tg} x = t$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Приходят к интегралу от рациональной функции.

3. Интегралы вида $\int f(\sin x, \cos x)dx$, где f – некоторая функция, в ряде случаев можно вычислять заменой переменной. Замену производят исходя из четности функции f по $\sin x$ или $\cos x$:

1) если $f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, т.е. функция нечетная по $\sin x$, то делают замену $\cos x = t$;

2) если $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, т.е. функция нечетная по $\cos x$, то делают замену $\sin x = t$;

3) если $f(-\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$, т.е. функция нечетная и по $\sin x$, и по $\cos x$, то делают замену $\operatorname{tg} x = t$.

4. В некоторых случаях (когда иные способы вычисления интегралов не приводят к цели) используют *универсальную тригонометрическую подстановку*:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}.$$

Далее делают замену $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, т.е:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Поскольку $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$, то $dx = \frac{2tdt}{1+t^2}$. В результате приходят к интегралу от рациональной функции.

Интегрирование иррациональных функций. Выбор способа интегрирования зависит от вида иррационального выражения, стоящего под знаком интеграла.

Вычисление интегралов от квадратного трехчлена под корнем. Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx, \tag{14.16}$$

где R – рациональная функция от квадратного корня; дискриминант квадратного трехчлена $D \neq 0$; a, b, c – действительные числа, $a \neq 0$, в ряде случаев вычисляют с помощью тригонометрических подстановок.

Вначале выделением полного квадрата интеграл (14.16) сводится к одному из трех типов:

$$\int R\left(t, \sqrt{k^2 - t^2}\right)dt, \tag{14.17}$$

$$\int R\left(t, \sqrt{k^2 + t^2}\right)dt, \tag{14.18}$$

$$\int R\left(t, \sqrt{t^2 - k^2}\right)dt. \tag{14.19}$$

Для вычисления интегралов (14.17) – (14.19) используют соответственно следующие тригонометрические подстановки:

$$t = k\sin z, \quad t = k\operatorname{tg} z, \quad t = \frac{k}{\cos z}.$$

В результате корень извлекается и выражение под знаком интеграла преобразуется к рациональному выражению относительно тригонометрических функций.

Другие случаи вычисления интегралов от рациональных функций рассмотрены выше (см. интегралы (14.7) – (14.9)).

Вычисление интегралов методом рационализации. Выполняется такая алгебраическая подстановка, что иррациональность устраняется.

1. Интеграл

$$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{k}{l}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right)dx, \tag{14.20}$$

где R – некоторая рациональная функция относительно целых степеней переменной x; $m, n, \ldots, s \in \mathbf{Z}$, вычисляют заменой $x = t^p$, где $p = \text{НОК}(n, l, \ldots, s)$. В результате получают интеграл от рациональной функции.

2. Для нахождения интеграла

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{k}{l}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx, \tag{14.21}$$

где $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ($a \neq 0$ или $c \neq 0$; $c \neq 0$ или $d \neq 0$); $m, n, \ldots, s \in \mathbf{Z}$, делают замену $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^p$, где $p = \text{НОК}(n, l, \ldots, s)$, и приходят к интегралу от рациональной функции.

Интеграл (14.20) – это частный случай интеграла (14.21).

Рационализация с помощью подстановок Эйлера. Подстановки Эйлера используют для вычисления интегралов вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx, \tag{14.22}$$

где R – рациональная функция от корня; $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$; дискриминант квадратного трехчлена $D \neq 0$.

Первая подстановка Эйлера. Если в (14.22) $a > 0$, то можно сделать подстановку

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x \pm t \tag{14.23}$$

с некоторым выбором знаков в равенстве (14.23). Далее его возводят в квадрат, выражают из него x и сводят подынтегральную функцию в (14.22) к рациональной зависимости от t.

В т о р а я п о д с т а н о в к а Э й л е р а. Если в (14.22) $c>0$, то можно сделать подстановку

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm xt\pm\sqrt{c}$$

с некоторым выбором знаков. В результате функция выразится рационально через t.

Т р е т ь я п о д с т а н о в к а Э й л е р а. Если у квадратного трехчлена в (14.22) $D>0$ и x_1, x_2 – его корни, то используют подстановку

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm(x-x_1)t.$$

Она сводит подынтегральную функцию к рациональной зависимости от t.

Интегрирование дифференциального бинома. Выражение вида

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

где $m, n, p\in\mathbf{Q}$; $a, b\in\mathbf{R}$, называется *дифференциальным биномом* (*биномиальным дифференциалом*).

Интеграл

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

выражается через элементарные функции только в трех случаях. Для этого используют определенную подстановку.

1. Если $p\in\mathbf{Z}$, то необходимо сделать подстановку $x=t^k$, где k – наименьший общий знаменатель дробей m и n.

2. Если $\dfrac{m+1}{n}\in\mathbf{Z}$, то следует сделать подстановку $a+bx^n=t^s$, где s – знаменатель дроби p.

3. Если $\dfrac{m+1}{n}+p\in\mathbf{Z}$, то надо сделать подстановку $\dfrac{a}{x^n}+b=t^s$, где s – знаменатель дроби p.

15

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

15.1. Определенный интеграл и его вычисление

Понятие определенного интеграла. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ и выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1, n}$, произвольную точку λ_k (рис. 15.1). Обозначим через Δx_k длину k-го элементарного отрезка, а через Δ – длину наибольшего такого отрезка (диаметр разбиения): $\Delta = \max\limits_k \Delta x_k$.

Интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)\Delta x_k = f(\lambda_1)\Delta x_1 + f(\lambda_2)\Delta x_2 + ... + f(\lambda_n)\Delta x_n. \quad (15.1)$$

Рассматриваются всевозможные разбиения отрезка $[a, b]$ на такие частичные отрезки, что $\Delta \to 0$ при $n \to \infty$.

Если существует предел интегральных сумм (15.1) при $\Delta \to 0$, который не зависит ни от способа разбиения $[a, b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек λ_k, то этот предел на-

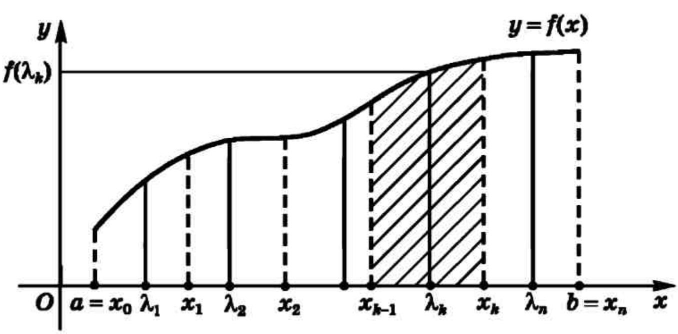


Рис. 15.1

зывается *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)\Delta x_k. \qquad (15.2)$$

Число a называется *нижним пределом интеграла*, b – *верхним пределом*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией.*

Если для функции существует определенный интеграл (15.2), то она называется *интегрируемой* на $[a, b]$.

Если функция интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Если функция непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Геометрический смысл интеграла: интеграл равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (15.3)$$

Физический смысл интеграла: интеграл равен длине пути, пройденного материальной точкой вдоль числовой оси со скоростью $v(t)$ за промежуток времени от t_1 до t_2:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

Свойства определенного интеграла. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то справедливы следующие свойства интеграла:

1) $\int_a^a f(x)dx = 0;$

2) $\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$

3) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \quad c = \text{const};$

4) $\int_a^b dx = b - a$;

5) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

6) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, где $a, b, c \in \mathbf{R}$ и функция интегрируема на соответствующих отрезках;

7) если $f(x) \le g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$;

8) если $f(x)$ – четная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx;$$

если $f(x)$ – нечетная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0;$$

9) если $f(x)$ – периодическая функция периода T, то для всякого $a \in \mathbf{R}$ выполняется

$$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx.$$

Методы вычисления определенного интеграла. Для вычисления определенного интеграла используют *формулу Ньютона – Лейбница*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Метод замены переменной (подстановки). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а функция $x = g(t)$ имеет непрерывную производную на $[\alpha, \beta]$, причем $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt. \qquad (15.4)$$

Метод интегрирования по частям. Используют формулу

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

где функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$.

Например, вычислим интегралы:

$$1) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + 2\cos^2 x} dx; \quad 2) \int_0^1 (2x+1)e^{2x} dx; \quad 3) \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx.$$

Используем основные методы вычисления определенных интегралов.

1. Поднесем под дифференциал и применим формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + 2\cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x \cos x}{1 + 2\cos^2 x} dx = -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-4\sin x \cos x}{1 + 2\cos^2 x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(1 + 2\cos^2 x)}{1 + 2\cos^2 x} = -\frac{1}{2}\ln\left|1 + 2\cos^2 x\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\ln\left(1 + 2\cos^2\frac{\pi}{2}\right) - \ln\left(1 + 2\cos^2\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

2. Используем формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^1 (2x+1)e^{2x} dx = \begin{vmatrix} u = 2x+1, & du = 2dx \\ dv = e^{2x}dx, & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(2x+1)e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{2x} dx =$$

$$= \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} = e^2.$$

3. Заменим переменную, используя формулу (15.4), и при этом учтем, что пределы интегрирования также изменятся:

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = 2\sin t, \quad dx = 2\cos t dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, \\ x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \end{matrix} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\; 2\cos t dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt =$$

$$= (2t + \sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

Приближенное вычисление определенных интегралов. Если первообразная $F(x)$ для функции $f(x)$ известна, то можно точно вычислить определенный интеграл по формуле Ньютона – Лейбница. Если же такое вычисление проблематично, то используют приближенные методы.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, x_k – точки разбиения $[a, b]$ на частичные отрезки:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,\ x_k = a + \frac{b-a}{n}k \quad (k = \overline{0, n}).$$

М е т о д п р я м о у г о л ь н и к о в. Справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right). \qquad (15.5)$$

Если функция $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную второго порядка $f''(x)$, то абсолютная погрешность приближения по формуле (15.5) оценивается следующим образом:

$$|R_n| \le \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2},$$

где $M_2 = \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|$.

М е т о д т р а п е ц и й. Используют формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k-1}^{n-1} f(x_k)\right). \qquad (15.6)$$

Если $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную второго порядка $f''(x)$, то абсолютная погрешность приближения по формуле (15.6) оценивается следующим образом:

$$|R_n| \le \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2},$$

где $M_2 = \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|$.

Метод парабол. Используют *формулу Симпсона*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}(f(a)+f(b)+4(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+$$
$$+f(x_{2m-1}))+2(f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{2m-2}))), \qquad (15.7)$$

где $n = 2m$.

Если функция $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную четвертого порядка, то верна следующая оценка абсолютной погрешности приближения по формуле Симпсона (15.7):

$$|R_n| \le \frac{M_4(b-a)^5}{180n^4},$$

где $M_4 = \max\limits_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

15.2. Геометрические приложения определенного интеграла

Площадь плоской фигуры. Площадь криволинейной трапеции для $f(x) \ge 0$ вычисляется по формуле (15.3), которая выражает геометрический смысл определенного интеграла.

Если $f(x) \le 0$ на отрезке $[a, b]$, то

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ меняет знак на $[a, b]$ (т.е. фигура, ограниченная кривой $f(x)$ на $[a, b]$, расположена по обе стороны от оси Ox (рис. 15.2)), то ее площадь

$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx.$$

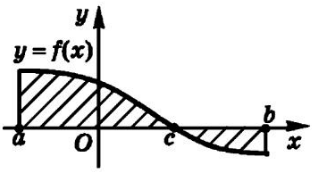


Рис. 15.2

Площадь фигуры, ограниченной двумя непрерывными кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и двумя прямыми $x = a$, $x = b$, где $f_2(x) \ge f_1(x)$ на $[a, b]$ (рис. 15.3), находят по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Если фигура ограничена прямыми $y = c$, $y = d$ и кривыми $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$, где $g_2(y) \ge g_1(y)$ для $y \in [c, d]$ (рис. 15.4), то ее площадь

$$S = \int_c^d (g_2(y) - g_1(y))dy.$$

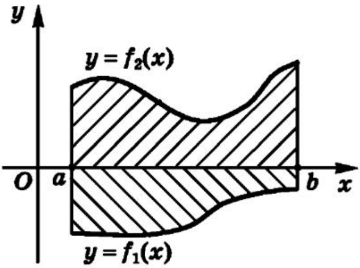


Рис. 15.3

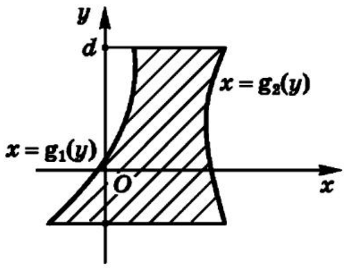


Рис. 15.4

Если кривая задана параметрически уравнениями,

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta], \tag{15.8}$$

то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью абсцисс, находят по формуле

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt,$$

где $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ $(y(t) \ge 0$ для $t \in [\alpha, \beta])$.

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, и лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, где $\varphi_1 < \varphi_2$ (рис. 15.5), выражается интегралом:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

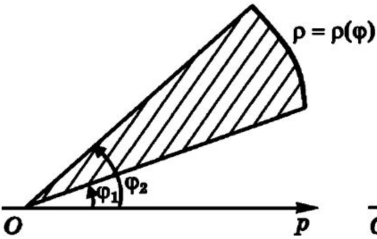


Рис. 15.5

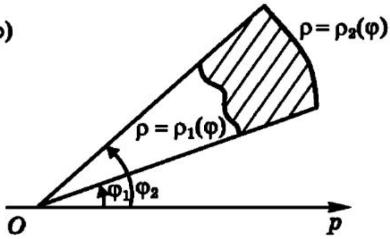


Рис. 15.6

Если фигура ограничена лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ и кривыми $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, где $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$ для $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ (рис.15.6), то ее площадь

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi))d\varphi.$$

Объем тела. Если для геометрического тела известна площадь $S = S(x)$ его сечения плоскостями, перпендикулярными оси Ox $(x \in [a, b])$, то для вычисления объема тела верна формула

$$V_x = \int_a^b S(x)dx.$$

Если тело получено вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, вокруг оси Ox (рис. 15.7), то объем тела вращения

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

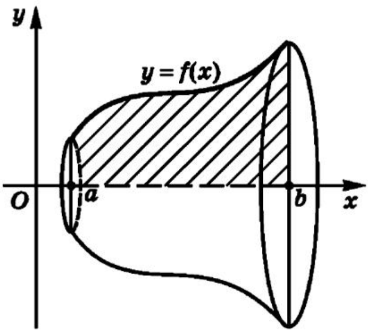


Рис. 15.7

Если фигура, ограниченная прямыми $x=a$, $x=b$ и кривыми $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ $(0\le f_1(x)\le f_2(x)$ для $x\in[a,b])$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения

$$V_x=\pi\int_a^b (f_2^{\,2}(x)-f_1^{\,2}(x))dx.$$

Объем тела, которое образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y=c$, $y=d$, непрерывной кривой $x=g(y)$ и отрезком оси Oy, определяется по формуле

$$V_y=\pi\int_c^d g^2(y)dy.$$

Если фигура, ограниченная прямыми $y=c$, $y=d$ и кривыми $x=g_1(y)$, $x=g_2(y)$ $(0\le g_1(y)\le g_2(y)$ для $y\in[c,d])$, вращается вокруг оси Oy, то объем тела вращения

$$V_y=\pi\int_c^d (g_2^{\,2}(y)-g_1^{\,2}(y))dy.$$

Если кривая задана параметрически уравнениями (15.8) и криволинейная трапеция, образованная этой кривой и прямыми $x=a$, $x=b$, где $a=x(\alpha)$, $b=x(\beta)$, вращается вокруг оси Ox, то объем такого тела вращения

$$V_x=\pi\int_\alpha^\beta y^2(t)x'(t)dt.$$

Если криволинейная трапеция, образованная кривой (15.8) и прямыми $y=c$, $y=d$, где $c=y(\alpha)$, $d=y(\beta)$, вращается вокруг оси Oy, то объем тела вращения

$$V_y=\pi\int_\alpha^\beta x^2(t)y'(t)dt.$$

Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $\rho=\rho(\varphi)$ и лучами $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$, вращается вокруг полярной оси, то объем такого тела вращения

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^3\sin\varphi d\varphi.$$

Площадь поверхности вращения. Если поверхность образована вращением вокруг оси Ox графика функции $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, и функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на $[a, b]$, то площадь поверхности вращения

$$S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Если поверхность образована вращением вокруг оси Oy графика функции $x = g(y)$, где $g(y) \geq 0$, $y \in [c, d]$, и $g(y)$ имеет непрерывную производную, то площадь поверхности вращения

$$S_y = 2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}\,dy.$$

Если кривая задана параметрически уравнениями (15.8), то площадь поверхности вращения вокруг оси Ox

$$S_x = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt,$$

а площадь поверхности вращения вокруг оси Oy

$$S_y = 2\pi\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, то площадь поверхности вращения вокруг полярной оси

$$S = 2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi.$$

Длина дуги кривой. Если дуга кривой задана уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, и функция $f(x)$ имеет непрерывную производную в указанном промежутке, то длина дуги кривой, содержащейся между двумя точками с абсциссами $x = a$, $x = b$, определяется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Если кривая задана уравнением $x = g(y)$ на $[c, d]$ и функция $x = g(y)$ имеет непрерывную производную в этом промежутке, то длина дуги кривой

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy.$$

Если кривая задана параметрически уравнениями (15.8), а $x(t)$, $y(t)$ – функции, имеющие непрерывные производные, то длина дуги кривой

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Если дуга пространственной кривой задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \\ z = z(t), \end{cases}$$

то ее длина

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt.$$

Если задано полярное уравнение кривой $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, где $\rho'(\varphi)$ непрерывна на $[\varphi_1, \varphi_2]$, то длина дуги этой кривой

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

15.3. Применение определенного интеграла для решения физических задач

Вычисление пути, пройденного точкой. Если $v(t)$ – скорость прямолинейно движущейся точки в момент времени t ($v(t) > 0$), то перемещение точки, т.е. путь, пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2, вычисляется по формуле

$$S=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

Вычисление работы. Работа, произведенная переменной силой $F(x)$ при перемещении в направлении оси Ox материальной точки от $x=a$ до $x=b$, вычисляется по формуле

$$A=\int_a^b F(x)dx.$$

Вычисление давления жидкости. Если в жидкость плотностью ρ вертикально погружена пластина, то давление жидкости на нее

$$p=\rho g\int_a^b xf(x)dx,$$

где g – ускорение свободного падения; $f(x)$ – функция, выражающая зависимость длины поперечного сечения пластины от глубины погружения.

Вычисление массы. Масса неоднородного стержня (расположенного на отрезке $[a,b]$ оси Ox), имеющего линейную плотность $\rho=\rho(x)$, где $\rho(x)$ – непрерывная на $[a,b]$ функция, вычисляется по формуле

$$m=\int_a^b \rho(x)dx.$$

Масса материальной дуги $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, имеющей плотность $\rho=\rho(x)$, вычисляется по формуле

$$M=\int_a^b \rho(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Координаты центра масс дуги плоской кривой $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, имеющей плотность $\rho=\rho(x)$, вычисляются по формулам:

$$x=\frac{\int_a^b \rho(x)x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{M},\quad y=\frac{\int_a^b \rho(x)f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{M},$$

где M – масса дуги.

16
НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

16.1. Несобственный интеграл I рода

Понятие несобственного интеграла I рода и его вычисление. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,+\infty)$, $a \in \mathbf{R}$, и для нее существует интеграл

$$\Phi(b)=\int_a^b f(x)dx, \tag{16.1}$$

где $b \in \mathbf{R}$; $[a,b] \subset [a,+\infty)$.

Несобственным интегралом I рода называется результат предельного перехода при $b \to +\infty$ в равенстве (16.1), т.е.

$$\lim_{b\to+\infty}\Phi(b)=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{16.2}$$

Его обозначают

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx. \tag{16.3}$$

Несобственный интеграл (16.3) называется *сходящимся*, если предел (16.2) существует; в таком случае он имеет определенное числовое значение.

Интеграл (16.3) называется *расходящимся*, если предел (16.2) не существует (т.е. предел не определен или $\Phi(b)$ – бесконечно большая функция при $b \to +\infty$).

Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}F(b)-F(a).$$

Аналогично определяется несобственный интеграл для функции $f(x)$, непрерывной на $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{16.4}$$

Его вычисляют по формуле

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a).$$

Если $f(x)$ определена и непрерывна на $(-\infty, +\infty)$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (16.5)$$

т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (16.6)$$

Интеграл (16.5) называется *сходящимся*, если сходятся оба интеграла в правой части равенства.

Для вычисления интеграла (16.6) используют формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Например,

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{dx}{4+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\bigg|_{2}^{b}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{b}{2} - \operatorname{arctg}1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Функция, для которой несобственный интеграл сходится, называется *интегрируемой в несобственном смысле*.

Замечание. Несобственный интеграл (16.6) определен с использованием пределов интегрирования a и b $(a \neq b)$. *Главным значением несобственного интеграла* называется

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{+a} f(x)dx = \text{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Возможна ситуация, когда $f(x)$ не интегрируема в несобственном смысле, но интегрируема в смысле главного значения.

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на $[a,+\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty}(u(x)v(x))$, то сходимость одного из интегралов

$$\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx, \quad \int_a^{+\infty} v(x)u'(x)dx$$

гарантирует сходимость второго и справедлива *формула интегрирования по частям*:

$$\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx = \lim_{b\to+\infty} u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^{+\infty} v(x)u'(x)dx.$$

Аналогичная формула верна и для интегралов по промежуткам $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$.

Для вычисления несобственного интеграла (16.3) используют также метод замены переменной, основу которого составляет следующая ***теорема***. Пусть выполняются условия:

1) функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,+\infty)$;

2) на промежутке $[\alpha,+\infty)$ определена строго монотонная функция $x = g(t)$, областью значений которой является промежуток $[a,+\infty)$, и $g(\alpha) = a$;

3) функция $g(t)$ имеет непрерывную производную на промежутке $[\alpha,+\infty)$.

Тогда из сходимости одного из интегралов

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{или} \quad \int_\alpha^{+\infty} f(g(t))g'(t)dt$$

следует сходимость и другого, а также справедлива формула

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^{+\infty} f(g(t))g'(t)dt.$$

Исследование на сходимость несобственных интегралов I рода. Для неотрицательных функций, непрерывных на $[a,+\infty)$, справедливы приведенные ниже теоремы (аналогичные теоремы справедливы также и для неотрицательных функций, заданных на $(-\infty, b]$ и $(-\infty, +\infty)$).

Критерий сходимости. Если $f(x) \geq 0$ для $x \in [a, +\infty)$, то для сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы существовала такая константа $C > 0$, что для всякого $b \in [a, +\infty)$ справедлива оценка

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq C.$$

Признак сравнения. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на $[a, +\infty)$ и для них выполняется условие $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тогда:

1) из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$;

2) из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

Предельный признак сравнения. Пусть на $[a, +\infty)$ определены непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$, причем $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, для которых

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C, \tag{16.7}$$

где $0 < C < +\infty$. Тогда интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ оба сходятся или оба расходятся.

Для исследования на сходимость по признаку сравнения и предельному признаку сравнения часто используют функцию $f(x) = \frac{1}{x^p}$ $(p \in \mathbf{R})$, для которой $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p \leq 1$.

Например, исследуем на сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{2x^2+3x+1}dx.$$

Подынтегральная функция положительна на $[1,+\infty)$. Используем предельный признак сравнения. Поскольку высшая степень числителя подынтегральной функции равна $\frac{1}{2}$, а высшая степень знаменателя равна 2, то для сравнения используем функцию $g(x)=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. Известно, что $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ сходится, так как $\frac{3}{2}>1$. Поскольку согласно формуле (16.7)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{x+1}}{2x^2+3x+1}=\frac{1}{2},$$

заданный интеграл также сходится.

Если подынтегральная функция имеет на промежутке произвольный знак, то исследование на сходимость несобственного интеграла нельзя проводить по достаточным условиям, справедливым для неотрицательных функций.

Для исследования на сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{16.8}$$

от знакопеременной функции $f(x)$ рассматривают сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx. \tag{16.9}$$

Если интеграл (16.9) сходится, то интеграл (16.8) называется *абсолютно сходящимся*.

Теорема. Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Случаем абсолютной сходимости не исчерпывается все множество сходящихся интегралов, т.е. если интеграл (16.8) не сходится абсолютно, то это еще не означает, что он не сходится.

Интеграл (16.8) называется *условно сходящимся*, если он сходится, а интеграл (16.9) расходится.

Для исследования на условную сходимость интеграла

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)g(x)dx \tag{16.10}$$

используют следующие две теоремы.

Признак Дирихле. Пусть выполняются условия:

1) непрерывная функция $f(x)$ имеет ограниченную на $[a, +\infty)$ первообразную $F(x)$;

2) убывающая функция $g(x)$ имеет непрерывную производную на $[a, +\infty)$;

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Тогда интеграл (16.10) сходится.

Признак Абеля. Пусть выполняются условия:

1) интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ от непрерывной функции $f(x)$ сходится;

2) монотонная и ограниченная функция $g(x)$ имеет непрерывную производную на $[a, +\infty)$.

Тогда интеграл (16.10) сходится.

Исследование на сходимость интегралов (16.4), (16.6) проводится аналогично.

16.2. Несобственный интеграл II рода

Пусть непрерывная на $[a, b)$ функция $f(x)$ является неограниченной в окрестности точки b. Точка b называется тогда *особой*. О функции $f(x)$ говорят, что она имеет *особенность в точке b*. Для $f(x)$ существует определенный интеграл

$$I(\varepsilon) = \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx, \tag{16.11}$$

где $\varepsilon > 0$; $[a, b-\varepsilon] \subset [a, b)$.

Несобственным интегралом II рода называется результат предельного перехода в равенстве (16.11) при $\varepsilon \to +0$, т.е.

$$\lim_{\varepsilon \to +0} I(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{16.12}$$

Его обозначают

$$\int_a^b f(x)dx. \quad (16.13)$$

В случае существования первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ интеграл (16.13) вычисляют по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} F(b-\varepsilon) - F(a).$$

Если a – особая точка функции $f(x)$, то несобственный интеграл II рода определяется равенством

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \quad (16.14)$$

Его вычисляют по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - \lim_{\varepsilon \to +0} F(a+\varepsilon).$$

Если особая точка является внутренней точкой отрезка интегрирования, т.е. $c \in (a,b)$, то несобственный интеграл II рода определяется равенством

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx. \quad (16.15)$$

Интеграл (16.15) вычисляют по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) + \lim_{\varepsilon_1 \to +0} F(c-\varepsilon_1) - \lim_{\varepsilon_2 \to +0} F(c+\varepsilon_2).$$

Несобственные интегралы II рода называются *сходящимися*, если существуют пределы (16.12), (16.14) и (16.15). Если пределы не существуют, то несобственные интегралы называются *расходящимися*.

Для вычисления несобственных интегралов II рода (в случае существования соответствующих интегралов и пределов) можно использовать формулу интегрирования по частям и метод замены переменной.

Для исследования на сходимость несобственного интеграла II рода от неотрицательной функции используют признаки сравнения, аналогичные таким признакам для несобственного интеграла I рода. Так же вводится понятие абсолютно сходящегося интеграла. Если несобственный интеграл II рода сходится абсолютно, то он сходится.

Условная сходимость несобственного интеграла II рода означает, что он сходится, но не абсолютно.

17
ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

17.1. Основные понятия теории функций многих переменных

Пусть задано множество точек координатной плоскости $D \subseteq \mathbf{R}^2$. Если каждой упорядоченной паре действительных чисел $(x, y) \in D$ ставится в соответствие единственное действительное число z, то говорят, что на множестве D задана *функция двух переменных* со значениями в $\mathbf{R}$. Пишут:

$$z = f(x, y) \quad \text{или} \quad z = f(M),$$

где $M(x, y) \in D$.

Множество D называется *областью определения функции* f. Множество $E \subseteq \mathbf{R}$, состоящее из всех таких чисел z, что $z = f(x, y)$, где $(x, y) \in D$, называется *множеством значений функции*.

Множество называется *открытым*, если каждая точка множества принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью, и *связным*, если любые две точки множества можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей этому множеству.

Множество, обладающее свойствами открытости и связности, называется *областью*.

Точка M называется *граничной точкой области* D, если в любой ее окрестности содержатся точки как принадлежащие, так и не принадлежащие D. Совокупность всех граничных точек области называется *границей* этой области.

Замкнутой областью называется объединение области и ее границы.

Область D называется *ограниченной*, если существует круг конечного радиуса с центром в начале системы координат, внутри которого содержится область D.

Область $D \subseteq \mathbf{R}^2$ называется *односвязной*, если для любой замкнутой кривой, принадлежащей этой области, ограниченная данной кривой часть плоскости целиком принадлежит области D. В противном случае область *многосвязная*. Многосвязная область называется *n-связной*, если ее граница состоит из n замкнутых кривых.

Графиком функции $z = f(x, y)$, определенной на области D, называется множество всех точек (x, y, z) пространства $\mathbf{R}^3$, где $(x, y) \in D$, $z = f(x, y)$.

Множество точек $(x, y) \in D \subseteq \mathbf{R}^2$, для которых $f(x, y) = C$, где $C = \text{const}$ (т.е. функция имеет постоянное значение C), называется *линией уровня* функции $f(x, y)$. С помощью линий уровня изучают вид графика функции двух переменных.

Пусть D – множество точек пространства $\mathbf{R}^3$. Если каждой точке $M(x, y, z) \in D \subseteq \mathbf{R}^3$ поставлено в соответствие единственное число $u \in \mathbf{R}$, то говорят, что на множестве D задана *функция трех переменных*, и пишут:

$$u = f(x, y, z) \quad \text{или} \quad u = f(M),$$

где $M(x, y, z) \in D$.

Графиком функции $u = f(x, y, z)$, определенной на области D, называется множество всех точек (x, y, z, u) пространства $\mathbf{R}^4$, где $(x, y, z) \in D$, $u = f(x, y, z)$.

Поверхностью уровня функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ называется множество таких точек $(x, y, z) \in D \subseteq \mathbf{R}^3$, что $f(x, y, z) = C$, где $C = \text{const}$ (т.е. функция имеет постоянное значение C). С помощью поверхностей уровня изучают график функции трех переменных.

Понятие функции нескольких переменных n обобщается на любое $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

Пусть G – множество точек пространства $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Если каждой точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G$ поставлено в соответствие единственное число $u \in \mathbf{R}$, то говорят, что на множестве G определена *функция n переменных*, и пишут:

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

График функции n переменных находится в пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$. Его невозможно изобразить геометрически для $n \geq 3$.

Для функции нескольких переменных можно определить понятие предела и непрерывности. Для функции двух переменных они определяются следующим образом.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – некоторая точка области $D \subseteq \mathbf{R}^2$. Множество точек $M(x, y)$, для которых выполняется неравенство

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

называется δ-*окрестностью точки* M_0.

Число A называется *пределом функции* $z = f(M)$ в точке M_0 при $M \to M_0$, если функция определена в некоторой окрестности точки M_0 (за исключением, может быть, самой точки M_0) и если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой точки $M \in D$, удовлетворяющей условию $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(M) - A| < \varepsilon.$$

Пишут:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Функция $z = f(M)$ называется *непрерывной в точке* $M_0 \in D$, если она определена в этой точке и некоторой ее окрестности и

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Функция f называется *непрерывной в области* D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Аналогичным образом определяются понятия предела и непрерывности в точке для функции n переменных ($n > 2$).

17.2. Частные производные и дифференциал функции

Частные производные. *Частной производной по переменной* x функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \qquad (17.1)$$

если он существует. Производную (17.1) обозначают также $f'_x(x_0, y_0), \dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}, z'_x(x_0, y_0)$.

Частной производной по переменной y функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \qquad (17.2)$$

если он существует. Производную (17.2) обозначают также $f'_y(x_0, y_0), \dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}, z'_x(x_0, y_0)$.

Частные производные (17.1) и (17.2) в точке (x_0, y_0) являются определенными числами. Если частные производные определены на множестве $D \subseteq \mathbf{R}^2$ и точка $M \in D$, то они являются функциями двух переменных: $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \ \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$.

При определенной ситуации в обозначениях производной может не использоваться запись координат точек; пишут:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{или} \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ аналогично определяют три частные производные: $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$ (в случае их существования), которые обозначают также u'_x, u'_y, u'_z.

В качестве примера вычислим частные производные функции

$$u = x^2 y^3 + \ln(5z + 6y) + x^z.$$

Для вычисления u'_x считаем, что x – переменная величина, y, z – постоянные. Получаем:

$$u'_x = 2xy^3 + zx^{z-1}.$$

Считаем x, z постоянными и вычисляем:

$$u'_y = 3x^2 y^2 + \frac{6}{5z + 6y}.$$

Аналогично

$$u'_z = \frac{5}{5z+6y} + x^z \ln x.$$

Дифференциал функции. *Полным приращением функции* $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется разность

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

где Δx, Δy – приращения аргументов.

Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если полное приращение функции в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{17.3}$$

где A, B – некоторые числа; $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ – бесконечно малые при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Если функция дифференцируема в точке M_0, то в формуле (17.3)

$$A = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}.$$

Главная часть полного приращения (17.3) дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ называется *дифференциалом функции двух переменных* и обозначается dz:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

Для независимых переменных x и y дифференциалы совпадают с их приращениями: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, поэтому дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляют по формуле

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Дифференциал функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ вычисляют по формуле

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Дифференциал называется еще *дифференциалом первого порядка*.

При достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ для функции $f(x, y)$, дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0)$ и ее окрестности, имеет место приближенное равенство

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y.$$

Для вычисления приближенного значения функции $f(x, y, z)$ трех переменных (в случае дифференцируемости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и малых приращений независимых переменных) используют равенство

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) \approx f(x_0, y_0, z_0)+$$
$$+\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}\Delta z.$$

17.3. Дифференцирование функций многих переменных

Дифференцирование сложных функций. Пусть $z = z(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, причем функция $z(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, а функции $x(t)$, $y(t)$ – непрерывные производные. Тогда *производная сложной функции* $z = z(x(t), y(t))$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{17.4}$$

Пусть $z = z(x, y)$ и $y = y(x)$, где x – независимая переменная, причем функция $z(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, а $y(x)$ – непрерывную производную. Тогда справедлива *формула полной производной* функции z по x:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{17.5}$$

Пусть $z = z(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, причем функция $z(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по x и y, а функции $x(u, v)$, $y(u, v)$ – непрерывные частные производные по u и v. Тогда частные производные функции z по u и v находят по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (17.6)$$

Формулы (17.4) – (17.6) обобщаются на любое конечное количество переменных (зависимых и независимых).

Дифференцирование неявных функций. Допустим, что функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением

$$F(x, y)=0 \qquad (17.7)$$

и требуется найти $y'(x)$.

П е р в ы й с п о с о б. Если практически возможно, то из уравнения (17.7) выражают явно y через x и дифференцируют.

В т о р о й с п о с о б. Дифференцируют уравнение (17.7), считая $y = y(x)$, и выражают затем $y'(x)$.

Т р е т и й с п о с о б. Используют формулу

$$y'(x)=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

при условии, что частные производные существуют и $F'_y(x, y)\neq 0$.

Первый и второй способы характерны для теории дифференцирования функции одной переменной и не всегда являются рациональными.

Производные порядка выше первого неявно заданной функции $y = f(x)$ находят последовательным дифференцированием равенства (17.7), учитывая, что y – функция от x.

Для нахождения частных производных функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением $F(x, y, z)=0$, используют формулы:

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

при условии, что частные производные существуют и $F'_z\neq 0$.

17.4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Если поверхность задана уравнением

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbf{R}^2, \tag{17.8}$$

то *уравнение касательной плоскости* к ней в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

где $z_0 = z(x_0, y_0)$.

Нормалью к поверхности в точке $N(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = z(x_0, y_0)$, называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости в этой точке.

Уравнение нормали к поверхности (17.8) в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$\frac{x - x_0}{f'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Если поверхность задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0 \tag{17.9}$$

и в точке $N(x_0, y_0, z_0)$ этой поверхности существуют частные производные $\dfrac{\partial F(N_0)}{\partial x}, \dfrac{\partial F(N_0)}{\partial y}, \dfrac{\partial F(N_0)}{\partial z}$, не равные нулю одновременно, то уравнение касательной плоскости к поверхности (17.9) в точке $N(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$\frac{\partial F(N_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(N_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(N_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0,$$

а уравнение нормали к поверхности (17.9) в точке $N(x_0, y_0, z_0)$ –

$$\frac{x - x_0}{F'_x(N_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(N_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(N_0)}.$$

17.5. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Частные производные высших порядков. *Частными производными второго порядка* функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad (17.10)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad (17.11)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad (17.12)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right). \qquad (17.13)$$

Частные производные (17.10) – (17.13) обозначают также f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{y^2} соответственно.

Аналогично определяются частные производные третьего, четвертого и высших порядков. Например:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right).$$

Подобным образом определяются производные высшего порядка функции трех и более переменных.

Частная производная второго порядка и выше, взятая по различным переменным, называется *смешанной частной производной* (это, например, производные (17.11) и (17.12)).

Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка не зависят от порядка дифференцирования. Например:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}.$$

Вычислим $\dfrac{\partial^4 u}{\partial z \partial x^2 \partial y}$ для функции $u = 4x^3yz - \sin^2(2x + 3y + z) + y^2$.

Последовательно получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4x^3z - 2\sin(2x+3y+z)\cos(2x+3y+z)\cdot 3 + 2y =$$

$$= 4x^3z - 3\sin(4x+6y+2z) + 2y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 12x^2z - 3\cos(4x+6y+2z)\cdot 4,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 24xz + 12\sin(4x+6y+2z)\cdot 4.$$

Остается продифференцировать по z:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z \partial x^2 \partial y} = 24x + 96\cos(4x+6y+2z).$$

Дифференциалы высших порядков. *Дифференциал второго порядка функции двух переменных* $z = f(x, y)$ определяется как дифференциал от дифференциала первого порядка:

$$d^2 z = d(dz).$$

Аналогично определяются дифференциалы третьего и высших порядков.

Справедлива формула

$$d^{n+1}z = d(d^n z),\ n \in \mathbf{N}.$$

Если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные и переменные x, y являются независимыми, то дифференциалы второго и третьего порядка вычисляются по формулам:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Для всякого $n \in \mathbf{N}$ формула вычисления дифференциала n-го порядка по форме записи аналогична формуле бинома Ньютона:

$$d^n z = C_n^0 \frac{\partial^n z}{\partial x^n}dx^n + C_n^1 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy + C_n^2 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}dx^{n-2}dy^2 + \ldots +$$

$$+ C_n^{n-1}\frac{\partial^n z}{\partial x \partial y^{n-1}}dxdy^{n-1} + C_n^n \frac{\partial^n z}{\partial y^n}dy^n.$$

17.6. Производная по направлению. Градиент

Производной функции $u = f(x, y, z)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *по направлению вектора* $\overline{l}$ называется предел

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta l}, \quad (17.14)$$

где $\overline{l} = \overline{M_0 M}$; $M = (x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z)$; $\Delta l = \left|\overline{M_0 M}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, если предел (17.14) существует.

Если функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема, то производная по направлению $\overline{l}$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \quad (17.15)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\overline{l}$.

В частности, если $z = f(x, y)$ – функция двух переменных, то формула (17.15) принимает вид

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

где α – угол между вектором $\overline{l}$ и осью Ox.

Градиентом функции $u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется вектор

$$\overline{\operatorname{grad} u} = \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x},\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial y},\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\right),$$

или, что то же самое,

$$\overline{\operatorname{grad} u} = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}.$$

В частности, если $z = f(x, y)$ – функция двух переменных, то

$$\overline{\operatorname{grad} z} = \frac{\partial z}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\overline{j}.$$

Связь между градиентом функции и производной по направлению устанавливает формула

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left|\overline{\operatorname{grad} u}\right| \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\overline{\operatorname{grad} u}$ и $\overline{l}$.

Градиент функции указывает направление наибыстрейшего возрастания функции. Наибольшее значение производной $\frac{\partial u}{\partial l}$, достигаемое в направление градиента:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left|\overline{\operatorname{grad} u}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

17.7. Экстремумы функции двух переменных

Локальный экстремум. Функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ *локальный максимум* (*минимум*), если существует такая δ-окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x, y)$ из этой окрестности, отличных от M_0, выполняется неравенство

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \quad (f(x, y) > f(x_0, y_0)).$$

Максимум и минимум функции называются ее *экстремумами* (*локальными*), а точка M_0, в которой достигается экстремум, – *точкой экстремума.*

Необходимое условие экстремума: если в точке $M_0(x_0, y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Точки, в которых частные производные существуют и равны нулю, называются *стационарными.*

Точки из области определения функции, в которых частные производные равны нулю или не существуют, называются *критическими точками*. Не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Достаточное условие экстремума. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка функции $f(x, y)$, имеющей непрерывные частные производные второго порядка, и

$$A = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} \quad (A, B, C \in \mathbf{R}),$$

$$\Delta = AC - B^2.$$

Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция имеет в точке M_0 локальный экстремум (максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$);

2) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 функция не имеет экстремума;

3) если $\Delta = 0$, то в точке M_0 функция может иметь локальный экстремум, а может и не иметь его (нужны дополнительные исследования).

Глобальный экстремум. Допустим, что функция $f(x, y)$ определена на некотором множестве $D \subseteq \mathbf{R}^2$. Число C называют *наибольшим значением функции* (*глобальным максимумом*) на множестве D, если $f(x, y) < C$ для всех $(x, y) \in D$; пишут:

$$C = \max_{(x, y) \in D} f(x, y).$$

Число c называют *наименьшим значением функции* (*глобальным минимумом*) на множестве D, если $f(x, y) \geq c$ для всех $(x, y) \in D$; пишут:

$$c = \min_{(x, y) \in D} f(x, y).$$

Теорема Вейерштрасса. Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве $\overline{D}$ функция $f(x, y)$ достигает на этом множестве своего наибольшего и наименьшего значений.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области $\overline{D}$ необходимо:

1) найти принадлежащие D критические точки функции и вычислить значения функции в них;

2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границах области $\overline{D}$;

3) сравнить все полученные значения функции и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

18

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

18.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Понятие дифференциального уравнения первого порядка. Пусть x – независимая переменная, $y(x)$ – функция от переменной x, заданная на некотором промежутке.

Дифференциальным уравнением (*обыкновенным дифференциальным уравнением*) называется уравнение, связывающее независимую переменную x, функцию $y(x)$ и ее производные.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящей в него производной.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0,$$

где F – некоторое выражение относительно x, искомой функции $y = y(x)$ и ее производной.

Если дифференциальное уравнение разрешено относительно производной функции, то оно имеет вид

$$y' = f(x, y), \tag{18.1}$$

где f – некоторое выражение относительно x и y; $(x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$. В таком случае говорят, что дифференциальное уравнение записано в *нормальном виде*.

Решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = y(x)$, которая обращает это уравнение в тождество.

Поиск решения дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения*, график этого решения – *интегральной кривой*.

Начальным условием (*условием Коши*) называется условие $y(x_0) = y_0$ $(x_0, y_0 \in \mathbf{R})$, которым задается дополнительное требование на решение $y(x)$ дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения в области D называется функция $y = \varphi(x, C)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\varphi(x, C)$ является решением данного дифференциального уравнения при любом допустимом значении произвольной постоянной C;

2) для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ такого, что $(x_0, y_0) \in D$, существует единственное значение $C = C_0$, при котором решение $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет начальному условию.

Общее решение $\Phi(x, y, C) = 0$, записанное в неявном виде, называется *общим интегралом дифференциального уравнения.*

Частным решением дифференциального уравнения называется всякое решение, полученное из общего при конкретном значении $C = C_0$.

Задачей Коши называется задача отыскания частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$. Геометрически общему решению на координатной плоскости соответствует семейство интегральных кривых $y = \varphi(x, C)$, зависящее от числового параметра C, а частному решению – определенная интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0).

Теорема. Если функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в области D, то при начальном условии $y(x_0) = y_0$, где $(x_0, y_0) \in D$, существует единственное решение уравнения (18.1).

Решение дифференциального уравнения, во всех точках которого не выполняется условие единственности, называется *особым решением*. Особое решение не может быть получено из общего решения дифференциального уравнения ни при каком значении произвольной постоянной C.

Замечание. Иногда произвольную постоянную целесообразно записывать в виде $\ln|C|$, чтобы окончательная форма записи общего решения была более совершенной.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)g_1(y)\,dx + f_2(x)g_2(y)\,dy = 0, \qquad (18.2)$$

где f_1, f_2 – функции переменной x; g_1, g_2 – функции переменной y, называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Для решения уравнения (18.2) предполагают $f_2(x) \neq 0$ и $g_1(y) \neq 0$. Почленным делением уравнения (18.2) на $f_2(x)g_1(y)$ его сводят к уравнению

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy,$$

которое в левой части содержит выражение только от переменной x, а в правой – только от переменной y. Далее интегрируют полученное равенство (слева – по переменной x, а справа – по y) и получают общее решение.

Ограничения $f_2(x) \neq 0$, $g_1(y) \neq 0$ могут привести к потере решений, поэтому следует решить уравнения $f_2(x) = 0, g_1(y) = 0$ и установить (подстановкой в заданное дифференциальное уравнение), являются ли они решением дифференциального уравнения. Затем необходимо определить, входят ли они в общее решение (или являются особыми).

Однородные дифференциальные уравнения. Уравнения, сводящиеся к однородным. Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy = 0$$

называют *однородным*, если обе функции f_1, f_2 являются однородными функциями одной и той же степени n, т.е. для параметра t выполняются условия:

$$f_1(tx, ty) = t^n f_1(x, y), \quad f_2(tx, ty) = t^n f_2(x, y).$$

Однородное уравнение может быть сведено к виду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{18.3}$$

где φ – некоторое выражение относительно $\frac{y}{x}$.

Для решения однородного уравнения (18.3) делают замену $\frac{y}{x} = z$, где $z = z(x)$. Этой заменой дифференциальное уравнение (18.3) приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Иногда целесообразнее сделать замену $\frac{x}{y} = z$, где $z = z(y)$.

Решим задачу Коши

$$(x^2 + y^2)dx = 2xydy,\ y(4) = 0.$$

Заданное уравнение является однородным дифференциальным уравнением второй степени. Делим его на dx и учитываем, что $\dfrac{dy}{dx} = y'$. Имеем:

$$2xyy' = x^2 + y^2.$$

Допускаем, что $2xy \neq 0$, и делим уравнение на это выражение. Получаем:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}.$$

Далее делим числитель и знаменатель дроби на x^2 (при условии $x \neq 0$):

$$y' = \frac{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2\dfrac{y}{x}}.$$

Производим замену $\dfrac{y}{x} = z$, где $z = z(x)$. Тогда $y = zx$ и $y' = z'x + z$. Уравнение принимает вид

$$z'x + z = \frac{1 + z^2}{2z}$$

или

$$z'x = \frac{1 + z^2}{2z} - z, \quad z'x = \frac{1 - z^2}{2z}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{1 - z^2}{2z},$$

т.е. $\dfrac{2zdz}{1 - z^2} = \dfrac{dx}{x}$ (при условии $1 - z^2 \neq 0$). Тогда

$$\int \frac{2zdz}{1 - z^2} = \int \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{d(z^2 - 1)}{z^2 - 1} = -\int \frac{dx}{x}.$$

После интегрирования получаем:

$$\ln|z^2 - 1| = -\ln|x| + \ln|C|$$

или

$$\ln|x(z^2-1)| = \ln|C|,$$

т.е. $x(z^2-1) = C$.

Возвращаемся к искомой функции:

$$x\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right) = C, \quad \frac{y^2}{x} - x = C, \quad y^2 - x^2 = Cx.$$

Находим C, используя начальное условие: $0 - 16 = 4C$, $C = -4$. Получаем решение задачи Коши: $y^2 - x^2 + 4x = 0$.

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2x + c_2}\right) \tag{18.4}$$

при определенных значениях $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ сводится к однородному уравнению. Возможны три случая.

1. Если $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, то делают замену переменных:

$$\begin{cases} x = u + \alpha, \\ y = v + \beta, \ v = v(u), \end{cases}$$

где числа α и β находят как решение системы уравнений

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

Этой заменой дифференциальное уравнение (18.4) сводится к уравнению

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right).$$

Далее его решают как однородное.

2. Если $k = \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, то уравнение (18.4) записывают в виде

$$y' = f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad k \in \mathbf{R},$$

и затем делают замену $a_2x+b_2y=z$, где $z=z(x)$. Эта замена приводит к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

3. Если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=k \quad (k\in\mathbf{R})$, то уравнение (18.4) преобразуется к виду

$$y'=f\left(\frac{k(a_2x+b_2y+c_2)}{a_2x+b_2y+c_2}\right),$$

т.е. $dy=f(k)dx$. Далее интегрируют.

Линейные уравнения. Уравнение Бернулли. Уравнение вида

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{18.5}$$

где $p(x), q(x)$ – заданные непрерывные функции, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*. Если $q(x)\equiv 0$, то уравнение (18.5) имеет вид

$$y'+p(x)y=0 \tag{18.6}$$

и называется *линейным однородным дифференциальным уравнением*. Если $q(x)\neq 0$, то (18.5) называют *линейным неоднородным дифференциальным уравнением*.

Однородное уравнение (18.6) решают, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{y}=-p\,(x)\,dx.$$

Его общее решение

$$y=Ce^{-\int p(x)\,dx},$$

где C – произвольная постоянная.

Общее решение линейного неоднородного уравнения (18.5) можно найти одним из указанных ниже методов.

Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Для его реализации необходимо:

1) найти общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $y=Ce^{-\int p(x)\,dx}$, где $C=\text{const}$, $C\in\mathbf{R}$;

2) искать общее решение линейного неоднородного уравнения в виде

$$y = C(x)\, e^{-\int p(x)\,dx}, \tag{18.7}$$

где $C = C(x)$ – функция, которую необходимо найти;

3) подставить функцию (18.7) в уравнение (18.5) и найти функцию $C(x)$:

$$C(x) = C + \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx,$$

где C – произвольная постоянная;

4) записать общее решение уравнения (18.5) в виде

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left(C + \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx\right).$$

М е т о д Б е р н у л л и. Для его реализации общее решение дифференциального уравнения (18.5) ищут в виде

$$y = uv, \tag{18.8}$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функции, которые надо найти. Для этого необходимо:

1) подставить функцию (18.8) и ее производную в уравнение (18.5):

$$u'v + uv' + p(x)\, uv = q(x);$$

2) сделать группировку относительно u:

$$u(v' + v\,p(x)) + u'v = q(x); \tag{18.9}$$

3) найти функцию $v(x)$ как некоторое частное решение дифференциального уравнения

$$v' + v\,p(x) = 0; \tag{18.10}$$

4) решить при условии (18.10) уравнение (18.9), которое приобретет вид $u'v = q(x)$, как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными (найти его общее решение);

5) записать общее решение исходного уравнения (18.5) как произведение найденных функций $u(x)$ и $v(x)$, т.е. в виде (18.8).

Замечание. При решении дифференциальных уравнений методами Лагранжа и Бернулли описанные алгоритмы реализуют «пошагово».

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^m,$$

где $m \in \mathbf{R}$, называется *уравнением Бернулли*.

Если $m = 0$, то это линейное дифференциальное уравнение, если $m = 1$ – уравнение с разделяющимися переменными. Если $m \neq 0; 1$, то при решении таких уравнений применяют метод Лагранжа или Бернулли.

Уравнения в полных дифференциалах. Уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{18.11}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u = u\,(x, y)$, т.е.

$$du = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{18.12}$$

С учетом (18.12) уравнение (18.11) равносильно уравнению $du = 0$, общий интеграл которого определяется формулой

$$u(x, y) = C, \tag{18.13}$$

где C – произвольная постоянная.

Теорема. Для того чтобы дифференциальное уравнение (18.11) было в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{18.14}$$

при условии, что P'_y, Q'_y непрерывны.

При решении уравнения (18.11) необходимо:

1) проверить выполнение равенства (18.14);

2) если равенство (18.14) выполняется, то определить функцию $u = u(x, y)$ из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = Q(x, y); \end{cases}$$

3) записать общий интеграл уравнения (18.11) в виде равенства (18.13).

18.2. Дифференциальные уравнения высших порядков

Понятие дифференциального уравнения высшего порядка. *Дифференциальным уравнением n-го порядка* ($n \in \mathbf{N}$) называется уравнение вида

$$F\,(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \qquad (18.15)$$

Если уравнение (18.15) можно разрешить относительно старшей производной, то дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Решением дифференциального уравнения n-го порядка является всякая n раз дифференцируемая функция $y = y(x)$, которая обращает данное уравнение в тождество. Задача нахождения решения $y = y\,(x)$, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа, называется *задачей Коши*.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция

$$y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

которая при любых допустимых значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ является решением этого уравнения, а при соответствующем выборе произвольных постоянных будет решением любой задачи Коши, поставленной для данного уравнения.

Общим интегралом уравнения (18.15) называется соотношение

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

неявно определяющее общее решение этого уравнения.

Частным решением уравнения (18.15) называется всякое решение, которое получается из общего решения при конкретных значениях постоянных (в частности, решение задачи Коши).

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка. Уравнение вида

$$F(x, y^{(n)}) = 0$$

или уравнение

$$y^{(n)} = f(x),$$

разрешенное относительно n-й производной, решают последовательным нтегрированием n раз.

Уравнение вида

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1 \le k \le n), \tag{18.16}$$

не содержащее явно искомой функции y и первых $k-1$ ее производных ($k \in \mathbf{N}$), решают заменой $y^{(k)} = z$, где $z = z(x)$. Таким образом, порядок исходного уравнения (18.16) понижается на k единиц. Приходят к уравнению

$$F\,(x, z, \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Далее полученное уравнение решают в зависимости от его типа.

Уравнение вида

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

не содержащее явно независимой переменной x, решают заменой $y' = z$, где $z = z(y)$, $y = y(x)$. Этой заменой порядок исходного уравнения понижается на единицу, поскольку $y'' = z'_y y'_x = z'_y z$ (функцию $z(y)$ дифференцируют по x как сложную). Аналогично выражают y''' и т.д.

Уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

называется *однородным* относительно искомой функции y и ее производных $y', y'', \dots, y^{(n)}$, если функция F однородна относительно $y, y', \dots, y^{(n)}$, т.е.

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \dots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}),$$

где λ – произвольное число; m – степень однородности ($m \in \mathbf{N}$). Для решения используют замену $\dfrac{y'}{y} = z$, где $z = z(x)$, понижающую порядок исходного уравнения на единицу.

18.3. Линейные дифференциальные уравнения

Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков. *Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка* называется уравнение

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0. \quad (18.17)$$

Общим решением этого уравнения является функция

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – произвольные постоянные; $y_1, y_2, \dots, y_n$ – линейно независимые частные решения уравнения (18.17).

Совокупность n линейно независимых на некотором промежутке (a, b) решений уравнения (18.17) называется *фундаментальной системой решений.*

Частным случаем уравнения (18.17) является линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (18.18)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ – действительные числа.

Для нахождения частных решений уравнения (18.18) составляют *характеристическое уравнение*

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (18.19)$$

(путем замены в уравнении (18.18) производных определенного порядка на соответствующие степени параметра λ: $y^{(k)}$ на λ^k, где $k = \overline{0, n}$). Затем решают уравнение (18.19).

Каждому корню уравнения (18.18) соответствует определенное частное решение дифференциального уравнения. Вид частного решения зависит от типа корня уравнения (18.19). Согласно *правилу частных решений* возможны четыре случая.

1. Если λ_0 – простой действительный корень (кратности 1) уравнения (18.19), то ему соответствует частное решение вида $y = e^{\lambda_0 x}$ уравнения (18.18).

2. Если λ_1 – действительный корень кратности k $(k = 2, 3, ...)$, то ему соответствует k частных решений

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = xe^{\lambda_1 x}, ..., \quad y_k = x^{k-1}e^{\lambda_1 x}.$$

3. Если $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$ – пара комплексно-сопряженных корней уравнения (18.19), то им соответствуют два частных решения уравнения (18.18):

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

4. Если $\lambda_{4,5} = \alpha \pm i\beta$ – пара k-кратных комплексно-сопряженных корней $(k = 2, 3, ...)$, то им соответствует $2k$ частных решения:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ \dots, y_k = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$y_{k+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x, y_{k+2} = xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ \dots, y_{2k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Поскольку характеристическое уравнение (18.19) имеет n корней, считая их кратность, то для дифференциального уравнения (18.18) по правилу частных решений находят n линейно независимых решений $y_1, y_2, ..., y_n$, которые образуют фундаментальную систему решений.

Общее решение уравнения (18.18) записывают в виде

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x),$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные; $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$,..., $y_n = y_n(x)$ – найденные частные решения.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков. *Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка* называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad (18.20)$$

где $a_0(x), a_1(x), \ldots, f(x)$ – непрерывные функции на некотором промежутке (a, b).

Если $f(x) \neq 0$ на (a, b), то уравнение (18.20) называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка*; если $f(x) \equiv 0$, то (18.20) называется *однородным дифференциальным уравнением*, т.е.

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (18.21)$$

Если для неоднородного уравнения (18.20) полагают $f(x) \equiv$ $\equiv 0$, то приходят к *соответствующему однородному уравнению* типа (18.21).

Общее решение уравнения (18.20) определяется формулой

$$y = y_{о} + y_{ч},$$

где $y_{о}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения; $y_{ч}$ – частное решение неоднородного уравнения.

Для решения дифференциального уравнения (18.20) используют *метод Лагранжа* (*метод вариации произвольных постоянных*). Для его реализации необходимо:

1) записать соответствующее однородное дифференциальное уравнение;

2) найти фундаментальную систему частных решений $y_1 =$ $= y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, … , $y_n = y_n(x)$ соответствующего однородного дифференциального уравнения;

3) найти общее решение однородного уравнения в виде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \quad (18.22)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные константы;

4) общее решение неоднородного уравнения (18.20) искать в виде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \quad (18.23)$$

аналогичном виду решения (18.22), однако при условии, что $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, … , $C_n = C_n(x)$ – функциональные коэффициенты, которые надо найти;

5) для нахождения коэффициентов C_k $(k = \overline{1, n})$ в решении (18.23) записать систему

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)+...+C_n'(x)y_n(x)=0, \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+...+C_n'(x)y_n'(x)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x)+...+C_n'(x)y_2^{(n-2)}(x)=0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+...+C_n'(x)y_2^{(n-1)}(x)=f(x); \end{cases} \tag{18.24}$$

6) решить систему (18.24) относительно $C_1', C_2', \dots, C_n'$ и получить $C_1'(x)=\varphi_1(x), C_2'(x)=\varphi_2(x), \dots, C_n'(x)=\varphi_n(x)$;

7) проинтегрировать полученные для $C_k'(x)$, $k=\overline{1,n}$, равенства и найти:

$$C_1(x)=\int\varphi_1(x)\,dx+c_1,\ \ C_2(x)=\int\varphi_2(x)\,dx+ \\ +c_2, \dots, C_n(x)=\int\varphi_n(x)\,dx+c_n, \tag{18.25}$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ – произвольные постоянные;

8) полученные выражения (18.25) подставить вместо $C_1, C_2, \dots, C_n$ в решение (18.23). Это и будет общее решение заданного дифференциального уравнения (18.20).

Для решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений вида (18.20) с постоянными коэффициентами и правой частью $f(x)$ специального вида используют *метод неопределенных коэффициентов*. Он применим, если функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta\,x+Q_m(x)\sin\beta\,x), \tag{18.26}$$

где $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$; $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно.

Для реализации метода необходимо сделать следующее.

1. Решить соответствующее однородное дифференциальное уравнение (18.21), используя характеристическое уравнение

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_1\lambda+a_0=0. \tag{18.27}$$

Получить общее решение соответствующего однородного уравнения в виде

$$y_{\hat{\imath}}=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n, \tag{18.28}$$

где $y_1, y_2, \dots, y_n$ – частные решения уравнения (18.21), найденные согласно типу корней характеристического уравнения; $C_1, C_2, \dots, C_n$ – произвольные постоянные.

2. Записать контрольное число $\delta = \alpha + \beta i$, где α, β – числа, которые заданы в (18.26). Определить, имеется ли число δ среди корней уравнения (18.27), и если имеется, то какова кратность k этого корня.

3. Если число $\delta = \alpha + \beta i$ не содержится среди корней характеристического уравнения (18.27), то записать искомое частное решение $y_{\text{ч}}$ дифференциального уравнения (18.20) в виде

$$y_{\text{ч}} = e^{\alpha x}(\overline{P}_r(x)\cos\beta x + \overline{Q}_r(x)\sin\beta x). \qquad (18.29)$$

Если среди корней характеристического уравнения (18.27) имеется корень $\delta = \alpha + \beta i$, кратность которого k, то искомое частное решение $y_{\text{ч}}$ дифференциального уравнения (18.20) записать в виде

$$y_{\div} = x^k e^{\alpha x}(\overline{P}_r(x)\cos\beta x + \overline{Q}_r(x)\sin\beta x). \qquad (18.30)$$

В равенствах (18.29) и (18.30) использованы $\overline{P}_r(x)$, $\overline{Q}_r(x)$ – многочлены степени r, где $r = \max(n, m)$ – бóльшая степень многочленов, заданных в (18.26). Многочлены $\overline{P}_r(x)$ и $\overline{Q}_r(x)$ надо записать в стандартном виде с буквенными коэффициентами.

4. Коэффициенты многочленов $\overline{P}_r(x)$, $\overline{Q}_r(x)$ найти методом неопределенных коэффициентов. Для этого необходимо вычислить производные $y'_{\text{ч}}, y''_{\text{ч}}, \dots, y^{(n)}_{\text{ч}}$ функции (18.29) или (18.30) и подставить в левую часть уравнения (18.20). Далее надо привести подобные члены относительно $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$, а затем приравнять многочлены при одноименных тригонометрических функциях. Используя равенство многочленов, записать систему уравнений относительно искомых числовых коэффициентов.

5. Найденные значения числовых коэффициентов подставить в многочлены $\overline{P}_r$ и $\overline{Q}_r$ частного решения $y_{\text{ч}}$, записанного в виде (18.29) или (18.30).

6. Записать общее решение заданного дифференциального уравнения (18.20) в виде $y = y_{\text{о}} + y_{\text{ч}}$, где решение $y_{\text{о}}$ имеет вид (18.28), а $y_{\text{ч}}$ – решение вида (18.29) или (18.30).

Замечание 1. Форма записи (18.29) или (18.30) сохраняется и в случаях, когда в исходном уравнении (18.20) задано $P_n(x) = a$ или $Q_m(x) = b$, где a, b – числа. Тогда $\overline{P}_r(x) = A$, $\overline{Q}_r(x) = B$, где A, B надо найти.

З а м е ч а н и е 2. Если правая часть уравнения (18.20) есть сумма различных функций специального вида, то для нахождения $y_ч$ используют ***теорему о наложении решений***: если в уравнении (18.20) правая часть имеет вид

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x), \quad k \in \mathbf{N},$$

а $y_{ч1}, y_{ч2}, \ldots, y_{чk}$ – частные решения уравнений:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = f_1(x),$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = f_2(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = f_k(x),$$

то функция $y_ч = y_{ч1} + y_{ч2} + \ldots + y_{чk}$ является решением заданного уравнения.

З а м е ч а н и е 3. Если в правой части уравнения (18.20) присутствует только одно слагаемое с тригонометрической функцией (т.е. $P_n \cos\beta x$ или $Q_m \sin\beta x$), то общее решение и в этом случае записывают в виде (18.29) или (18.30), т.е. с двумя тригонометрическими функциями.

18.4. Системы дифференциальных уравнений

Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{18.31}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – искомые функции переменной x, называется *нормальной системой*.

Совокупность n функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющих каждому уравнению системы (18.31), называется *решением* этой *системы*.

Задача Коши для системы (18.31) состоит в нахождении решения этой системы, удовлетворяющего *начальным условиям*: $y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0, \ldots,\ y_n(x_0) = y_n^0$.

Основные методы интегрирования линейных нормальных систем типа (18.31) – метод исключения и метод интегрируемых комбинаций.

Метод исключения позволяет свести нормальную систему n линейных дифференциальных уравнений к одному линейному дифференциальному уравнению n-го порядка относительно одной неизвестной функции.

Метод интегрируемых комбинаций заключается в том, что посредством арифметических операций из уравнений системы (18.30) получают легко интегрируемые уравнения относительно новой неизвестной функции.

19
РЯДЫ

19.1. Числовые ряды

Основные понятия. Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{19.1}$$

где a_n – числа $(a_n \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N})$, называется *числовым рядом*, a_n – *n-м членом ряда*. Аналитическое выражение n-го члена $(n \in \mathbf{N})$ в виде формулы называется *общим членом ряда*.

Ряд (19.1) называется: *знакопостоянным*, если все его члены имеют одинаковый знак; *знакопеременным*, если члены ряда имеют различные знаки; *знакоположительным*, если $a_n > 0$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

Сумма

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{19.2}$$

n первых членов ряда называется его *n-й частичной суммой*.

Ряд называется *сходящимся*, если последовательность (S_n) его частичных сумм (19.2) имеет предел:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Значение S называется *суммой ряда*, что записывают так: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Если для последовательности (S_n) предел при $n \to \infty$ не определен или последовательность бесконечно большая, то ряд (19.1) называется *расходящимся*.

Ряд

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k,$$

который получается из исходного (19.1) отбрасыванием первых n последовательных членов, называется *n-м остатком ряда*.

Свойства числовых рядов:

1) ряд и всякий его остаток оба сходятся или оба расходятся;

2) если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся к суммам A, B соответственно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(c_1 a_n + c_2 b_n)$ сходится к сумме $c_1 A + c_2 B$, где c_1, c_2 – произвольные числа;

3) в результате произвольной перестановки членов сходящегося знакоположительного ряда получается сходящийся к той же сумме ряд;

4) ряд, который получается из заданного в результате прибавления в качестве его членов нулей и произвольного их распределения, сходится тогда и только тогда, когда сходится исходный ряд. В случае сходимости суммы этих рядов равны;

5) если к ряду прибавить (или отнять) конечное количество новых членов, то сходимость (расходимость) ряда не изменится. В случае сходимости сумма нового ряда отличается от исходной на сумму дописанных (отброшенных) членов.

Необходимое условие сходимости. Если ряд (19.1) сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Следствие. Если общий член ряда не стремится к нулю с ростом n, то ряд расходится.

Сходимость знакоположительных рядов. Исследование на сходимость целесообразно начинать с необходимого условия. В случае его выполнения продолжают исследовать ряд на сходимость с помощью достаточных условий, которые задаются следующими ниже теоремами.

Признак сравнения. Пусть заданы знакоположительные ряды:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{19.3}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{19.4}$$

для которых, начиная с некоторого n ($n \in \mathbf{N}$), выполняется

$$a_n \le b_n. \tag{19.5}$$

Тогда:

1) из сходимости ряда (19.4) следует сходимость ряда (19.3);

2) из расходимости ряда (19.3) следует расходимость ряда (19.4).

Если выполняется условие (19.5), то ряд (19.4) называется *мажорантой* для ряда (19.3).

Предельный признак сравнения. Если для знакоположительных рядов (19.3) и (19.4) существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=C$, где $0<C<+\infty$, то эти ряды оба сходятся или оба расходятся.

Для исследования знакоположительных рядов на сходимость по признаку сравнения или предельному признаку сравнения часто используют *ряд Дирихле*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots,$$

который сходится, если $p>1$, и расходится в случае $p\le 1$.

В частном случае $p=1$ получается *гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

который расходится.

Признак Д'Аламбера. Если для знакоположительного ряда (19.3), начиная с некоторого номера n ($n\in\mathbf{N}$), справедлива оценка

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q<1 \quad (q\in\mathbf{R}),$$

то ряд (19.3) сходится; если же справедливо

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge 1,$$

то ряд расходится.

Предельный признак Д'Аламбера. Пусть для знакоположительного ряда (19.3) существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=C. \tag{19.6}$$

Тогда:

1) при $C<1$ ряд сходится;

2) при $C>1$ ряд расходится.

Признак Коши. Если для знакоположительного ряда (19.3), начиная с некоторого номера n ($n \in \mathbf{N}$), справедлива оценка

$$\sqrt[n]{a_n} \le q < 1,$$

то ряд сходится; если же выполняется

$$\sqrt[n]{a_n} \ge 1,$$

то ряд расходится.

Предельный признак Коши. Пусть для знакоположительного ряда (19.3) существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = C. \tag{19.7}$$

Тогда:

1) при $C < 1$ ряд сходится;
2) при $C > 1$ ряд расходится.

При использовании предельного признака Коши часто бывает полезной формула

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

и ее обобщение

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{an+b} = 1$$

при условии, что корни определены, если $a, b \in \mathbf{R}$.

Предельные признаки Д'Аламбера и Коши не отвечают на вопрос о сходимости ряда, если в равенстве (19.6) или (19.7) $C = 1$. В таком случае сходимость ряда исследуют по другим признакам.

Интегральный критерий сходимости. Пусть члены ряда (19.3) имеют вид $a_n = f(n)$, где $f(x)$ – неотрицательная монотонно убывающая на $[1, +\infty)$ функция. Тогда для сходимости (расходимости) ряда (19.3) необходимо и достаточно, чтобы несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходился (расходился).

Следствие. Для n-го остатка R_n сходящегося ряда (19.3) справедлива оценка

$$\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)dx \le R_n \le \int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)dx + a_{n+1}.$$

В качестве примера использования различных признаков сходимости исследуем на сходимость ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^3+3n^2+5}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)!}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; 4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

1. Используем предельный признак сравнения. Сравним заданный ряд со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)n^2}{n^3+3n^2+5}=2,$$

то заданный ряд также сходится.

2. Согласно предельному признаку Д'Аламбера вычисляем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(2n+1)!}{(2(n+1)+1)!\,2^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=0.$$

Получили число 0, которое меньше числа 1, а потому ряд сходится.

3. Используем предельный признак Коши и вычислим:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)\frac{-n}{n+1}}=\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{1}{2e}<1.$$

Таким образом, ряд сходится.

4. Согласно интегральному критерию исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_2^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\ln\ln x\Big|_2^b=\lim_{b\to+\infty}(\ln\ln b-\ln\ln 2)=+\infty.$$

Поскольку интеграл расходится, то расходится также заданный ряд.

Сходимость знакопеременных рядов. Исследовать на сходимость знакопеременные ряды по признакам сходимости знакоположительных рядов нельзя. Для знакопеременного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{19.8}$$

рассматривают ряд из модулей его членов, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots . \tag{19.9}$$

Для исследования на сходимость ряда (19.9) используют признаки сходимости знакоположительных рядов.

Ряд (19.8) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд (19.9).

Теорема. Если ряд (19.8) сходится абсолютно, то он сходится.

Если знакопеременный ряд не сходится абсолютно, то это еще не означает, что он не сходится.

Знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*, если он сходится, но не абсолютно.

Для исследования на сходимость знакопеременного ряда вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \ldots \tag{19.10}$$

используют следующие две теоремы.

Признак сходимости Дирихле. Пусть для ряда (19.10) справедливы условия:

1) последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ является ограниченной;

2) последовательность (a_n) монотонно убывает к нулю.

Тогда ряд (19.10) сходится.

Признак сходимости Абеля. Пусть для ряда (19.10) справедливы условия:

1) последовательность (a_n) монотонная и ограниченная;

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

Тогда ряд (19.10) сходится.

Знакопеременный ряд называется *знакочередующимся*, если каждые два его соседних члена имеют разные знаки.

Признак сходимости Лейбница. Пусть для знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots, \qquad (19.11)$$

где $a_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$, справедливы условия:

1) модули его членов образуют монотонно невозрастающую последовательность, т.е. $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$;

2) выполняется $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Тогда ряд (19.11) сходится.

Если для ряда (19.11) выполняются условия признака Лейбница, то в качестве следствия справедливы утверждения:

1) для его суммы верна оценка $S \leq a_1$;

2) абсолютная величина остатка ряда не превосходит абсолютной величины первого члена этого остатка, т.е.

$$|R_n| \leq a_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N}). \qquad (19.12)$$

Неравенство (19.12) позволяет оценить абсолютную погрешность приближения суммы знакочередующегося ряда его n-й частичной суммой:

$$|S - S_n| \leq a_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Ряд, который удовлетворяет условиям признака Лейбница, называется *рядом Лейбница*.

19.2. Функциональные ряды

Понятие функционального ряда и его сходимость. Выражение вида

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \qquad (19.13)$$

где $u_n(x)$ – функции, определенные на числовом множестве $X \subset \mathbf{R}$, называется *функциональным рядом*.

Функции $u_n(x)$, $n \in \mathbf{N}$, называются *членами ряда*, сумма $u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) = S_n(x)$ – *n-й частичной суммой*, выражение $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ – *n-м остатком ряда*.

При определенном значении x выражение (19.13) является числовым рядом. Совокупность всех тех значений x ($x \in X$), для которых ряд (19.13) сходится, называется *областью сходимости ряда*. Ее обозначают D: $D \subseteq X$. Значение суммы S ряда (19.13) зависит от аргумента x, т.е. $S = S(x)$, $x \in D$; пишут: $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

Ряд (19.13) называется *абсолютно сходящимся на множестве D*, если на D сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n(x)|$.

Если функциональный ряд сходится абсолютно на D, то он сходится.

Признак абсолютной сходимости Д'Аламбера. Пусть существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = C(x), \qquad x \in D. \tag{19.14}$$

Тогда:

1) ряд (19.13) сходится абсолютно для тех x ($x \in D$), для которых $C(x) < 1$;

2) ряд (19.13) расходится для тех x ($x \in D$), для которых $C(x) > 1$.

Признак абсолютной сходимости Коши. Пусть существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = C(x), \qquad x \in D. \tag{19.15}$$

Тогда:

1) ряд (19.13) сходится абсолютно для тех x ($x \in D$), для которых $C(x) < 1$;

2) ряд (19.13) расходится для тех x ($x \in D$), для которых $C(x) > 1$.

Замечание. В случае $C(x) = 1$ в равенствах (19.14) и (19.15) признаки Д'Аламбера и Коши не дают ответа на вопрос о сходимости ряда. То значение x, при котором $C(x) = 1$, необходимо подставить в заданный функциональный ряд и исследовать полученный числовой ряд на сходимость.

Если в точке x ($x \in D$) функциональный ряд сходится, но не абсолютно, то он является *условно сходящимся* в этой точке.

Степенные ряды. Функциональный ряд вида

$$c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_n(x-a)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n, \quad (19.16)$$

где $c_n\in\mathbf{R}$ ($n\in\mathbf{N}$); $a\in\mathbf{R}$, называется *степенным рядом*, а числа c_n – *коэффициентами ряда*.

Число r, которое находят по формулам:

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|},\quad r=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}},$$

является *радиусом сходимости* степенного ряда.

Ряд (19.16) сходится, причем абсолютно, на *интервале сходимости* $(a-r,a+r)$, где $0\le r\le+\infty$, и расходится на $(-\infty,a-r)\cup(a+r,+\infty)$.

В случае $r=0$ ряд (19.16) сходится только в точке $x=a$, в случае $r=+\infty$ – на всей числовой оси.

Для исследования ряда (19.16) на сходимость в точках $x=a\pm r$ эти значения подставляют в заданный ряд и исследуют полученные числовые ряды.

Свойства степенных рядов:

1) сумма $S(x)$ степенного ряда является непрерывной функцией на интервале сходимости;

2) степенной ряд с суммой $S(x)$ можно почленно интегрировать в интервале сходимости:

$$\int S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n\int(x-a)^n\,dx\right);$$

3) степенной ряд с суммой $S(x)$ можно почленно дифференцировать на интервале сходимости:

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left((x-a)^n\right)'.$$

Почленное дифференцирование можно осуществлять любое количество раз.

Замечание. В результате почленного интегрирования и дифференцирования степенного ряда получают степенной ряд с тем же интервалом сходимости. Сходимость может измениться только в граничных точках интервала сходимости.

Ряд Тейлора. Если существует такой степенной ряд (19.16), который на определенном промежутке D сходится к функции $f(x)$, то говорят, что *функция разлагается в ряд по степеням* $x-a$, и пишут:

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_n(x-a)^n+\ldots. \quad (19.17)$$

Равенство (19.17) называется *разложением функции в степенной ряд*.

Степенной ряд вида

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (19.18)$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$.

Критерий сходимости ряда Тейлора. Ряд Тейлора (19.18) функции $f(x)$ сходится к ней на некотором интервале $(a-r, a+r)$ тогда и только тогда, когда остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора для функции $f(x)$ при всех $x\in(a-r,a+r)$ стремится к нулю с ростом n: $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

Признак сходимости ряда Тейлора. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a-r,a+r)$ произвольное количество раз и все ее производные ограничены в совокупности одной и той же константой, то функция разлагается в ряд Тейлора (19.18), т.е. функция является суммой ряда.

Ряд Маклорена. Ряд Тейлора (19.18), в котором $a=0$, называется *рядом Маклорена* функции $f(x)$:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(a)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

На указанной области сходимости ряды Маклорена для основных элементарных функций имеют следующий вид:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in\mathbf{R};$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in \mathbf{R};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},$$

$$x \in (-1, 1];$$

$$(a+x)^k = a^k \left(1 + \frac{k}{1!}\frac{x}{a} + \frac{k(k-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-(n-1))}{n!}\left(\frac{x}{a}\right)^n + \ldots \right), \quad x \in (-|a|, |a|).$$

19.3. Ряд Фурье

Ряд Фурье для 2π-периодической функции. *Рядом Фурье 2π-периодической функции* $f(x)$ называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{19.19}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \tag{19.20}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n \in \mathbf{N}), \tag{19.21}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n \in \mathbf{N}). \tag{19.22}$$

Числа (19.20) – (19.22) называются *коэффициентами Фурье*.

Теорема Дирихле. Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ является кусочно-гладкой на $[-\pi, \pi]$. Тогда ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ в каждой точке непрерывности и к $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$ в точке разрыва (где $f(x-0)$ и $f(x+0)$ – соответственно левосторонний и правосторонний пределы функции в точке x).

Если $f(x)$ – четная 2π-периодическая функция, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$; $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n \in \mathbf{N})$.

Если $f(x)$ – нечетная 2π-периодическая функция, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n \in \mathbf{N})$.

Ряд Фурье для функции произвольного периода. Если $f(x)$ – $2l$-периодическая функция ($l \in \mathbf{R}$), то ее ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right), \tag{19.23}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx \quad (n \in \mathbf{N});$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Ряд (19.19) является частным случаем ряда (19.23).

Как и в случае 2π-периодической функции, четная $2l$-периодическая функция разлагается только по косинусам, нечетная – по синусам.

Комплексная форма ряда Фурье $2l$-периодической функции:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi nx}{l}}, \tag{19.24}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{\pi nx}{l}}dx \quad (n \in \mathbf{Z},\ l \in \mathbf{R}). \tag{19.25}$$

Теорема сходимости Дирихле обобщается на случай $2l$-периодической функции.

В частном случае $l = \pi$ из формул (19.24) и (19.25) получают комплексную форму ряда Фурье для 2π-периодической функции.

20

КОМБИНАТОРИКА, ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

20.1. Комбинаторика

Факториал. Произведение натуральных чисел от 1 до n $(n \in \mathrm{N})$ называется *факториалом*:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n.$$

По определению принимают $0! = 1$.

В табл. 20.1 приведены значения $n!$ для $n = \overline{1, 10}$.

Таблица 20.1

n	$n!$	n	$n!$
0	1	6	720
1	1	7	5 040
2	2	8	40 320
3	6	9	362 880
4	24	10	3 628 800
5	120		

Перестановки, сочетания, размещения. *Перестановкой без повторений* n-элементного множества называют каждую последовательность из n членов, образованную из всех элементов этого множества. Число перестановок без повторений n-элементного множества: $P_n = n!$.

Перестановкой с повторениями n-элементного множества называют каждую последовательность из n членов, образованную из элементов этого множества, среди которых отдельные элементы повторяются соответственно $n_1, n_2, ..., n_k$ раз. Число перестановок с повторениями n-элементного множества, среди которых отдельные элементы повторяются соответственно $n_1, n_2, ..., n_k$ раз:

$$P_n^{n_1, n_2, ..., n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! ... n_k!},$$

где $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Сочетанием без повторений из k элементов n-элементного множества ($k \le n$) называют каждое подмножество из k элементов этого множества. Число сочетаний без повторений из k элементов n-элементного множества:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Сочетанием с повторениями из k элементов n-элементного множества ($k \le n$) называют каждое подмножество из k элементов, состоящее из разных или одинаковых элементов данного множества. Число сочетаний с повторениями из k элементов n-элементного множества:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Размещением без повторений из k элементов n-элементного множества ($k \le n$) называют каждую последовательность из k разных элементов этого множества. Число размещений без повторений из k элементов n-элементного множества:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Размещением с повторениями из k элементов n-элементного множества называют каждую последовательность из k разных или одинаковых элементов n-элементного множества. Число размещений с повторениями из k элементов n-элементного множества: $\overline{A}_n^k = n^k$.

Справедливы формулы:

$$A_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}}, \quad C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}, \quad C_n^k = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}}.$$

Бином Ньютона. Формула бинома Ньютона имеет следующий вид:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots +$$
$$+ C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – *формула биномиальных коэффициентов.*

Справедливы равенства:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k \quad (1 \le k \le n),$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n,$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Другая форма записи бинома Ньютона приведена в § 3.1.

20.2. Теория вероятностей

Понятие события. Всякое осуществление определенного комплекса условий или действий, при которых наблюдается соответствующее явление, называется *опытом* или *испытанием*.

Событие – возможный результат некоторого опыта (или испытания). События обозначаются A, B, C, … .

Событие называется *достоверным* в данном опыте, если оно обязательно произойдет в этом опыте; его обозначают Ω.

Событие называется *невозможным*, если в данном опыте оно не может произойти. Невозможное событие обозначают $\varnothing$.

Событие называется *случайным* по отношению к данному опыту, если при осуществлении этого опыта оно может наступить, а может и не наступить.

Суммой событий A и B называется третье событие $A + B$, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий (A или B).

Произведением событий A и B называется третье событие AB, которое наступает тогда и только тогда, когда наступают оба события (и A, и B).

Событием, *противоположным событию A*, называется событие $\overline{A}$, которое наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A.

События A и B называются *равными*, если каждый раз, когда наступает одно из них, наступает и другое. Пишут: $A = B$.

События A, B, C, … называются *несовместными*, если два из них не могут произойти вместе в данном опыте. События A, B, C, … называются *совместными*, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появления другого при этом же испытании.

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ обладают свойствами:

1) $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$;

2) $A_i A_k = \varnothing$ при $i \neq k$,

то говорят, что они образуют *полную группу событий* для данного опыта.

Если $A_1, A_2, ..., A_n$ – полная группа попарно несовместных событий, связанных с некоторым испытанием, то события $A_1, A_2, ..., A_n$ называют *элементарными событиями.*

Событие A называется *благоприятным* (*благоприятствующим*) *событию B*, если наступление события A влечет за собой наступление события B.

Определение вероятности, основные формулы. *Классическое определение вероятности* состоит в следующем. *Вероятностью события A* (обозначают $P(A)$) называется отношение числа элементарных событий, благоприятных событию A, к числу всех равновозможных элементарных событий опыта, в котором может появиться событие A:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число благоприятных исходов опыта; n – число всех его исходов.

Пример 1. На пяти одинаковых по форме и размеру карточках написаны буквы слова МИНСК (по одной на каждой карточке). Карточки тщательно перемешаны. Их вынимают наугад и раскладывают одна за другой на столе. Определить, какова вероятность того, что снова получится слово МИНСК.

Решение. Из пяти различных элементов можно составить P_5 перестановок: $P_5 = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$. Значит, всего равновозможных элементарных событий будет 120, а благоприятствующих данному событию – только одно. Следовательно,

$$P = \frac{1}{120}.$$

Классическое определение вероятности предполагает, что число всех элементарных событий конечно. Но на практике часто встречаются опыты, для которых множество таких событий бесконечно.

Чтобы преодолеть недостаток классического определения вероятности, состоящий в том, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов, вводят *геометрическое определение вероятности*. Его суть состоит в следующем.

Если событие A – попадание в область g точки, брошенной в область G ($g \subset G$), то *вероятностью события* A называется величина

$$P(A) = \frac{m(g)}{m(G)},$$

где $m(g)$, $m(G)$ – геометрическая мера областей g, G (длина, площадь, объем).

Формула сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Формула сложения вероятностей совместных событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Формула умножения вероятностей независимых событий:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Формула умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B),$$

где $P(B/A)$ – вероятность события B при условии, что произошло событие A.

Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ – полная группа событий. Тогда справедливы следующие формулы:

1) *формула полной вероятности*

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A/B_k);$$

2) *формула Байеса*

$$P(B_m / A) = \frac{P(B_m)P(A/B_m)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A/B_k)},$$

где $m = \overline{1, n}$.

Пример 2. Один из трех биатлонистов производит два выстрела. Вероятность попадания в «десятку» на мишени при одном выстреле для первого спортсмена равна 0,3, для второго – 0,5, для третьего – 0,8. В итоге мишень не поражена. Найти вероятность того, что выстрелы произведены первым спортсменом.

Р е ш е н и е. Возможны три случая: B_1 – стреляет первый спортсмен, B_2 – стреляет второй спортсмен, B_3 – стреляет третий спортсмен.

Очевидно, что

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}.$$

В результате опыта наблюдалось событие A – после двух выстрелов не было попадания в «десятку». Условные вероятности этого события при гипотезах B_1, B_2, B_3 равны соответственно:

$$P(A / B_1) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49;$$

$$P(A / B_2) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25;$$

$$P(A / B_3) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04.$$

По формуле Байеса находим вероятность гипотезы B_1 после опыта:

$$P(B_1 / A) = \frac{1/3 \cdot 0,49}{\frac{1}{3}(0,49 + 0,25 + 0,04)} = \frac{0,49}{0,78} \approx 0,628.$$

Повторение испытаний. *Формула Бернулли*:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k},$$

где $P_n(k)$ – вероятность появления события A ровно k раз при n независимых испытаниях; p – вероятность появления события A при каждом испытании.

Вероятность того, что событие A:

1) наступит n раз: $P_n(n) = p^n$;

2) не наступит ни разу: $P_n(0) = (1-p)^n$;

3) наступит хотя бы один раз: $P = 1-(1-p)^n$;

4) наступит не более k раз: $P = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k)$;

5) наступит не менее k раз: $P = P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n)$.

Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

$$np-(1-p) \le k_0 < np+p,$$

где n – число испытаний; p – вероятность появления события в одном испытании.

Локальная теорема Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

где $P_n(k)$ – вероятность появления события A ровно k раз в n независимых испытаниях; p – вероятность появления события A в каждом испытании; $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

Интегральная теорема Лапласа:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

где $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ – вероятность появления события A не менее k_1 и не более k_2 раз в n независимых испытаниях; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$ – функция Лапласа.

Случайные величины. *Случайной величиной* называется функция, определенная на множестве элементарных событий Ω. Случайные величины обозначаются X, Y, … , а их возможные значения – x, y, … .

Законом распределения случайной величины называется соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

Функцией распределения (или *интегральной функцией*) *случайной величины* X называется функция, определяемая равенством

$$F(x) = P(X < x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Свойства функции распределения:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) $(x_1 < x_2) \Rightarrow (F(x_1) \le F(x_2))$;

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

4) $P(a \le x < b) = F(b) - F(a)$.

Дискретные случайные величины. Случайная величина называется *дискретной*, если она может принимать конечное (или счетное) множество значений $\{x_n\}$. Функция распределения для дискретной случайной величины является разрывной.

Пусть x_i – значения величины X, $p_i = P(X = x_i)$, где $i = \overline{1, n}$ (или $i = 1, 2, \ldots ,$) и $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$ (или $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$).

Математическое ожидание:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ (\text{или } M(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i).$$

Свойства математического ожидания:

1) $M(C) = C$, где $C = \text{const}$;

2) $M(CX) = CM(X)$, где $C = \text{const}$;

3) $M(X_1 \pm X_2) = M(X_1) + M(X_2)$;

4) $M(X_1 X_2) = M(X_1) M(X_2)$, где X_1, X_2 – независимые случайные величины.

Дисперсия:

$$D(X) = M((X - M(X))^2), \quad D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Свойства дисперсии:

1) $D(C) = 0$, где $C = \text{const}$;

2) $D(CX) = C^2 D(X)$, где $C = \text{const}$;

3) $D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2)$, где X_1, X_2 – независимые случайные величины.

Среднее квадратичное отклонение случайной величины X

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Биномиальный закон распределения:

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = \overline{0, n},$$

$$M(X) = np, \quad D(X) = np(1 - p).$$

Распределение Пуассона:

$$P(X=k)=\frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}, \quad \alpha>0, \quad k=0,1,2,\ldots,$$

$$M(X)=\alpha, \quad D(X)=\alpha,$$

где $\alpha = np$ – среднее число появления события в n испытаниях.

Пример 3. В денежной лотерее разыгрывается один выигрыш в 1000 денежных единиц, 10 выигрышей по 100 денежных единиц и 100 выигрышей по 1 денежной единице при общем количестве билетов 10 000. Найти закон распределения случайного выигрыша X для владельца одного лотерейного билета и математическое ожидание выигрыша X.

Решение. Возможные значения для X:

$$x_1=0, \ x_2=1, \ x_3=100, \ x_4=1000.$$

Их вероятности равны:

$$p_2=0{,}01, \ p_3=0{,}001, \ p_4=0{,}0001,$$
$$p_1=1-0{,}01-0{,}001-0{,}0001=0{,}9889.$$

Таким образом, закон распределения выигрыша X может быть задан следующей таблицей:

X	0	1	100	1000
P	0,9889	0,01	0,001	0,0001

Найдем математическое ожидание выигрыша X. Используя полученную таблицу, имеем:

$$M(X)=0\cdot 0{,}9889+1\cdot 0{,}01+100\cdot 0{,}001+1000\cdot 0{,}0001=0{,}21.$$

Непрерывные случайные величины. *Плотностью вероятностей* (или *дифференциальной функции распределения*) случайной величины X называется неотрицательная функция $f(x)\geq 0$ такая, что

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad x\in \mathbf{R}, \tag{20.1}$$

где $F(x)$ – функция распределения.

Случайная величина называется *непрерывной*, если ее функция распределения представима в виде (20.1).

Свойства плотности вероятностей:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;$

2) $f(x) = F'(x)$ в точках непрерывности функции $f(x)$;

3) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt;$

4) $P(a \le X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины. *Математическое ожидание*:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

при условии, что интеграл сходится.

Дисперсия:

$$D(X) = M((X - M(X))^2),$$

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x)dx,$$

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\right)^2.$$

Некоторые законы распределения непрерывных случайных величин. *Равномерное распределение*:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le a, \\ \dfrac{1}{(b-a)}, \text{ если } a < x \le b, \\ 0, \text{ если } x > b, \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le a, \\ \dfrac{(x-a)}{(b-a)}, \text{ если } a < x \le b, \\ 1, \text{ если } x > b. \end{cases}$$

$$M(X)=\frac{a+b}{2}, \quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Нормальное распределение (*распределение Гаусса*):

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

$$M(X)=a, \quad D(X)=\sigma^2,$$

$$P(\alpha \le X < \beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа.

20.3. Математическая статистика

Генеральная и выборочная совокупности. *Выборочной совокупностью* (или *выборкой*) называется совокупность случайно отобранных объектов, а *генеральной совокупностью* – совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называется число объектов этой совокупности.

Точечные оценки параметров распределения. *Выборочная средняя*:

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i x_i, \qquad (20.2)$$

где n_i – частота варианты x_i $(i=\overline{1,k})$; $n=n_1+n_2+...+n_k$ – объем выборки.

Величина $\overline{x}$, определенная формулой (20.2), является несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания.

Исправленная выборочная дисперсия (несмещенная и состоятельная оценка дисперсии):

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2 .$$

Доверительные интервалы в случае нормального распределения. *Доверительным интервалом* называется интервал, который с заданной надежностью γ покрывает оцениваемый параметр. Если рассматривается случайная величина, имеющая нормальное распределение, то доверительный интервал имеет вид:

1) для математического ожидания при известной дисперсии σ^2 –

$$\left(\overline{x} - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

где t_γ – корень уравнения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$; $\Phi(t)$ – функция Лапласа;

2) для математического ожидания при неизвестной дисперсии –

$$\left(\overline{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right),$$

где s^2 – исправленная выборочная дисперсия; t_γ удовлетворяет условию $P(|t_{n-1}| < t_\gamma) = \gamma$; t_{n-1} – случайная величина, распределенная по закону Стьюдента с $n-1$ степенями свободы;

3) для дисперсии –

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{t_2},\ \frac{(n-1)s^2}{t_1}\right),$$

где t_1, t_2 находят из условий:

$$P(\chi^2_{n-1} > t_2) = \frac{1-\gamma}{2}, \quad P(\chi^2_{n-1} > t_1) = \frac{1+\gamma}{2};$$

χ^2_{n-1} – случайная величина, распределенная по закону χ^2 с $n-1$ степенями свободы.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Латинский алфавит

Печатные буквы	Название	Печатные буквы	Название
A a	а	*N n*	эн
B b	бэ	*O o*	о
C c	цэ	*P p*	пэ
D d	дэ	*Q q*	ку
E e	э	*R r*	эр
F f	эф	*S s*	эс
G g	гэ (жэ)	*T t*	тэ
H h	ха (аш)	*U u*	у
I i	и	*V v*	вэ
J j	йот (жи)	*W w*	дубль-вэ
K k	ка	*X x*	икс
L l	эль	*Y y*	игрек
M m	эм	*Z z*	зэт

Греческий алфавит

Печатные буквы	Название	Печатные буквы	Название
Α α	альфа	Ι ι	йота
Β β	бэта	Κ κ	каппа
Γ γ	гамма	Λ λ	лямбда
Δ δ	дэльта	Μ μ	мю (ми)
Ε ε	эпсилон	Ν ν	ню (ни)
Ζ ζ	дзета	Ξ ξ	кси
Η η	эта	Ο ο	омикрон
Θ ϑ θ	тэта	Π π	пи

Печатные буквы	Название	Печатные буквы	Название
Ρ ρ	ро	Χ χ	хи
Σ σ	сигма	Υ υ	ипсилон
Τ τ	тау	Ψ ψ	пси
Φ φ	фи	Ω ω	омега

Римская система нумерации

Римский символ	Число в десятичной системе	Римский символ	Число в десятичной системе
I	1	XXX	30
II	2	XL	40
III	3	L	50
IV	4	LX	60
V	5	LXX	70
VI	6	LXXX	80
VII	7	XC	90
VIII	8	C	100
IX	9	CC	200
X	10	CCC	300
XI	11	CD	400
XII	12	D	500
XIII	13	DC	600
XIV	14	DCC	700
XV	15	DCCC	800
XVI	16	CM	900
XVII	17	M	1000
XVIII	18	MM	2000
XIX	19	MMM	3000
XX	20		

Названия больших чисел

10^9 – миллиард
10^{12} – триллион
10^{15} – квадриллион
10^{18} – квинтиллион
10^{21} – секстиллион
10^{24} – септиллион

Названия степеней числа 10

деци (д) – 10^{-1}
санти (с) – 10^{-2}
милли (м) – 10^{-3}
микро (мк) – 10^{-6}
нано (н) – 10^{-9}
пико (п) – 10^{-12}
дека (да) – 10
гекто (г) – 10^{2}
кило (к) – 10^{3}
мега (М) – 10^{6}
гига (Г) – 10^{9}
тера (Т) – 10^{12}

Метрическая система мер

Меры длины

1 метр (м) – основная единица
1 дециметр (дм) – 0,1 м
1 сантиметр (см) – 0,01 м
1 миллиметр (мм) – 0,001 м
1 микрон (мк) – 0,000001 м
1 м $=10$ дм $=10^2$ см $=10^3$ мм $=10^6$ мк
1 декаметр (дкм) – 10 м
1 гектометр (гм) – 100 м
1 километр (км) – 1000 м
1 мегаметр (Мм) – 1 000 000 м
1 м $=10^{-1}$ дкм $=10^{-2}$ гм $=10^{-3}$ км $=10^{-4}$ Мм

Меры площади

1 квадратный метр (м^2) – основная единица
1 квадратный дециметр (дм^2) – 0,01 м^2
1 квадратный сантиметр (см^2) – 0,0001 м^2
1 квадратный миллиметр (мм^2) – 0,000001 м^2
1 м^2 $=10^2$ дм^2 $=10^4$ см^2 $=10^6$ мм^2
1 квадратный декаметр, или ар (а), – 100 м^2
1 квадратный гектометр, или гектар (га), – 10 000 м^2
1 квадратный километр (км^2) – 1 000 000 м^2
1 м^2 $=10^{-2}$ а $=10^{-4}$ га $=10^{-6}$ км^2

Меры объема

Меры газообразных и твердых тел

1 кубический метр (м^3) – основная единица
1 кубический дециметр (дм^3) – 0,001 м^3

1 кубический сантиметр ($см^3$) – 0,000001 $м^3$

1 кубический миллиметр ($мм^3$) – 0,000000001 $м^3$

1 кубический километр ($км^3$) – 1 000 000 000 $м^3$

$1\ м^3 = 10^3\ дм^3 = 10^6\ см^3 = 10^9\ мм^3 = 10^{-9}\ км^3$

Меры жидкостей и сыпучих тел

1 литр (л) – основная единица – объем 1 $дм^3$

1 децилитр (дл) – 0,1 л

1 сантилитр (сл) – 0,01 л

1 миллилитр (мл) – 0,001 л

1 микролитр (мкл) – 0,000001 л

$1\ л = 10\ дл = 10^2\ сл = 10^3\ мл = 10^6\ мкл$

1 декалитр (дал) – 10 л

1 гектолитр (гл) – 100 л

1 килолитр (кл) – 1000 л

$1\ л = 10^{-1}\ дал = 10^{-2}\ гл = 10^{-3}\ кл$

Меры веса

1 грамм (г) – основная единица

1 дециграмм (дг) – 0,1 г

1 сантиграмм (сг) – 0,01 г

1 миллиграмм (мг) – 0,001 г

1 микрограмм (мкг) – 0,000001 г

$1\ г = 10\ дг = 10^2\ сг = 10^3\ мг = 10^6\ мкг$

1 декаграмм (дкг) – 10 г

1 гектограмм (гг) – 100 г

1 килограмм (кг) – 1000 г

1 центнер (ц) – 100 кг

1 тонна (т) – 1000 кг

$1\ г = 10^{-1}\ дкг = 10^{-2}\ гг = 10^{-3}\ кг = 10^{-5}\ ц = 10^{-6}\ т$

Формулы перевода единиц

Единицы длины

1 дюйм = 2,54 сантиметра

1 сантиметр ≈ 0,3937 дюйма

1 фут ≈ 0,3048 метра

1 метр ≈ 3,281 фута

1 ярд ≈ 0,9144 метра

1 метр ≈ 1,094 ярда

1 миля ≈ 1,609 километра

1 километр ≈ 0,6214 мили

Единицы площади

1 квадратный дюйм ≈ 6,452 кв. сантиметра

1 квадратный сантиметр ≈ 0,155 кв. дюйма

1 квадратный фут ≈ 0,0929 кв. метра

1 квадратный метр ≈ 10,76 кв. фута

1 квадратный ярд ≈ 0,8361 кв. метра

1 квадратный метр ≈ 1,196 кв. ярда

1 квадратная миля ≈ 2,59 кв. километра

1 квадратный километр ≈ 0,3861 кв. мили

1 акр ≈ 0,4047 гектара

1 гектар ≈ 2,471 акра

Единицы объема

1 кубический дюйм ≈ 16,39 куб. сантиметра

1 кубический сантиметр ≈ 0,06102 куб. дюйма

1 кубический фут ≈ 0,02832 куб. метра

1 кубический метр ≈ 35,31 куб. фута

1 кубический ярд ≈ 0,7646 куб. метра

1 кубический метр ≈ 1,308 куб. ярда

Единицы массы

1 гран ≈ 0,0648 грамма

1 грамм ≈ 15,43 грана

1 унция ≈ 28,35 грамма

1 грамм ≈ 0,03527 унции

1 фунт ≈ 453,6 грамма

1 грамм ≈ 0,002205 фунта

1 фунт ≈ 0,4536 килограмма

1 килограмм ≈ 2,205 фунта

ОГЛАВЛЕНИЕ

УДК 51(035.5)(075.3)
ББК 22.1я721
М12

Майсеня, Л. И.

М12 Справочник по математике : основные понятия и формулы / Л. И. Майсеня. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : Выш. шк., 2012. – 399 с. : ил.

ISBN 978-985-06-2035-4.

Приводятся основные понятия и формулы курсов элементарной и высшей математики. Материал систематизирован в соответствии с логикой предметов.

Предыдущее издание вышло в 2008 г.

Для учащихся общеобразовательных и средних специальных учебных заведений. Книга будет полезна при подготовке к вступительным экзаменам, а также к централизованному тестированию. Может быть использована студентами вузов.

УДК 51(035.5)(075.3)
ББК 22.1я721

ISBN 978-985-06-2035-4

Справочное издание

Майсеня Людмила Иосифовна

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ
Основные понятия и формулы

Редактор *Е.В. Малышева*
Художественный редактор *Т.В. Шабунько*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Компьютерная верстка *М.В. Бригер*
Корректор *В.И. Аверкина*

Подписано в печать 01.02.2012. Формат 84×108/32. Бумага для офсетной печати.
Гарнитура "Таймс". Офсетная печать. Усл. печ. л. 21,0.
Уч.-изд. л. 19,02. Тираж 1800 экз. Заказ

Республиканское унитарное предприятие «Издательство "Вышэйшая школа"».
ЛИ № 02330/0494062 от 03.02.2009. Пр. Победителей, 11, 220048, Минск.
e-mail: market@vshph.com http://vshph.com

Открытое акционерное общество «Красная звезда».
ЛП № 02330/0552716 от 03.04.2009. 1-й Загородный пер., 3, 220073, Минск