СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ НЕСТАТИЧЕСКИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ В ТЕНЗОРНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Выблый Ю.П.[1], Леонович А.А.[2]

[1] *Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь, e-mail:Vyblyi@gmail.com*
[2] *Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь, e-mail: kaffiz@bsuir.by*

Abstract. *In the framework of the tensor theory of gravitation the exact spherically symmetric wave-type solution is obtained and the Fock energy-momentum tensor containing only the first derivatives of gravitational potentials is considered. It is shown that the solution has a positive- definite energy and momentum density.*

1. Тензорная теория гравитации

Как известно, в общей теории относительности энергия гравитационного поля описывается с помощью псевдотензора энергии-импульса, а соответствующее выражение для тензора отсутствует. Это одна из причин по которой гравитационное взаимодействие может рассматриваться как тензорное в пространстве-времени Минковского. Такой подход был реализован, в частности, в релятивистской теории гравитации (РТГ) [1,2]. Эта теория может рассматриваться как калибровочная теория группы вариаций Ли динамических переменных. Соответствующие преобразования являются вариациями формы функции для общековариантных преобразований. Действие становится инвариантным при указанных преобразованиях заменой "нединамической" метрики Минковского γ^{ik} на выражение g^{ik}: $\tilde{g}^{ik} = \sqrt{-g}g^{ik} = \sqrt{-\gamma}(\gamma^{ik} + k\psi^{ik})$, где $\gamma = det\gamma_{ik}, g = detg_{ik}$, k^2 - постоянная Эйнштейна, и введении, таким образом, калибровочного гравитационного потенциала ψ^{ik}. Величина g^{ik} интерпретируется теперь как метрика эффективного пространства-времени, с помощью которой может быть образована связность – скобки Кристоффеля. Для устранения калибровочного произвола и тем самым однозначного выбора системы координат в пространстве Минковского необходимо нарушить калибровочную инвариантность. В РТГ это достигается путем введения массы гравитона, что явным образом нарушает калибровочную инвариантность теории. Полевые уравнения РТГ в ее безмассовом варианте являются уравнениями Эйнштейна для этой метрики, дополненные добавочными уравнениями ограничения поля ψ^{ik} по спиновым состояниям

$$D_i \tilde{g}^{ik} = 0, \tag{1}$$

где D_i – ковариантная производная в пространстве Минковского. Эти условия играют важную роль в РТГ, исключая калибровочный произвол эйнштейновских уравнений и в декартовых координатах совпадают с условиями гармоничности Фока [3].

Хотя полевые уравнения РТГ локально совпадают с уравнениями общей теории относительности, их глобальные решения могут быть, вообще говоря, различными, поскольку указанные уравнения задаются на разных многообразиях. РТГ, основываясь на простой топологии плоского пространства-времени, всегда позволяет ввести глобальную галилееву систему координат, что отличает ее от биметрических теорий, в которых плоское пространство играет вспомогательную роль и его топология не определяет характер физических процессов. Это различие может проявиться при интерпретации решений полевых уравнений, так как система координат в РТГ задается видом метрики Минковского, входящей в (1), а в общей теории относительности фиксируется нековариантными координатными условиями. Именно такая ситуация имеет место при рассмотрении сферически-симметричных полей. Теорема Биркгоффа в ОТО [4] утверждает, что любое сферически-симметричное гравитационное поле в пустоте является статическим, и доказывается преобразованием сферически-симметричной метрики общего вида к координатам, в которых оно имеет статическую форму. Однако, в РТГ такое преобразование является переходом от сферических координат пространства Минковского с метрикой $\gamma_{ik} = diag(1,-1,-r^2,-r^2\sin^2\theta)$ к некоторым "нестатическим" координатам. Теорема Биркгоффа означает, что в случае сферической симметрии всегда существует система координат (и при том неединственная), в которой метрика в пустоте зависит только от одной координаты, откуда не следует статичность поля в исходных сферических координатах. Таким образом, в РТГ возникает задача исследования нестатических сферически-симметричных полей, которая в общем виде была рассмотрена в [5]. В данной работе в неявной форме найдено одно из возможных нестатических решений волнового типа и рассмотрены его энергетические характеристики.

2. Сферически-симметричное волновое решение

Для нахождения сферически-симметричных волновых решений воспользуемся теоремой Биркгоффа и представим произвольное нестатическое сферически-симметричное вакуумное решение в некоторой системе координат (τ, R, θ, ϕ) в виде метрики Шварцшильда

$$ds^2 = (1-\frac{2m}{R})d\tau^2 - (1-\frac{2m}{R})^{-1}dR^2 - R^2 d\Omega^2 \,. \tag{2}$$

Для того чтобы найти решение в сферических координатах пространства Минковского (t, r, θ, ϕ), сделаем координатное преобразование

$$t = t(\tau, R), r = r(\tau, R)\,, \tag{3}$$

при этом коэффициенты преобразования найдутся из условий (1). Из этих условий следует, что уравнения, связывающие переменные (t, r) и (τ, R) имеют вид

$$\frac{R}{R-2m}\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} - R^{-2}\partial_R[(R^2-2mR)\frac{\partial t}{\partial R}] = 0\,, \tag{4}$$

$$\frac{R}{R-2m}\frac{\partial^2 r}{\partial \tau^2} - R^{-2}\partial_R[(R^2-2mR)\frac{\partial r}{\partial R}] + \frac{2r}{R^2} = 0\,. \tag{5}$$

Будем искать частное решение уравнений (4), (5) в виде [6]

$$\tau = t + T(u), R = r + m, u = t + f(r), \tag{6}$$

где u – запаздывающий аргумент, остающийся конечным при любых значениях r; скорость света и гравитационную постоянную полагаем в дальнейшем равными единице. Вычисляя с помощью (6) прямые и обратные коэффициенты преобразования и подставляя их в уравнения (4), (5), находим, что уравнение (5) удовлетворяется тождественно, а уравнение (4) после разделения переменных сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям с константой разделения C для функций $T(u)$ и $f(r)$.

$$T_{uu} = CT_u(1+T_u)^2. \tag{7}$$

$$f_{rr} + C f_r^{\,2} + \frac{2r}{r^2 - m^2} f_r - C\frac{(r+m)^2}{(r-m)^2} = 0. \tag{8}$$

Первый интеграл уравнения (7) имеет вид

$$Cu = \frac{1}{1+z} - \ln\left|\frac{z+1}{z}\right| + A, \tag{9}$$

где $z = T_u$, A – константа интегрирования. Из решения (9) следует, что при положительном значении A функция $z(u)$ является положительной для достаточно больших значений u ($u > 0$) и стремится к A при $u \to \infty$.

Уравнение (8) может быть проинтегрировано с помощью представления решения для f_r в виде степенного ряда по переменной $1/r$. Анализ найденного выражения показывает, что при $C > 0$ f_r является отрицательной величиной для всех значений r.

Компоненты метрики имеют вид

$$g_{00} = \frac{r-m}{r+m}(1+T_u)^2, g_{01} = \frac{r-m}{r+m}T_u(1+T_u) f_u, g_{11} = \frac{r-m}{r+m}(T_u)^2 (f_u)^2 - \frac{r+m}{r-m},$$

$$g_{22} = -(r+m)^2, g_{33} = -(r+m)^2 \sin^2\theta. \tag{10}$$

Найденная метрика может быть использована для исследования плотности энергии t^{00}. Проблема положительной определенности плотности гравитационной энергии в РТГ не является тривиальной, поскольку для t^{00} не обладает квадратичной структурой относительно полевых функций и их первых производных и содержит вторые производные. Рассмотрим представление Фока для тензора Эйнштейна G^{ik}

$$2gG^{ik} = \partial_m \partial_n (\tilde{g}^{ik}\tilde{g}^{mn} - \tilde{g}^{im}\tilde{g}^{kn}) + L^{ik}, \tag{11}$$

где L^{ik} содержит только первые производные. Выражение

$$U^{ik} = \partial_m \partial_n (\tilde{g}^{ik}\tilde{g}^{mn} - \tilde{g}^{im}\tilde{g}^{kn}) \tag{12}$$

Фок интерпретировал как плотность веса +2 псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля, которая сводится к L^{ik} на уравнениях поля [3]. В релятивистской теории гравитации можно получить соответствующую тензорную плотность веса +1, заменяя частные производные на ковариантные относительно метрики Минковского

$$t_g^{ik} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} D_m D_n (\tilde{g}^{ik}\tilde{g}^{mn} - \tilde{g}^{im}\tilde{g}^{kn}) . \qquad (13)$$

Используя тензор энергии-импульса Фока, проведем вычисление энергии для приведенного выше волнового решения. Выражение для энергии может быть записано в виде

$$T_g^{00} = -\frac{1}{r^2}[(\frac{R^4}{r^2})_r + 2r\frac{R^2}{r^2}({T_r}^2 g_{TT} + {R_r}^2 g_{RR})]_r , \qquad (14)$$

и представляет собой сумму статической и волновой частей. Для волновой части получим

$$T_w^{00} = -\frac{1}{r^2}[(\frac{R^2}{r} g_{TT})_r {T_u}^2 {f_r}^2 + 2\frac{R^2}{r} g_{TT} (T_u T_{uu} {f_r}^3 + {T_u}^2 f_r f_{rr})] . \qquad (15)$$

Анализ полученного выражения показывает, что оно является положительно-определенным, если константа C и величина T_u положительны, а величина f_r отрицательна. Эти требования вытекают из вида решений уравнений (7)-(8) (явных решений уравнения (7) и уравнения (8) вдали от источника, а также из численного решения уравнения (8)).

Найдем выражение для плотности импульса поля. Проводя вычисления в декартовых координатах x^i, получаем

$$P_w^i = \frac{4Cx^i}{r^4}(\frac{r-m}{r+m}) {f_r}^2 {T_u}^2 (1+T_u)^2 . \qquad (16)$$

Это выражение является, очевидно, положительно-определенным при $C > 0$, что свидетельствует о переносе энергии, зависящем от запаздывающего аргумента и, следовательно, о волновом характере решения.

Литература

[1] А.А. Логунов, М. А. Мествиришвили. Релятивистская теория гравитации М. Мир, (1989).
[2] A. Logunov. The Theory of Gravity. Nova Scifnce Publ. N.Y., (1998).
[3] В.А. Фок. Теория пространства ,времени и тяготения. ГИФМЛ, Москва, (1961).
[4] G.Birkhoff . Relativity and Modern Physics. Harvard Un. Press, (1923).
[5] А.А. Власов. Некалибровочный подход в релятивистской теории гравитации. МГУ, Москва, (1992).
[6] A. Leonovich and Yu. Vyblyi. Spherical gravitational waves in the week gravitational field. Proc. of the IX Int. Conf. “Bolyai-Gauss-Lobachevsky”, Minsk, 2016, p. 130-135.