

ОЦЕНКА ЧАСТОТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЛЧМ-СИГНАЛА ПО КОРОТКОЙ ВЫБОРКЕ

К.Ю. Дорох, С. В. Козлов, Е. А. Манюкевич

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (БГУИР), Минск, Беларусь

Аннотация. Обоснованы алгоритмы определения начального значения и скорости изменения частоты сигнала с линейной частотной модуляцией сигнала при цифровой обработке короткой выборки его квадратурных компонентов. Алгоритмы основаны на развертке полной фазы принимаемой реализации и ее аппроксимации параболической зависимостью по трем точкам, коэффициенты которой функционально связаны с оценками начальных фаз, частоты и скорости изменения частоты сигнала.

Ключевые слова: линейная частотная модуляция; оценка частоты, девиация частоты, фаза, квадратурные компоненты сигнала.

ESTIMATION OF PARAMETERS OF A SIGNAL WITH LINEAR FREQUENCY MODULATION ON A SHORT DIGITAL SAMPLE

S. V. Kozlov, E.A. Manukevich

Belarusian state university of informatics and radioelectronics, Minsk, Belarus

Abstract. The algorithms for determining the initial value and rate of change of the signal frequency with linear frequency modulation of the signal in the digital processing of a short sample of its quadrature components. The algorithms are based on the sweep of the full phase of the accepted realization and its approximation by parabolic dependence on three points, the coefficients of which are functionally related to the estimates of the initial phases, frequency and speed of the signal frequency change..

Keywords: linear frequency modulation; frequency estimation, frequency deviation, phase, quadrature components of the signal.

1. ВВЕДЕНИЕ

В ряде практических приложений (радиомониторинг, формирование помех из копий зондирующего сигнала и др.) существует практическая потребность определения частотных параметров - начальной частоты и скорости изменения частоты - ЛЧМ-сигнала при жестких ограничениях на время проведения указанных оценок. Реализация известных оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов оценки, основанных на методе максимального правдоподобия или преобразовании Фурье, в этом случае оказывается затруднительной. В [1] предложены алгоритмы оценки частоты гармонического сигнала при цифровой обработке квадратурной выборки. Цель работы – модификация алгоритмов указанных алгоритмов и получение оценок точности измерения частотных параметров ЛЧМ-сигнала.

2. АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

Будем полагать, что наблюдению доступны $i = \overline{1, I}$, где $I = [TF_d]$; F_d - частота дискретизации; T - длительность интервала наблюдения, отсчетов квадратурных компонент смеси сигнала и шума вида

$$\dot{Y}_i = \dot{S}(t_i) + \dot{N}(t_i), \quad (1)$$

где $\dot{S}(t) = Ae^{j(\varphi_0 + 2\pi ft + bt^2)}$ - ЛЧМ-сигнал с начальными фазой φ_0 , частотой f , амплитудой A и скоростью изменения частоты $V_f = b/\pi$; $t_i = i/F_d$; $\dot{N}(t_i)$ - комплексный гауссовский шум с корреляционной функцией $\overline{\dot{N}(t_m)\dot{N}^*(t_n)} = \delta_{mn}\sigma_{sh}^2$; σ_{sh}^2 - дисперсия шума; δ_{mn} - символ Кронекера.

Оценки фаз отсчетов:

$$\hat{\theta}_i = \arg(\operatorname{Re}(\dot{Y}_i), \operatorname{Im}(\dot{Y}_i)), \hat{\theta}_i \in [0, 2\pi). \quad (2)$$

Развертку оценок $\hat{\psi}$ полной фазы отсчетов принимаемого сигнала по результатам наблюдений выполним по алгоритму

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1 &= \hat{\theta}_1; \\ \hat{\Delta}_k &= \hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1}; \hat{\Delta}'_k = \begin{cases} \Delta_k, & |\Delta_k| < \pi; \\ \Delta_k - 2\pi \cdot \operatorname{sign}(\Delta_k), & |\Delta_k| > \pi; \end{cases} \\ \hat{\psi}_k &= \hat{\psi}_{k-1} + \hat{\Delta}'_k; k = \overline{1, I}. \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) $\hat{\Delta}_k$, $\hat{\Delta}'_k$ - оценки приращения фазы за интервал времени между $(k-1)$ -ым и k -ым отсчетом без приведения и с приведением к интервалу $[-\pi, \pi]$. При проведении оценивания фазы предполагается, что набег фаз между отсчетами для любой начальной частоты и скорости изменения ЛЧМ-сигнала меньше, чем π . Это гарантируется, если частота дискретизации удовлетворяет теореме Котельникова.

Для точного значения полной фазы при отсутствии шума имеем:

$$\psi_k(\varphi_0, f, b) = \varphi_0 + 2\pi ft_k + bt_k^2. \quad (4)$$

Оценки неизвестных параметров сигнала $\hat{\varphi}_0, \hat{f}, \hat{b}$ могут быть найдены методом наименьших квадратов по эталонной квадратичной зависимости фазы ψ_k с использованием всех или части отсчетов фазы:

$$(\hat{\varphi}_0, \hat{f}, \hat{b})_{\text{опт}} = \arg \min_{\{\varphi_0, f, b\}} \sum_m (\hat{\psi}_m - \psi_m(\varphi_0, f, b))^2, \quad (5)$$

где суммирование может проводиться по всем $m = \overline{1, I}$ либо по части $m = 0, \Delta i, 2\Delta i, \dots, I$ отсчетов полной фазы с шагом Δi .

При использовании всех $m = \overline{1, I}$ оценок полной фазы для оптимальных значений $(\hat{\varphi}_0, 2\pi\hat{f}, \hat{b})_{\text{опт}}$ имеем:

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_0 \\ 2\pi\hat{f} \\ \hat{b} \end{pmatrix}_{\text{опт}} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_k \hat{\psi}_k \\ \Delta t \sum_k k \hat{\psi}_k \\ \Delta t^2 \sum_k k^2 \hat{\psi}_k \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{I(I+1)}{2} & \frac{T}{2} & T^2(1+1/I)(2I+1) \\ \frac{T}{2} & \frac{T^2}{6}(1+1/I)(2I+1) & \frac{T^3}{4}(1+1/I)(I+1) \\ \frac{T^2}{6}(1+1/I)(2I+1) & \frac{T^3}{4}(1+1/I)(I+1) & \frac{T^4}{30}(2+1/I)(I+1)(3+3/I-1/I^2) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Отметим, что матрица \mathbf{A}^{-1} может быть вычислена заранее. Однако общее число вычислительных операций согласно (6) может оказаться значительным.

Для минимизации вычислительных затрат при вычислении оценок может быть использована наиболее экономичная аппроксимация по трем точкам, когда $\Delta i = I/2$ (величина I предполагается четной). В этом случае в (5) будут использоваться только значения полной фазы $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_{I/2}, \hat{\psi}_I$ в моменты времени $t_1, t_{I/2}, t_I$. Проводя минимизацию в (5), получим оценки начальной фазы, частоты и параметра b в виде:

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_0 = \psi_1; \\ \hat{f} = \frac{1}{2\pi T}(-3\psi_1 + 4\psi_{I/2} - \psi_I); \\ \hat{b} = \frac{1}{T^2}(2\psi_1 + 4\psi_{I/2} + 2\psi_I). \end{cases} \quad (8)$$

Реализация алгоритма оценивания в соответствии с (3), (6) в отличие от других известных (максимального правдоподобия, на основе преобразования Фурье и т.д.) является предельно простой в вычислительном смысле.

3. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОЦЕНИВАНИЯ ЧАСТОТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЛЧМ-СИГНАЛА

Найдем статистические характеристики оценок (8). Введем отношение сигнал/шум по напряжению

$$q = \frac{A}{\sigma_{sh}}. \quad (9)$$

Будем полагать, что отношение сигнал/шум q достаточно велико для того, чтобы при развертке полной фазы вероятность правильного определения целого числа периодов 2π циклического изменения фазы была близка к единице. Оценки фаз $\hat{\theta}_k$ - независимые гауссовы случайные величины с математическим ожиданием

$$M\{\hat{\theta}_k\} = \psi_k(\varphi_0, f, b) - 2\pi \left[\frac{\psi_k(\varphi_0, f, b)}{2\pi} \right] \quad (10)$$

и дисперсией

$$D\{\hat{\theta}_k\} = \frac{1}{2q^2}. \quad (11)$$

Тогда при указанном предположении

$$D\{\psi_1\} = D\{\psi_{I/2}\} = D\{\psi_I\} = D\{\hat{\theta}_k\} = \frac{1}{2q^2}, \quad (12)$$

и

$$\sigma_f = \frac{\sqrt{13}}{2\pi Tq}; \quad \sigma_b = \frac{\sqrt{12}}{T^2q}. \quad (13)$$

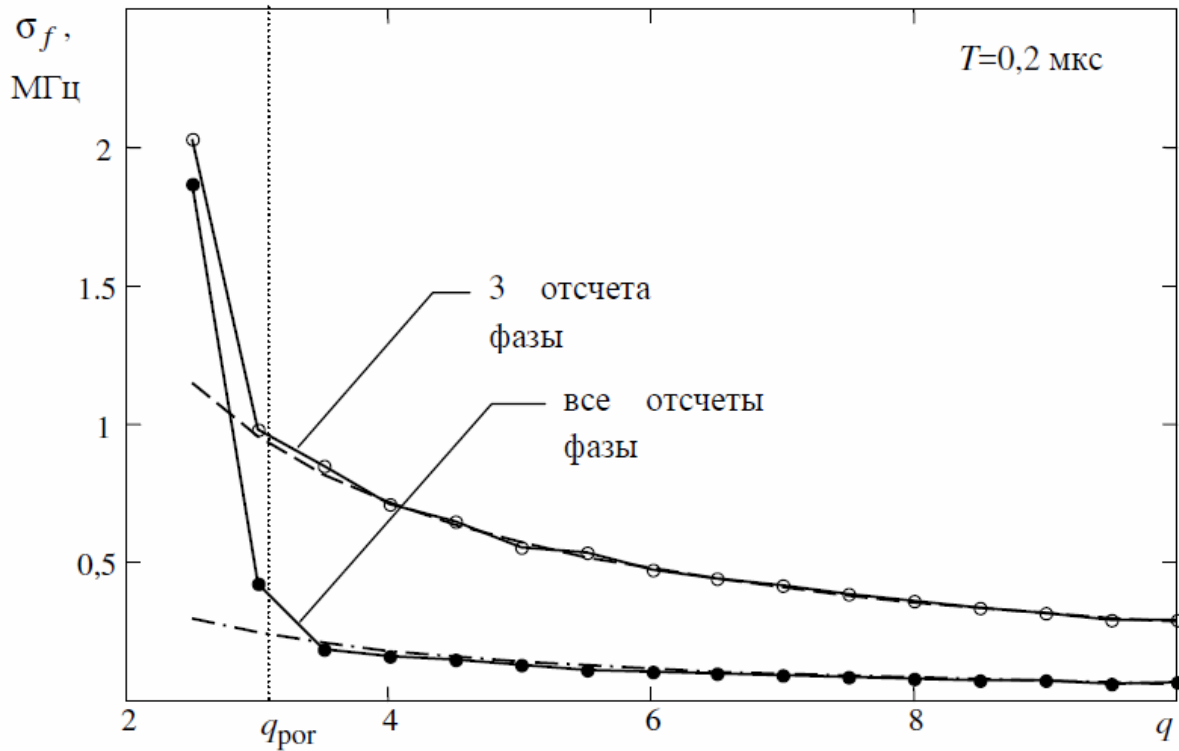
Математические ожидания оценок \hat{f} , \hat{b} при отсутствии аномальных ошибок фазы будут равны истинным значениям, при этом оценки указанных величин будут коррелированы.

Эффективность предлагаемого алгоритма с определением области применимости (13) исследовалась методом имитационного моделирования. Рассматривался квадратурный приемник сигналов с полосой пропускания квадратурных компонент 250 МГц при частоте дискретизации 500 МГц при отношении сигнал/шум $q = A/\sigma_{sh} = 2...10$.

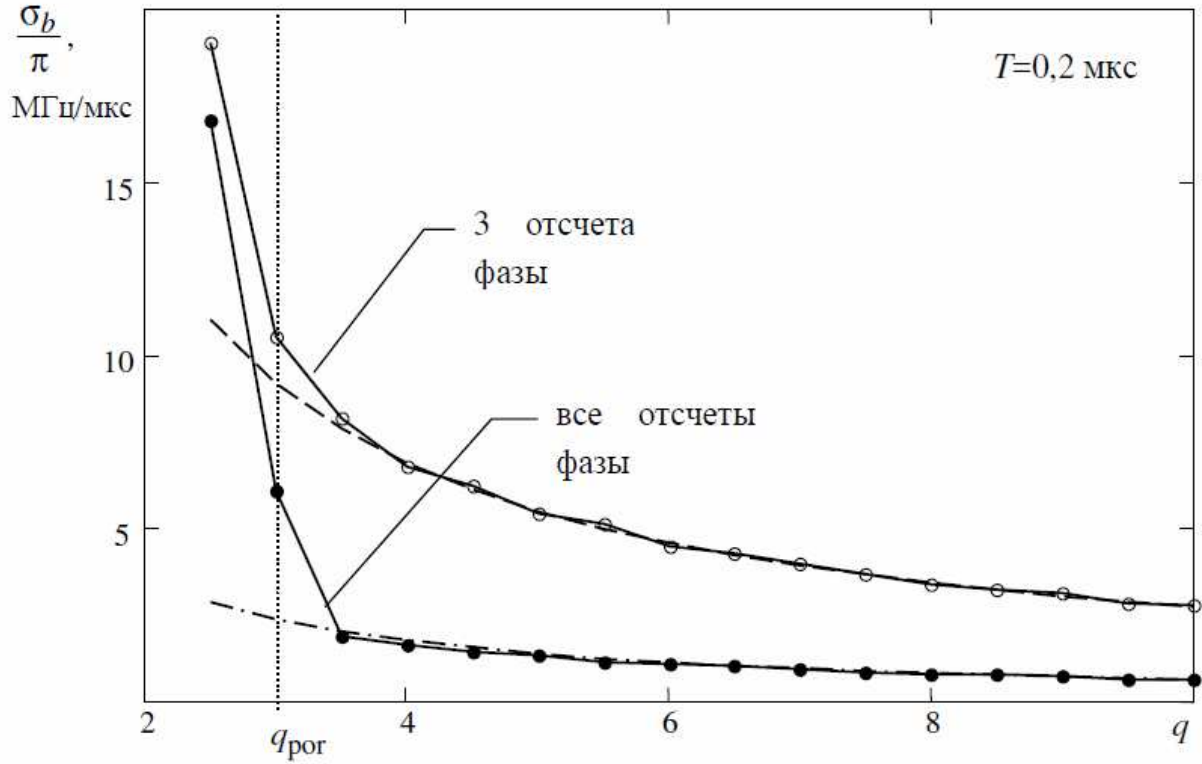
На рисунке 1 приведены результаты расчетов зависимости среднеквадратических ошибок оценивания параметров ЛЧМ-сигнала ($f = 50$ МГц, $b/\pi = -10$ МГц/мкс) от отношения сигнал/шум при длительности выборки $T = 0,2$ мкс, полученные при прямом воспроизведении алгоритма оценивания в соответствии с (2), (3), (6) (сплошные кривые с маркерами при использовании трех и всех отсчетов), аналитическими зависимостями (11) (пунктирная кривая), а также при оценивании параметров методом максимального правдоподобия (штрихпунктирная кривая). Дисперсии оценок максимального правдоподобия оценивались как диагональные элементы информационной матрицы Фишера [2] для случая совместного оценивания начального значения и скорости изменения частоты.

Среднеквадратические ошибки оценивания параметров, полученные при прямом воспроизведении алгоритма оценивания по трем значениям полной фазы и по аналитическим выражениям (13) полностью совпадают при $q_{por} = A/\sigma_{sh} > 3$. При $q < q_{por}$ ошибки оценивания параметров по результатам имитационного моделирования алгоритма резко возрастают. Это объясняется увеличением ошибок оценки приращения фазы за интервал времени между $(k-1)$ -ым и k -ым отсчетом. Проигрыш предлагаемого алгоритма оценивания в сравнении с алгоритмом максимального правдоподобия по достижимой величине среднеквадратической ошибки оценивания при использовании трех отсчетов фазы составляет 5,8 раза.

При использовании всех отсчетов фазы значения среднеквадратических ошибок оценивания параметров сигналов, полученные при компьютерном моделировании и рассчитанные по информационной матрице Фишера совпадают при таком же пороговом значении отношения сигнал/шум $q_{por} = A/\sigma_{sh} > 3$. Таким образом, предлагаемый алгоритм при использовании всех отсчетов полный фаз при $q > q_{por}$ эквивалентен алгоритму максимального правдоподобия.



а)



б)

Рис. 1 – Зависимости среднеквадратических ошибок оценивания начальной частоты (а) и скорости ее изменения (б) от отношения сигнал/шум

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемый вариант оценки частотных параметров ЛЧМ-сигнала обеспечивает получение несмещенных оценок, является асимптотически эффективным и предельно простым в реализации. Требования к вычислительным ресурсам при реализации алгоритма могут гибко изменяться в зависимости от заданной точности оценивания частотных параметров сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ронкин М. В., Калмыков А. А., Хрестина Е. И.. Оценка частоты сигнала по короткой реализации в локационных системах с непрерывным излучением на основе обработки квадратурных составляющих // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника, т. 1. – С. 48-52.
2. Репин В. Г., Тартаковский Г. П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1977. – 432 с.

REFERENCES

1. Ronkin M. V., Kalmykov A. A., E. I. Hrestina. Frequency estimation of signal by a short implementation in radar systems with continuous radiation based on the processing of quadrature components // News of higher educational institutions of Russia. Electronics, vol.1. – P. 48-52.
2. Repin V. G., Tartakovsky G. P. Statistical synthesis under a priori uncertainty and adaptation of information systems. M.: Sov. radio, 1977. - 432 p.