

УДК 621.391

## КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД СПЕКТРАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПРИ ПОЛУЧЕНИИ СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ ПО ЧАСТОТЕ

В.А. КАКОРА, А.В. ГРИНКЕВИЧ

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Республика Беларусь*

*Поступила в редакцию 23 мая 2018*

**Аннотация.** Оценивание спектральной плотности мощности (СПМ) сигнала обычно выполняется с помощью классических методов спектрального анализа, основанных на дискретном преобразовании Фурье. Такой подход к спектральному анализу эффективен в вычислительном отношении и обеспечивает получение приемлемых результатов. Однако, несмотря на указанные достоинства, классическим методам присущ ряд принципиальных ограничений. Наиболее важное из них – это ограничение разрешающей способности. Для решения задачи повышения частотного разрешения на практике используются такие методы, как MUSIC, EV, Берга, МД-оценка и т. д. [1]. В статье рассматриваются классические методы оценки спектральной плотности мощности, метод минимума дисперсии ошибки (МД-оценка) и разработанный комбинированный метод.

**Ключевые слова:** спектральная плотность мощности, быстрое преобразование Фурье, МД-оценка, частотное разрешение, комбинированный метод.

**Abstract.** Evaluating of the power spectral density (SPM) of signal are usually performed through procedures using classical methods spectral analysis based on the discrete Fourier transform. This approach to spectral analysis is computationally efficient and provides acceptable results. However, in spite of these advantages, a classical method has a number of fundamental limitations. The most important of these is the limitation of the frequency resolution. For the solution of a problem of increase in the frequency resolution, in practice such methods as MUSIC, EV, Berg, MD assessment etc. In article presents classical methods of estimation power spectrum density, method the minimum error variance (MD estimate) and developed combined method.

**Keywords:** power spectral density, fast Fourier transform, MD-assessment, frequency resolution, combined method.

**Doklady BGUIR. 2018, Vol. 118, No. 8, pp. 63-70**

**Combined method of spectral estimation when receiving of superpermissions on frequency**

**V.A. Kakora, A.V. Grinkevich**

### Классические методы оценки СПМ

В сложившейся теории спектрального оценивания существуют два эквивалентных метода определения СПМ. Косвенный метод основан на выполнении дискретного преобразования Фурье (ДПФ) автокорреляционной последовательности. Прямой метод определения СПМ основан на вычислении квадрата модуля преобразования Фурье для бесконечной последовательности данных с использованием соответствующих статистических усреднений. Оценки СПМ, основанные на прямом преобразовании данных и последующем усреднении, получили название периодограмм. Оценки СПМ, для получения которых по исходным данным сначала формируются корреляционные оценки, получили название коррелограммных методов спектрального оценивания [2].

Представим входной сигнал в виде смеси трех синусоидальных сигналов и помехи  $y(t)$ :

$y(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\pi f_2 t + \varphi_2) + A_3 \sin(2\pi f_3 t + \varphi_3) + n(t)$ , где  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  – начальная фаза сигналов;  $A_1, A_2, A_3$  – амплитуда сигналов;  $f_1, f_2, f_3$  – частота сигналов.

Для проведения расчетов примем  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ ,  $A_1 = A_2 = A_3 = 1$ ,  $f_1 = 5,5$  кГц,  $f_2 = 6$  кГц,  $f_3 = 6,5$  кГц, отношение сигнал/шум равно 10 дБ, время наблюдения сигнала  $T_N = 2,5$  мс, количество отсчетов  $N_{отс} = 1024$ . Входной сигнал представлен на рис. 1.

Потенциальная разрешающая способность по частоте определяется в соответствии с выражением

$$\Delta f = \frac{1}{T_N} = 400 \text{ Гц.} \quad (1)$$

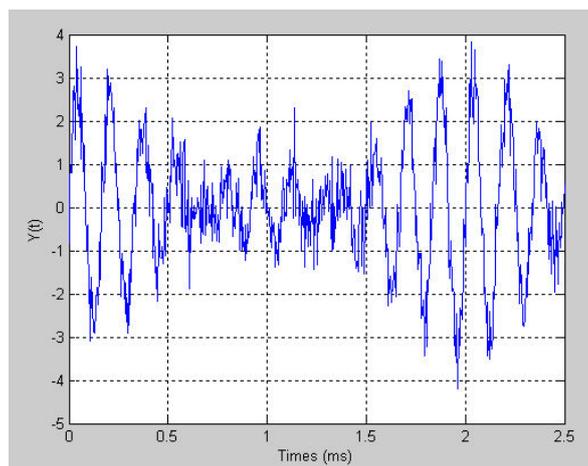


Рис. 1. Сумма сигналов и шума

Для периодограммного метода СПМ определяется квадратом модуля преобразования Фурье для бесконечной последовательности данных

$$P_{xx}(f) = \frac{T}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi fnT) \right|^2, \quad (2)$$

где  $N$  – количество отсчетов,  $T$  – интервал отсчетов.

Это исходная не модифицированная форма периодограммной оценки СПМ [3].

По формуле (2) найдем СПМ входного сигнала  $y(t)$ , проведя его дискретизацию. График СПМ представлен на рис. 2.

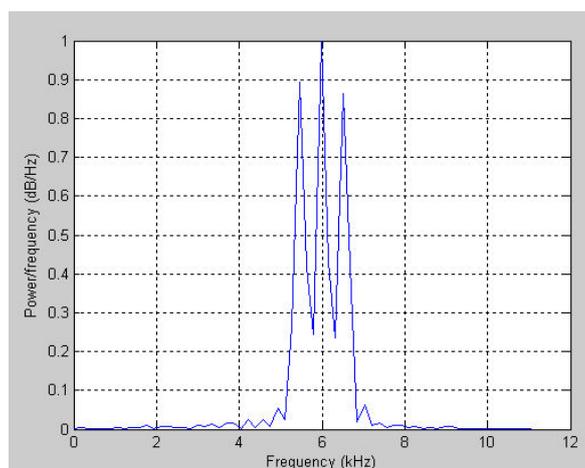


Рис. 2. СПМ анализируемого сигнала, полученного периодограммным методом при  $T_N = 2,5$  мс

Уменьшим время наблюдения входного сигнала до  $T_N = 2$  мс. В соответствии с формулой (1) изменится потенциальная разрешающая способность по частоте  $\Delta f = 1/T_N = 500$  Гц, соответственно, будет отсутствовать разрешение по частоте (рис. 3).

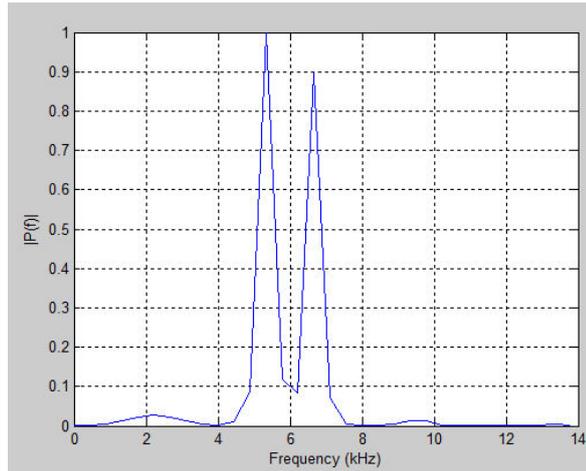


Рис. 3. СПМ анализируемого сигнала, полученного периодограммным методом при  $T_N = 2$  мс

Из результатов оценки СПМ периодограммным методом при  $T_N = 2$  мс следует, что при уменьшении времени анализа входного сигнала частотное разрешение всех трех частот анализируемого сигнала не обеспечивается.

Для коррелограммного метода СПМ представляет собой дискретно-временное преобразование Фурье автокорреляционной последовательности

$$P_{xx}(f) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}[m] \exp(-j2\pi fmT). \quad (3)$$

Коррелограммный метод оценивания СПМ заключается в подстановке в выражение (3) конечной последовательности значений оценки автокорреляции (коррелограммы) вместо бесконечной последовательности неизвестных истинных значений автокорреляции [4].

В соответствии с выражением (3) найдем СПМ входного сигнала  $y(t)$ . График СПМ сигнала, полученного коррелограммным методом при  $T_N = 2,5$  мс, представлен на рис. 4.

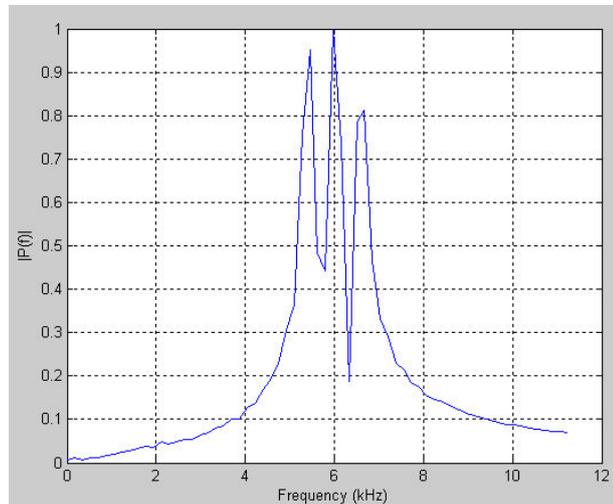


Рис. 4. СПМ анализируемого сигнала, полученного коррелограммным методом при  $T_N = 2,5$  мс

Влияние уменьшения времени анализа до  $T_N = 2$  мс на определение СПМ коррелограммным методом представлено на рис. 5.

После уменьшения времени анализа коррелограммный метод, так же как и оценка СПМ периодограммным методом, однозначного определения частот анализируемого сигнала не обеспечивает.

Часто при наличии коротких записей данных необходимо получить гораздо большее разрешение, чем могут обеспечить классические методы оценки СПМ. Добиться этого можно за счет методов высокого разрешения, одним из которых является метод минимума дисперсии.

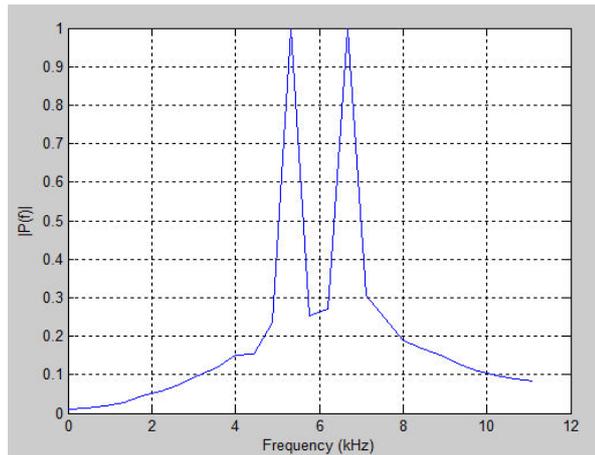


Рис. 5. СПМ анализируемого сигнала, полученного коррелограммным методом при  $T_N = 2$  мс

### Метод минимума дисперсии

Спектральная оценка методом минимума дисперсии (МД) была впервые введена Кейпоном при пространственно-временном анализе многомерных сигналов решеток сейсмических датчиков. Метод получения такой оценки характеризовался Кейпоном как метод спектрального анализа высокого разрешения [5]. Лакосс переформулировал метод пространственно-временного анализа Кейпона применительно к задачам спектрального анализа одномерных временных рядов [6]. На самом деле МД-оценка не является истинной функцией СПМ, поскольку площадь под графиком МД-оценки не характеризует полную мощность измеряемого процесса [7].

Спектральная МД-оценка определяется выражением  $P_L(f) = T / E^T(f) R^{-1} E^*(f)$ ,  $R^{-1}$  – матрица, обратная корреляционной матрице размером  $(N+1) \times (N+1)$ ,

$$E(f) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{j2\pi fT} \\ \dots \\ e^{j2\pi fTN} \end{pmatrix} - N\text{- мерный вектор комплексных отсчетов, где } f - \text{ частота в Гц, } T - \text{ интервал}$$

отсчетов.

Определим СПМ методом МД для входного сигнала  $y(t)$ . График СПМ сигнала, полученного методом МД при  $T_N = 2,5$  мс, представлен на рис. 6.

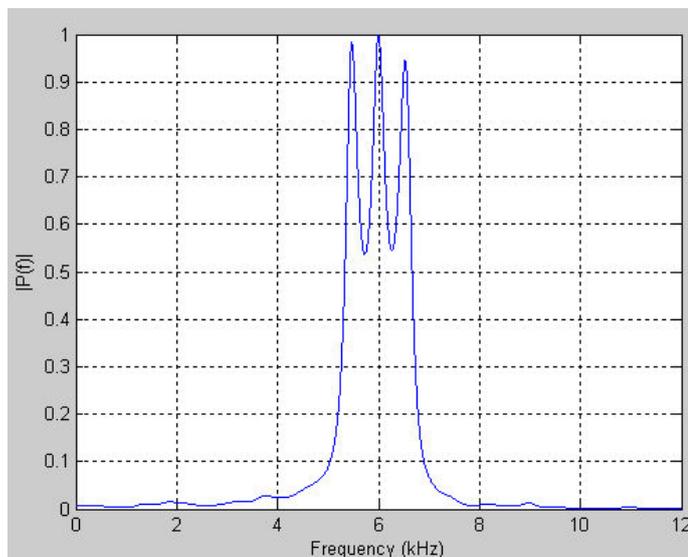


Рис. 6. СПМ анализируемого сигнала, полученного методом МД при  $T_N = 2,5$  мс

Влияние уменьшения времени анализа до  $T_N = 2$  мс на определение СПМ методом МД представлено на рис. 7.

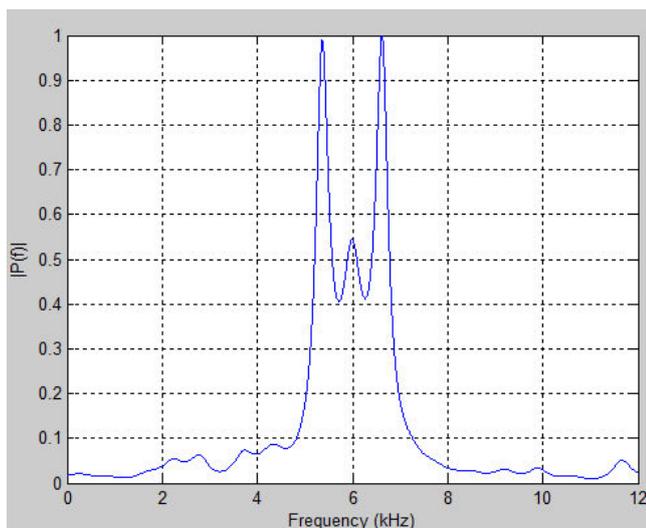


Рис. 7. СПМ анализируемого сигнала, полученного методом МД при  $T_N = 2$  мс

После уменьшения времени анализа оценка СПМ методом МД позволяет определить частоты анализируемого сигнала. Таким образом, анализ данного метода показал, что на практике оценивание СПМ с помощью метода МД обеспечивает более высокое разрешение, чем методы спектрального оценивания на основе классических методов [8]. Дальнейшие исследования особенностей получения СПМ методом МД позволили разработать новый комбинированный метод.

### Комбинированный метод

Рассмотрим функцию, которая дает оценку СПМ путем произведения корреляционной функции на вектор комплексных синусоид (алгоритм оценивания весового вектора):

$P_K(f) = E^T(f)R(E^T(f)R)^T$ . Данная оценка дает СПМ с ошибками (рис. 8).

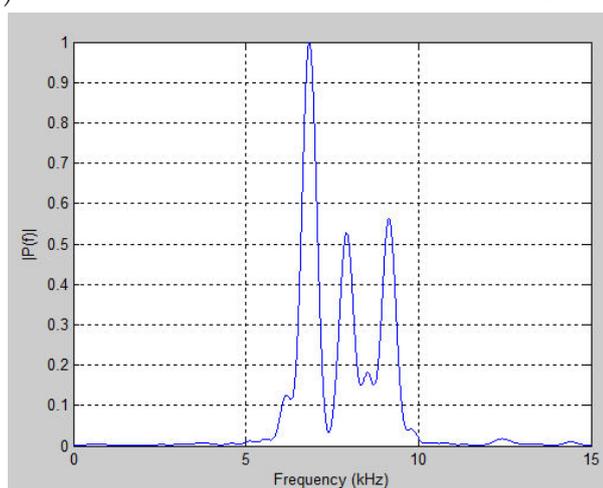


Рис. 8. Оценка СПМ анализируемого сигнала при  $T_N = 2,5$  мс

Предлагаемый комбинированный метод оценки СПМ определяется выражением

$$P_{KM}(f) = \frac{E^T(f)R(E^T(f)R)^T}{E^T(f)R^{-1}(E^T(f)R^{-1})^T}.$$

Комбинированный метод был разработан на основе отношения алгоритма весового вектора и свертки обратной корреляционной функции с вектором комплексных синусоид для

повышения разрешающей способности. Определим СПМ комбинированным методом для входного сигнала  $y(t)$ . График СПМ аналогового сигнала, полученного комбинированным методом при  $T_N = 2,5$  мс, представлен на рис. 9. Влияние уменьшения времени анализа до  $T_N = 2$  мс на определение СПМ комбинированным методом представлено на рис. 10.

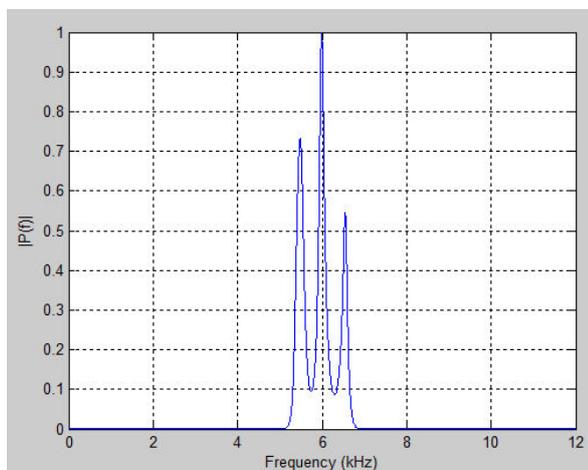


Рис. 9. СПМ анализируемого сигнала, полученного комбинированным методом при  $T_N = 2,5$  мс

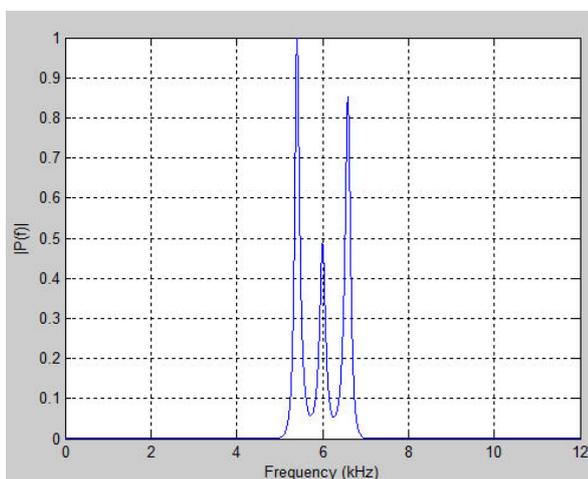


Рис. 10. СПМ анализируемого сигнала, полученного комбинированным методом при  $T_N = 2$  мс

После уменьшения времени анализа оценка СПМ комбинированным методом позволяет определить частоты анализируемого сигнала. Данный метод обеспечивает более высокое разрешение, чем МД-оценка. Для вычисления этой оценки комбинированным методом, так же как и методом МД, требуется знать только оценку автокорреляционной матрицы. Результаты оценки СПМ входного сигнала  $y(t)$  рассмотренными методами при  $T_N = 2,5$  мс, отношении сигнал/шум, равном 10 дБ, представлены на рис. 11 в логарифмическом масштабе. Ввиду рассмотрения не исходной функции, а некоторого произведения с оконной функцией (свертки спектра сигнала и окна), на графиках (рис. 11) становится очевидным эффект утечки. Явление утечки обусловлено наличием разрывов на концах временного ряда, являющихся следствием конечной длины записи. Ограничение длины ряда во временной области достигается при помощи прямоугольного окна, что ведет к появлению колебаний вида  $\sin(x)/x$  в спектральной области. Эти колебания определяют конечную ширину пика на частоте сигнала, порождают боковые лепестки, которые изменяют амплитуду и положение соседних спектральных пиков, а также маскируют присутствие слабых гармонических компонент. Результаты оценки уровня боковых лепестков показывают, что комбинированный метод имеет преимущества в сравнении с классическими методами и методом МД. Как видно из графиков, уровень боковых лепестков при использовании комбинированного метода минимальный, из чего следует, что данный метод будет в меньшей степени изменять амплитуды соседних спектральных пиков и приводить к смещению спектральных оценок.

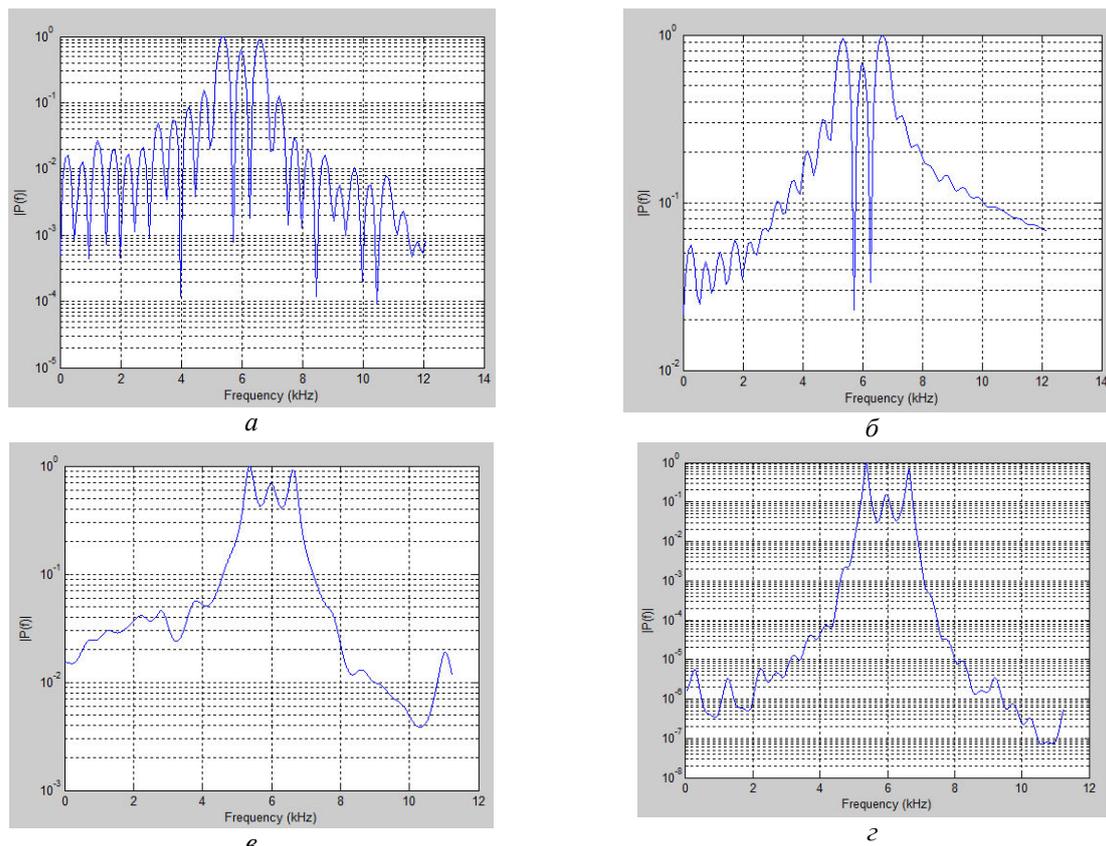


Рис. 11. Оценка спектральной плотности мощности в логарифмическом масштабе:  
*а* – периодограммным методом; *б* – коррелограммным методом;  
*в* – методом МД; *г* – комбинированным методом

### Заключение

Проведено сравнение классических методов, основанных на ДПФ, метода МД и разработанного комбинированного метода. В классических методах используется алгоритм БПФ, в связи с чем они являются наиболее вычислительно эффективными по сравнению с методом МД и комбинированным методом. Основной недостаток классических методов спектрального оценивания заключается в искажающем воздействии просачивания по боковым лепесткам из-за взвешивания в них конечных последовательностей данных. Данные искажения практически отсутствуют в комбинированном методе и методе МД. Результаты сравнения рассмотренных методов показывают, что оценка спектральной плотности мощности методом МД и комбинированным методом дает значительно лучшее разрешение при уменьшении времени анализа, чем классические методы. Также комбинированный метод при малом отношении сигнал/шум имеет более низкий уровень боковых лепестков, чем метод МД и классические методы, что видно из графиков, приведенных в логарифмическом масштабе (рис. 11). Хотя разработанный метод и имеет недостаток, связанный с вычислительными затратами, он легко устраним с помощью современной элементной базы, путем использования высокопроизводительных устройств обработки сигналов.

### Список литературы

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 758 с.
2. Кривошеев В.И. Современные методы цифровой обработки сигналов (цифровой спектральный анализ). Нижний Новгород, 2006. 117 с.
3. Большаков А.А., Каримов Р.Н. Методы обработки многомерных данных и временных рядов. М.: Стереотип, 2015. 522 с.
4. Шахтарин Б.И., Ковригин В.А. Методы спектрального оценивания случайных процессов. М.: Гелиос АРВ, 2005. 248 с.

5. Кейпон Дж. Пространственно-временной спектральный анализ с высоким разрешением // ТИИЭР. 1969. Т. 57, № 8. С. 69–79.
6. Lacoss R.T. Data Adaptive Spectral Analysis Methods. Geophysics. 1971. Vol. 36. P. 661–675.
7. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: «Мир», 1990. 265 с.
8. Какора В.А., Гринкевич А.В. Сравнительный анализ разрешающей способности алгоритмов спектрального оценивания // Докл. БГУИР. 2017. № 3 (105). С. 20–24.

### References

1. Sergienko A.B. Cifrovaja obrabotka signalov. SPb.: BHV-Peterburg, 2011. 758 s. (in Russ.)
2. Krivosheev V.I. Sovremennye metody cifrovoj obrabotki signalov (cifrovoj spektral'nyj analiz). Nizhniy Novgorod, 2006. 117 s. (in Russ.)
3. Bol'shakov A.A., Karimov R.N. Metody obrabotki mnogomernyh dannyh i vremennyh rjadov. M.: Stereotip, 2015. 522 s. (in Russ.)
4. Shahtarin B.I., Kovrigin V.A. Metody spektral'nogo ocenivaniya sluchajnyh processov. M.: Gelios ARV, 2005. 248 s. (in Russ.)
5. Kejpon Dzh. Prostranstvenno-vremennoj spektral'nyj analiz s vysokim razresheniem // TIIEP. 1969. Т. 57, № 8. С. 69–79. (in Russ.)
6. Lacoss R.T. Data Adaptive Spectral Analysis Methods. Geophysics. 1971. Vol. 36. P. 661–675.
7. Marpl S.L. Cifrovoj spektral'nyj analiz i ego prilozheniya. M.: «Mir», 1990. 265 s. (in Russ.)
8. Kakora V.A., Grinkevich A.V. Sravnitel'nyj analiz razreshajushhej sposobnosti algoritmov spektral'nogo ocenivaniya // Dokl. BGUIR. 2017. № 3 (105). С. 20–24. (in Russ.)

#### Сведения об авторах

Какора В.А., инженер-конструктор УП «Тетраэдр».

Гринкевич А.В., к.т.н., доцент кафедры информационных радиотехнологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

#### Information about the authors

Kakora V.A., design engineer UE «Tetraedr».

Grinkevich A.V., PhD, associate professor of information radio-technologies department of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.

#### Адрес для корреспонденции

220019, Республика Беларусь,  
г. Минск, ул. Сухаревская, 60  
УП «Тетраэдр»  
тел.: +375(33) 660-43-80;  
e-mail: varon\_bmx@mail.ru  
Какора Виктор Александрович

#### Address for correspondence

220019, Republic of Belarus, Minsk,  
Sukharevsky st., 60  
UE «Tetraedr»  
tel.: +375-33-660-43-80;  
e-mail: varon\_bmx@mail.ru  
Kakora Victor Aleksandrovich