УДК 514.765.1

КАНОНИЧЕСКИЕ СВЯЗНОСТИ НА ТРЕХМЕРНЫХ РЕДУКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ

Н. П. Можей

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Поступила в редакцию 21.11.2016 г.

Аннотация. В работе описаны инвариантные аффинные связности вместе с их тензорами кривизны и кручения, выписаны канонические связности, а также естественные связности без кручения на трехмерных редуктивных однородных пространствах, допускающих нормальную связность. Рассматриваются пространства, на которых действует разрешимая группа Ли. Также исследованы алгебры голономии однородных пространств и найдено, когда связность нормальна. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, главным образом, локальный характер. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на редуктивных пространствах.

Ключевые слова: каноническая связность, группа преобразований, редуктивное пространство, алгебра голономии.

CANONICAL CONNECTIONS ON THREE-DIMENSIONAL REDUCTIVE SPACES SOLVABLE LIE GROUPS

N. P. Mozhey

Abstract. In this paper we describe all invariant affine connections together with their curvature and torsion tensors, canonical connections and natural torsion-free connections on three-dimensional reductive homogeneous spaces, admits a normal connection. We concerned the case, when Lie group of transformations is solvable. We study the holonomy algebras of homogeneous spaces and find when the connection is normal. Studies are based on the use of properties of the Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces and they mainly have local character. The results can be used in the study of manifolds, and can have applications in various fields of mathematics and physics, as many fundamental problems in these areas relate to the study of invariant objects on reductive spaces.

Keywords: canonical connection, transformation group, reductive space, holonomy algebra.

ВВЕДЕНИЕ

В работе изучаются редуктивные пространства, обобщающие римановы глобально симметрические пространства, и связности на них. Рассматриваются пространства с разрешимой группой преобразований, их исследование существенно затруднено тем, что, в отличие от полупростых групп, не разработана теория их классификации, а сама классификация является громоздкой и трудоемкой. Инвариантные связности на редуктивных однородных пространствах изучались П. К. Рашевским, М. Куритой, Э. Б. Винбергом, Ш. Кобаяси, К. Номидзу [1] и др. В [1] также можно ознакомиться с понятиями канонической связности и естественной связности без кручения. Понятие же нормальной связности ввел Э. Картан для риманова многообразия (см. [2]). Многообразия с плоской нормальной связностью исследовали Д. И. Перепелкин, Ф. Фабрициус-Бьерре, итоги этих исследований приведены в работе Б. Чена [3].

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть M — дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $(M, \bar{G})$ — однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ — стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, где $G \subset \bar{G}$, так как M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$ (см., например, [4, с. 89–91]). Изучая однородные пространства, важно рассматривать не саму группу $\bar{G}$, а ее образ в $Diff(M)$, т. е. достаточно рассматривать только эффективные действия группы $\bar{G}$ на многообразии M. Пусть $\bar{g}$ — алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а g — подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{g}, g)$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра g не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{g}$. *Изотропное действие* группы G на касательном пространстве T_xM — это фактордействие присоединенного действия G на $\bar{g}$: $s.(x + g) = (Ads)(x) + g$ для всех $s \in G, x \in \bar{g}$. При этом алгебра g действует на $T_xM = \bar{g}/g$ следующим образом:

$$x.(y + g) = [x, y] + g \quad \text{для всех} \quad x \in g, y \in \bar{g}.$$

Пара $(\bar{g}, g)$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление g. Это означает, что естественное действие стабилизатора $\bar{G}_x$, $x \in M$ на T_xM имеет нулевое ядро. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [1, т. 2, с. 177-179].

Пусть на $M = \bar{G}/G$ связная группа $\bar{G}$ действует транзитивно и эффективно. Пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{g}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств — алгебры Ли g и $\mathrm{ad}(G)$-инвариантного подпространства m, т. е. если $\bar{g} = g + m$, $g \cap m = 0$, $\mathrm{ad}(G)m \subset m$. Если G связна, то последнее условие влечет $[g, m] \subset m$ (и наоборот). Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к g в $\bar{g}$, и факторпространство $m = \bar{g}/g$. *Аффинной связностью* на паре $(\bar{g}, g)$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{g} \to gl(m)$, что его ограничение на g — изотропное представление подалгебры, а все отображение является g-инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии (см., например, [5]) с аффинными связностями на паре $(\bar{g}, g)$. Если M редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность, а линейное представление изотропии для G всегда точное. Инвариантная связность, определяемая равенством $\Lambda\,|_m = 0$, называется *канонической связностью* (относительно разложения $\bar{g} = g + m$), ее также называют *канонической связностью второго рода.* Для канонической связности каждая геодезическая, выходящая из o, имеет вид $f_t(o)$, где $f_t = \exp(tx)$, $x \in m$. Каждое редуктивное однородное пространство допускает единственную инвариантную аффинную связность без кручения, имеющую те же геодезические, что и каноническая связность: $\Lambda_m(x)y = 1/2[x, y]_m$, $x, y \in m$. Такая связность называется *естественной связностью без кручения* (относительно разложения $\bar{g} = g + m$), ее еще называют *канонической связностью первого рода.*

Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензор кручения $T \in InvT^1_2(m)$ и тензор кривизны $R \in InvT^1_3(m)$ имеют вид

$$T(x_m, y_m) = \Lambda(x)y_m - \Lambda(y)x_m - [x, y]_m\,, \quad R(x_m, y_m) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех $x, y \in \bar{g}$.

Переформулируем теорему Вана об алгебре группы голономии инвариантной связности: алгебра Ли группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \bar{g} \to gl(3,R)$ на паре $(\bar{g}, g)$ — это подалгебра алгебры Ли $gl(3,R)$ вида $V + [\Lambda(\bar{g}), V] + [\Lambda(\bar{g}), [\Lambda(\bar{g}), V]] + \dots$, где V — подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x,y]) | x, y \in \bar{g}\}$. Положим a равной подалгебре в $gl(3,R)$, порожденной $\{\Lambda(x) | x \in \bar{g}\}$. Первоначально алгебра a была введена в римановом случае Б. Костантом и использовалась А. Лихнеровичем и Г. Ваном в более общей ситуации. Если h^* — алгебра Ли группы голономии, то $h^* \subset a \subset N(h^*)$, где $N(h^*)$ — нормализатор h^* в $gl(3,R)$. Будем говорить, что связность *нормальна*, если $h^* = a$.

КЛАССИФИКАЦИЯ РЕДУКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ

Будем описывать пару $(\bar{g}, g)$ при помощи таблицы умножения $\bar{g}$. Через $\{e_1, ..., e_n\}$ обозначим базис $\bar{g}$ $(n = \dim \bar{g})$. Будем полагать, что g порождается $e_1, ..., e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ — базис m. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, для нумерации пар — $d.n.m$ (соответствующие приве-денным в [6, с. 31-42]), здесь d — размерность подалгебры, n — номер подалгебры в $gl(3,R)$, а m — номер пары $(\bar{g}, g)$. Будем описывать связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R — через $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$, а кручения T — через $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$.

Теорема. Все трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие нормальную связность, такие, что $\bar{g}$ и g разрешимы, а $\dim g > 1$, локально имеют следующий вид:

2.9.1.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-2e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0

,

2.20.18, $\alpha = 0$.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	0
e_2	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	u_1
u_2	$-u_1$	0	0	0	u_2
u_3	0	$-u_1$	$-u_1$	$-u_2$	0

,

2.9.4, $\mu = 0, -1$.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-\mu)e_2$	u_1	0	μu_3
e_2	$(\mu-1)e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	u_1	0
u_2	0	0	$-u_1$	0	$-u_3$
u_3	$-\mu u_3$	$-u_1$	0	u_3	0

,

2.9.5, 2.9.6.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	$\pm e_2$
u_2	0	0	0	0	αu_2
u_3	0	$-u_1$	μe_2	$-\alpha u_2$	0

,

$\alpha \geqslant 0$,

2.9.7.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	u_2
u_3	0	$-u_1$	0	$-u_2$	0

,

2.17.2, 2.17.3.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	0	u_1
e_2	0	0	0	0	u_2
u_1	0	0	0	0	$\pm e_1$
u_2	0	0	0	0	αe_2
u_3	$-u_1$	$-u_2$	μe_1	$-\alpha e_2$	0

,

$$\begin{array}{c|ccccc}
2.21.1. & e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\
\hline
e_1 & 0 & e_2 & u_1 & 0 & -u_3 \\
e_2 & -e_2 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\
u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
u_2 & 0 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\
u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0
\end{array},$$

2.9.2 совпадает с 2.9.1, за исключением $[u_1, u_3] = u_2$,

Пара	*Совпадает с 2.17.2, за исключением*
2.17.4	$[u_1, u_3] = \alpha e_1 - e_2, [u_2, u_3] = e_1 + \alpha e_2, \alpha \geqslant 0$
2.17.6, 2.17.7	$[u_1, u_3] = \pm e_1, [u_2, u_3] = e_1 + e_2$
2.17.8	$[u_1, u_3] = \delta e_1 + u_1, [u_2, u_3] = \beta e_2 + \alpha u_2, -1 < \alpha < 1$
2.17.9	$[u_1, u_3] = \delta e_1 + e_2 + u_1, [u_2, u_3] = \gamma e_1 + \beta e_2 + \alpha u_1, -1 < \alpha < 1$
2.17.10	$[u_1, u_3] = \delta e_1 + u_1, [u_2, u_3] = e_1 + \beta e_2 + \alpha u_2, -1 < \alpha < 1$
2.17.13, 2.17.14	$[u_1, u_3] = \alpha e_1 - e_2, [u_2, u_3] = \alpha e_2 + u_1$
2.17.15	$[u_1, u_3] = \alpha e_1, [u_2, u_3] = e_1 + \alpha e_2 + u_1$
2.17.17	$[u_1, u_3] = e_2, [u_2, u_3] = \alpha e_1 + \beta e_2 + u_1$
2.17.18	$[u_1, u_3] = \gamma e_2 + u_1, [u_2, u_3] = \alpha e_1 + \beta e_2 + u_1 + u_2$
2.17.19	$[u_1, u_3] = \alpha e_1 + u_1, [u_2, u_3] = \beta e_2 + u_1 + u_2$
2.17.20	$[u_1, u_3] = \alpha e_1 + u_1, [u_2, u_3] = \beta e_1 + \alpha e_2 + u_1 + u_2$
2.17.21	$[u_1, u_3] = \alpha e_1 + u_1, [u_2, u_3] = e_1 + \alpha e_2 + u_2$
2.17.22	$[u_1, u_3] = \alpha e_1 - \beta e_2 + u_1, [u_2, u_3] = \beta e_1 + \alpha e_2 + u_2, \beta > 0$
2.17.23	$[u_1, u_3] = \alpha e_1 + u_1, [u_2, u_3] = \beta e_2 + u_2, \lvert\alpha\rvert \leqslant \lvert\beta\rvert$
2.17.24	$[u_1, u_3] = \delta e_1 + \gamma e_2 + \alpha u_1 - u_2, [u_2, u_3] = \beta e_1 + \delta e_2 + u_1 + \alpha u_2, \lvert\beta\rvert \leqslant \lvert\gamma\rvert$
2.17.25	$[u_1, u_3] = \alpha e_1 + u_1, [u_2, u_3] = \beta e_2 - u_2, \lvert\alpha\rvert \leqslant \lvert\beta\rvert$
2.17.26	$[u_1, u_3] = \alpha e_1 + \beta e_2 + u_1, [u_2, u_3] = e_1 + \gamma e_2 - u_2, -1 \leqslant \beta \leqslant 1$

Таким образом, у всех однородных пространств указанного вида алгебра $\bar{g}$ имеет размерность пять.

Следствие. Трехмерных редуктивных однородных пространств, допускающих нормальную связность, таких, что $\bar{g}$ и g разрешимы, а $\dim \bar{g} > 5$ (соответственно, $\dim g > 2$), не существует.

Для получения этого результата из изотропно-точных пар выбираем редуктивные, т.е. для которых существует разложение $\bar{g} = g + m$, $[g, m] \subset m$. В теореме выписаны именно такие пары, причем с каноническим разложением.

Действительно, пусть g — подалгебра алгебры Ли $gl(3, R)$ такая, что пара $(\bar{g}, g)$ допускает нормальную связность, $\bar{g}$ и g разрешимы, а $\dim g > 1$. Тогда g сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр [7]:

$$2.9 \ \boxed{\begin{matrix} x & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu x \end{matrix}},\ \mu = 0, -1,\ 2.17 \ \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}},\ 2.20 \ \boxed{\begin{matrix} 0 & y & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}},\ 2.21 \ \boxed{\begin{matrix} x & y & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & -x \end{matrix}}$$

для всех $x, y \in R$. По умолчанию данное обозначение предполагает, что базис подалгебры g в $gl(3, R)$ выбирается следующим образом: e_1 получаем при $x = 1$, $y = 0$, а e_2 при $x = 0$, $y = 1$, тогда $g = \{xe_1 + ye_2 | x, y \in R\}$.

Для каждой такой подалгебры найдем изотропно-точные пары. Рассмотрим, например, пару типа 2.9. Пусть $E = \{e_1, e_2\}$ — базис g, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Через h обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли g, порожденную вектором e_1. Тогда имеем:

$$\begin{array}{ll} g^{(0)}(h) \supset \mathbb{R}\, e_1, & U^{(1)}(h) \supset \mathbb{R}\, u_1, \\ g^{(1-\mu)}(h) \supset \mathbb{R}\, e_2, & U^{(\lambda)}(h) \supset \mathbb{R}\, u_2, \\ & U^{(\mu)}(h) \supset \mathbb{R}\, u_3. \end{array}$$

Положим

$$\begin{aligned} [u_1, u_2] &= a_1e_1 + a_2e_2 + \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_3, \\ [u_1, u_3] &= b_1e_1 + b_2e_2 + \beta_1u_1 + \beta_2u_2 + \beta_3u_3, \\ [u_2, u_3] &= c_1e_1 + c_2e_2 + \gamma_1u_1 + \gamma_2u_2 + \gamma_3u_3. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие случаи:

1°. $\mu \notin \{0, \frac{1}{2}, 2\}, \lambda \neq \pm(1-\mu)$. Тогда

$$\begin{array}{ll} [e_1, e_2] = (1-\mu)e_2, & \\ [e_1, u_1] = u_1, & [e_2, u_1] = 0, \\ [e_1, u_2] = \lambda u_2, & [e_2, u_2] = 0, \\ [e_1, u_3] = \mu u_3, & [e_2, u_3] = u_1. \end{array}$$

Проверим тождество Якоби для троек (e_i, u_j, u_k), $i = 1, 2$, $1 \leqslant j < k \leqslant 3$, и (u_1, u_2, u_3):

$$\mathbf{1}. [e_1, [u_1, u_2]] + [u_1, [u_2, e_1]] + [u_2, [e_1, u_1]] = 0,$$

$$(1-\mu)a_2e_2 + \alpha_1u_1 + \lambda\alpha_2u_2 + \mu\alpha_3u_3 - (\lambda+1)[u_1, u_2] = 0,$$

$$1.\, (\lambda+1)a_1 = 0, \quad 2.\, (\mu+\lambda)a_2 = 0, \quad 3.\, \lambda\alpha_1 = 0, \quad 4.\, \alpha_2 = 0, \quad 5.\, \alpha_3 = 0.$$

$$\mathbf{2}. [e_2, [u_1, u_2]] + [u_1, [u_2, e_2]] + [u_2, [e_2, u_1]] = 0,$$

$$(\mu-1)a_1e_2 = 0, \quad 6.\, (\mu-1)a_1 = 0.$$

$$\mathbf{3}. [e_1, [u_1, u_3]] + [u_1, [u_3, e_1]] + [u_3, [e_1, u_1]] = 0,$$

$$(1-\mu)b_2e_2 + \beta_1u_1 + \lambda\beta_2u_2 + \mu\beta_3u_3 - (\mu+1)[u_1, u_3] = 0,$$

$$7.\, (\mu+1)b_1 = 0, \quad 8.\, b_2 = 0, \quad 9.\, \beta_1 = 0, \quad 10.\, (\lambda-\mu-1)\beta_2 = 0, \quad 11.\, \beta_3 = 0.$$

$$\mathbf{4}. [e_2, [u_1, u_3]] + [u_1, [u_3, e_2]] + [u_3, [e_2, u_1]] = 0,$$

$$(\mu-1)b_1e_2 = 0, \quad 12.\, b_1 = 0.$$

$$\mathbf{5}. [e_1, [u_2, u_3]] + [u_2, [u_3, e_1]] + [u_3, [e_1, u_2]] = 0,$$

$$(1-\mu)c_2e_2 + \gamma_1u_1 + \lambda\gamma_2u_2 + \mu\gamma_3u_3 - (\lambda+\mu)[u_2, u_3] = 0,$$

$$13.\, (\lambda+\mu)c_1 = 0, \quad 14.\, (1-\lambda-2\mu)c_2 = 0, \quad 15.\, \gamma_1 = 0, \quad 16.\, \gamma_2 = 0, \quad 17.\, \lambda\gamma_3 = 0.$$

$$\mathbf{6}. [e_2, [u_2, u_3]] + [u_2, [u_3, e_2]] + [u_3, [e_2, u_2]] = 0,$$

$$(\mu-1)c_1e_2 + \gamma_3u_1 + a_2e_2 + a_1e_1 + \alpha_1u_1 = 0,$$

$$18.\, a_1 = 0, \quad 19.\, a_2 + (\mu-1)c_1 = 0, \quad 20.\, \gamma_3 + \alpha_1 = 0.$$

$$\mathbf{7}. [u_1, [u_2, u_3]] + [u_2, [u_3, u_1]] + [u_3, [u_1, u_2]] = 0,$$

$$-c_1e_1 + \gamma_3\beta_2u_2 - a_2u_1 - \alpha_1\beta_2u_2 = 0, \quad 21.\, c_1 + a_2 = 0, \quad 22.\, \beta_2(\gamma_3 - \alpha_1) = 0.$$

Окончательно имеем:

$$\begin{array}{cccc} \underline{\lambda = 0} & \underline{\lambda = \mu+1} & \underline{\lambda = 1-2\mu} & \begin{array}{c}\lambda \neq \mu+1 \\ \underline{\lambda \neq 1-2\mu}\end{array} \\ [u_1, u_2] = \alpha_1u_1, & [u_1, u_2] = 0, & [u_1, u_2] = 0, & [u_1, u_2] = 0, \\ [u_1, u_3] = 0, & [u_1, u_3] = \beta_2u_2, & [u_1, u_3] = 0, & [u_1, u_3] = 0, \\ [u_2, u_3] = -\alpha_1u_3, & [u_2, u_3] = 0, & [u_2, u_3] = c_2e_2, & [u_2, u_3] = 0. \end{array}$$

$1.1^\circ.\lambda = 0.$

$1.1.1^\circ$. $\alpha_1 = 0$. Тогда пара эквивалентна тривиальной паре 2.9.1, где 1 (во введенной ранее нумерации) — номер пары $(\bar{g}, g)$, поэтому ее также можно обозначить $(\bar{g}_1, g_1)$.

$1.1.2^\circ$. $\alpha_1 \neq 0$. Если $\mu \neq 1$, то пара $(\bar{g}, g)$ эквивалентна 2.9.4, где 4 — номер пары (соответственно, будем обозначать ее $(\bar{g}_4, g_4)$), посредством отображения $\pi : \bar{g}_4 \to \bar{g}$, где

$$\begin{gathered}\pi(e_i) = e_i, i = 1, 2, \quad \pi(u_1) = u_1,\\ \pi(u_2) = \alpha_1 u_2, \qquad \pi(u_3) = u_3,\end{gathered}$$

а в случае $\mu = 1$ пара $(\bar{g}, g)$ эквивалентна тривиальной паре при помощи отображения $\pi_{\mu=1} : \bar{g}_1 \to \bar{g}$, где

$$\begin{gathered}\pi_{\mu=1}(e_i) = e_i, i = 1, 2, \quad \pi_{\mu=1}(u_1) = u_1,\\ \pi_{\mu=1}(u_2) = u_2 - \alpha_1 e_1, \quad \pi_{\mu=1}(u_3) = u_3.\end{gathered}$$

$1.2^\circ.\lambda = 1 + \mu.$

$1.2.1^\circ$. $\beta_2 = 0$. Тогда пара $(\bar{g}, g)$ тривиальна.

$1.2.2^\circ$. $\beta_2 \neq 0$. Тогда пара $(\bar{g}, g)$ эквивалентна паре 2.9.2 (вида $(\bar{g}_2, g_2)$) при помощи отображения $\pi : \bar{g}_2 \to \bar{g}$, где

$$\begin{gathered}\pi(e_1) = e_1, \quad \pi(e_2) = \beta_2 e_2, \quad \pi(u_1) = \beta_2 u_1,\\ \pi(u_2) = u_2, \quad \pi(u_3) = u_3.\end{gathered}$$

1.3°. $\lambda \neq 1 + \mu, \lambda \neq 1 - 2\mu$. Тогда пара $(\bar{g}, g)$ тривиальна. Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Пусть n_i — максимальный нильпотентный идеал алгебры Ли $\bar{g}_i$. Заметим, что $\dim n_1 = 4$ и $C^3 n_1 = \{0\}$, $\dim n_2 = 4$ и $C^3 n_2 \neq \{0\}$, $\dim n_i = 3$ для $i = 4, \ldots, 7$. Отсюда следует, что пары $(\bar{g}_i, g_i)$ для $i = 4, \ldots, 7$ не эквивалентны тривиальной паре $(\bar{g}_1, g_1)$ и паре $(\bar{g}_2, g_2)$, а пары $(\bar{g}_1, g_1)$ и $(\bar{g}_2, g_2)$ не эквивалентны между собой. Пары 2.9.4 — 2.9.7 также не эквивалентны друг другу. Таким образом, любая пара $(\bar{g}, g)$ типа 2.9 при λ=0, μ=0, -1 эквивалентна одной и только одной из пар 2.9.1, 2.9.2, 2.9.4 — 2.9.7. Другие случаи рассматриваются аналогично.

ОПИСАНИЕ СВЯЗНОСТЕЙ

Для найденных пар выписываем аффинные связности, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, находим канонические связности, а также естественные связности без кручения.

Ограничение отображения Λ на g есть изотропное представление подалгебры. Пусть здесь и далее

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix}, \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

для некоторых $p_{i,j}$, $q_{i,j}$, $r_{i,j} \in \mathrm{R}$ (при $i, j = \overline{1,3}$).

Рассмотрим, например, пару 2.9.1 при $\lambda = 0$, $\mu = -1$. Тогда прямыми вычислениями получаем, что аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}q_{2,2} - q_{1,1}p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}q_{1,1}-q_{2,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2}-p_{1,2}q_{2,2} & 0 \end{pmatrix},$$

а тензор кручения — $(p_{1,2}-q_{1,1},0,0)\,,(0,2p_{2,3},0)\,,(0,0,q_{1,1}-p_{1,2})\,,$ связность является нормальной при $p_{1,2}\neq 0$, $p_{2,3}\neq 0$, $q_{2,2}=-2q_{1,1}$, тогда алгебра голономии — $sl(3,\mathbb{R})$.

У пары 2.9.2 ($\mu=-1$) связность совпадает с выписанной для 2.9.1, тензор кривизны —

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}q_{2,2}-q_{1,1}p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1}-q_{2,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3}-q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3}-q_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3}-q_{1,1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}q_{1,1}-q_{2,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2}-p_{1,2}q_{2,2} & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения — $(p_{1,2}-q_{1,1},0,0)\,,(0,2p_{2,3}-1,0)\,,(0,0,q_{1,1}-p_{1,2})\,.$ Связность является нормальной при $p_{1,2}\neq 0$, $p_{2,3}\neq 0$, $2q_{1,1}+q_{2,2}\neq 0$, тогда алгебра голономии — $gl(3,\mathbb{R})$, либо при $p_{1,2}\neq 0$, $p_{2,3}\neq 0$, $2q_{1,1}+q_{2,2}=0$, тогда алгебра голономии — $sl(3,\mathbb{R})$.

Рассмотрим пару 2.9.4 при $\mu=-1$, связность совпадает с 2.9.1. Тензор кривизны —

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}q_{2,2}-q_{1,1}p_{1,2}-p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1}-q_{2,2}p_{2,3}-p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}q_{1,1}-q_{2,2}p_{2,3}-p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2}-p_{1,2}q_{2,2}+p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения — $(p_{1,2}-q_{1,1}-1,0,0)\,,(0,2p_{2,3},0)\,,(0,0,q_{1,1}-p_{1,2}+1)\,.$ Связность является нормальной при $p_{1,2}\neq 0$, $p_{2,3}\neq 0$, $2q_{1,1}+q_{2,2}=0$, тогда алгебра голономии — $sl(3,\mathbb{R})$.

2.21.1. При $\lambda=0$ аффинная связность и тензор кривизны соответственно:

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2}^2 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения — $(2p_{1,2},0,0)\,,(0,2p_{1,2},0)\,,(0,0,2p_{1,2})\,,$ связность нормальна при $p_{1,2}\neq 0$, тогда алгебра голономии

$$\begin{pmatrix} p_3 & p_1 & 0 \\ p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & p_2 & -p_3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим пару 2.17.2. Связность —

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & r_{1,3} \\ -p_{2,3} & r_{1,1}+p_{1,3}-q_{2,3} & r_{2,3} \\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix},$$

связность нормальна при $a \neq 0$, $p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$, алгебра голономии

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

У перечисленных ниже пар связность такая же, как в случае 2.17.2.

Пара	Аффинная связность нормальна при
2.17.3	$a \neq 0, \quad p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.4	$p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.6	$p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.7	$p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.8	$b \neq 0, \quad \delta \neq 0, \quad p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.9	$b\delta \neq \gamma, \quad p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.10	$b\delta \neq 0, \quad p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.13	$a \neq 0, \quad p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.14	$a \neq 0, \quad p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.15	$a \neq 0, \quad p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0,$
2.17.17	$a \neq 0, \quad p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.18	$a\delta \neq 0, \quad p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.19	$ab \neq 0, \quad p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.20	$a \neq 0, \quad p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.21	$a \neq 0, \quad p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.22	$a^2 + b^2 \neq 0$(всегда, т.к. $b > 0$), $p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.23	$ab \neq 0, \quad p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.24	$\delta^2 \neq bc, \quad p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.25	$ab \neq 0, \quad p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.26	$b \neq ac, \quad p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$

Аналогично, у указанных пар алгебра голономии такая же, как и в случае 2.17.2. Аффинные связности на остальных пространствах имеют вид:

Пара	Аффинная связность
2.20.18 при $\alpha = 0$	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ 0 & q_{11}+p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & q_{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{11} & 0 \\ 0 & p_{12} & r_{11}+p_{13} \end{pmatrix}$
2.9.5, 2.9.6, 2.9.7	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & q_{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & p_{12} & r_{11}+p_{13} \end{pmatrix}$

Тензоры кривизны и кручения на редуктивных пространствах:

Пара	Тензор кривизны
2.20.18 при $\alpha = 0$	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12}^2 & p_{12}p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{12}p_{13}-p_{12} & p_{13}^2-p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} -q_{11} & q_{13}p_{12}-r_{12}p_{12}-q_{12} & q_{13}p_{13}-r_{12}p_{13}-q_{13} \\ 0 & p_{12}p_{13}-q_{11}-p_{12} & p_{13}^2-p_{13} \\ 0 & -p_{12}^2 & -p_{12}p_{13}-q_{11} \end{pmatrix}$

2.9.5	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12}q_{22}-q_{11}p_{12} & p_{12}q_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & p_{12}r_{22}+p_{13}p_{12}-r_{11}p_{12} & p_{12}r_{23}+p_{13}^2-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -aq_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{12}q_{23}-aq_{22} & q_{22}r_{23}+q_{23}r_{11}+q_{23}p_{13}-r_{22}q_{23}-r_{23}q_{11}-aq_{23} \\ 0 & q_{11}p_{12}-p_{12}q_{22} & -p_{12}q_{23}-aq_{11} \end{pmatrix}$
2.9.6	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12}q_{22}-q_{11}p_{12} & p_{12}q_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & p_{12}r_{22}+p_{13}p_{12}-r_{11}p_{12} & p_{12}r_{23}+p_{13}^2+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -aq_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{12}q_{23}-aq_{22} & q_{22}r_{23}+q_{23}r_{11}+q_{23}p_{13}-r_{22}q_{23}-r_{23}q_{11}-aq_{23} \\ 0 & q_{11}p_{12}-p_{12}q_{22} & -p_{12}q_{23}-aq_{11} \end{pmatrix}$
2.9.7	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12}q_{22}-q_{11}p_{12} & p_{12}q_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & p_{12}r_{22}+p_{13}p_{12}-r_{11}p_{12} & p_{12}r_{23}+p_{13}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{12}q_{23}-q_{22} & q_{22}r_{23}+q_{23}r_{11}+q_{23}p_{13}-r_{22}q_{23}-r_{23}q_{11}-q_{23} \\ 0 & q_{11}p_{12}-p_{12}q_{22} & -p_{12}q_{23}-q_{11} \end{pmatrix}$
Пара	Тензор кручения
2.20.18 при $\alpha=0$	$(p_{12}-q_{11},0,0),(p_{13}-r_{11}-1,0,0),(q_{13}-r_{12},p_{13}-r_{11}-1,q_{11}-p_{12})$
2.9.5, 2.9.6	$(p_{12}-q_{11},0,0),(p_{13}-r_{11},0,0),(0,q_{23}-r_{22}-a,q_{11}-p_{12})$
2.9.7	$(p_{12}-q_{11},0,0),(p_{13}-r_{11},0,0),(0,q_{23}-r_{22}-1,q_{11}-p_{12})$

Связность является канонической, если $\Lambda(u_1)=\Lambda(u_2)=\Lambda(u_3)=0$. Выпишем, при каких условиях связность имеет те же геодезические, что и каноническая, а также, когда связность является естественной связностью без кручения:

	Связность имеет те же геодезические, что и каноническая	Естественная связность без кручения
2.9.1	$q_{11}=-p_{12},q_{22}=0$	$p_{12}=0,p_{23}=0,q_{11}=0,q_{22}=0$
2.9.2	$q_{11}=-p_{12},q_{22}=0$	$p_{12}=0,p_{23}=1/2,q_{11}=0,q_{22}=0$
2.9.4 при $\mu=0$	$q_{11}=-p_{12},q_{22}=0,$ $r_{22}=-q_{23},r_{11}=-p_{13},r_{23}=0$	$p_{13}=r_{23}=q_{22}=q_{23}=r_{11}=r_{22}=0,$ $p_{12}=1/2,q_{11}=-1/2$
2.9.4 при $\mu=-1$	$q_{11}=-p_{12},q_{22}=0$	$p_{12}=1/2,p_{23}=0,q_{11}=-1/2,q_{22}=0$

2.9.5, 2.9.6	$q_{11} = -p_{12}, r_{11} = -p_{13}$, $r_{22} = -q_{23}, q_{22} = r_{23} = 0$	$p_{12} = p_{13} = q_{11} = q_{22} = 0, q_{23} = a/2$, $r_{11} = 0, r_{22} = -a/2, r_{23} = 0$
2.9.7	$q_{11} = -p_{12}, r_{11} = -p_{13}$, $r_{22} = -q_{23}, q_{22} = r_{23} = 0$	$p_{12} = p_{13} = q_{11} = q_{22} = 0, q_{23} = 1/2$, $r_{11} = 0, r_{22} = -1/2, r_{23} = 0$
2.17.2–2.17.4	$r_{11} = -p_{13}, r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = p_{23} = q_{13} = q_{23} = r_{11} = r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.6, 2.17.7	$r_{11} = -p_{13}, r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = p_{23} = q_{13} = q_{23} = r_{11} = r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.8, 2.17.10	$r_{11} = -p_{13}, r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = 1/2, p_{23} = q_{13} = 0, q_{23} = a/2$, $r_{11} = -1/2, r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.9	$r_{11} = -p_{13}, r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = 1/2, p_{23} = 0, q_{13} = a/2$, $q_{23} = 0, r_{11} = -1/2, r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.13–2.17.15	$r_{11} = -p_{13}, r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = p_{23} = 0, q_{13} = 1/2$, $q_{23} = r_{11} = r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.17	$r_{11} = -p_{13}, r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = p_{23} = 0, q_{13} = 1/2$, $q_{23} = r_{11} = r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.18–2.17.20	$r_{11} = -p_{13}, r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = 1/2, p_{23} = 0, q_{13} = 1/2$, $q_{23} = 1/2, r_{11} = -1/2, r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.21–2.17.23	$r_{11} = -p_{13}, r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = 1/2, p_{23} = q_{13} = 0, q_{23} = 1/2$, $r_{11} = -1/2, r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.24	$r_{11} = -p_{13}, r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = a/2, p_{23} = -1/2, q_{13} = 1/2$, $q_{23} = a/2, r_{11} = -a/2, r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.25, 2.17.26	$r_{11} = -p_{13}, r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = 1/2, p_{23} = q_{13} = 0, q_{23} = -1/2$, $r_{11} = -1/2, r_{13} = r_{23} = 0$
2.20.18 при $\alpha = 0$	$q_{11} = -p_{12}, r_{11} = -p_{13}$, $r_{12} = -q_{13}, q_{12} = r_{13} = 0$	$p_{12} = 0, p_{13} = 1/2, q_{11} = q_{12} = q_{13} = 0$, $r_{11} = -1/2, r_{12} = r_{13} = 0$
2.21.1	p_{12}–любое	$p_{12} = 0$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, найдены инвариантные аффинные связности на трехмерных редуктивных однородных пространствах с разрешимой группой преобразований вместе с их тензорами кривизны и кручения, алгебрами голономии, выписаны канонические связности, а также естественные связности без кручения. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, при изучении пространств с аффинной связностью, а также могут найти приложения в теории относительности, которая, с математической точки зрения, базируется на геометрии искривленных пространств, в ядерной физике, физике элементарных частиц и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. — М. : Наука, 1981.

2. Картан, Э. Риманова геометрия в ортогональном репере / Э. Картан. — М. : Моск. ун–т, 1960. — 307 с.

3. Chen, B. Y. Geometry of submanifolds / B. Y. Chen // Pure and Appl. Math. 1973. — V. 10, № 22. — 308 p.

4. Онищик, А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. — М. : Физ.-мат. лит., 1995. — 384 с.

5. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. Journ. Math. — 1954. — V. 76, № 1. — P. 33–65.

6. Можей, Н. П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них / Н. П. Можей. — Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. — 394 с.

7. Mozhey, N. P. Normal connections on three-dimensional manifolds with solvable transformation group / N. P. Mozhey // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2016. — V. 37, № 2. — P. 160–177.

REFERENCES

1. Kobayasi Sh., Nomidzu K. Fundamentals of differential geometry. V. 2. [Kobayasi Sh., Nomidzu K. Osnovy differentsial'noy geometrii. T. 2]. Moscow, 1981.

2. Kartan E. Rimanova geometriya v ortogonal'nom repere. [Kartan E. Riemannian geometry in an orthogonal frame]. Moscow, 1960, 307 p.

3. Chen B.Y. Geometry of submanifolds. Pure and Appl. Math., 1973, vol. 10, no. 22, 308 p.

4. Onishchik A.L. Topology of transitive Lie groups of transformations. [Onishchik A.L. Topologiya tranzitivnykh grupp Li preobrazovaniy]. Moscow, 1995, 384 p.

5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. Amer. Journ. Math., 1954, vol. 76, no. 1, pp. 33–65.

6. Mozhey N.P. Three-dimensional isotropically faithful homogeneous spaces and affine connections on them. [Mozhey N.P. Trehmerniye izotropno-tochniye odnorodniye prostranstva i svyaznosti na nih]. Kazan, 2015, 394 p.

7. Mozhey N.P. Normal connections on three-dimensional manifolds with solvable transformation group. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2016, vol. 37, no. 2, pp. 160–177.

Можей Наталья Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры “Программное обеспечение информационных технологий” Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь
E-mail: mozheynatalya@mail.ru
Тел.: +375 (29) 315–43–88

Mozhey Natalya Pavlovna, Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Docent, Department of Software Information Technology Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus
E-mail: mozheynatalya@mail.ru
Tel.: +375 (29) 315–43–88