Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (111), 2018

УДК 514.76

Ненулевые алгебры голономии тривиальных связностей на однородных пространствах с неразрешимыми группами преобразований

Н.П. Можей

Целью данной работы является классификация трехмерных однородных пространств, допускающих только тривиальную аффинную связность с ненулевой алгеброй голономии, описание их тензоров кривизны и алгебр голономии. Рассмотрены пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований. В работе определены основные понятия: изотропно-точная пара, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, алгебра голономии. Приведено явное локальное описание трехмерных однородных пространств указанного вида.
Ключевые слова: алгебра голономии, однородное пространство, группа преобразований, аффинная связность, тензор кривизны.

The goal of this paper is to classify three-dimensional homogeneous spaces that admit only trivial affine connections with nonzero holonomy algebra, a description of their curvature tensors and holonomy algebras. The spaces on which the unsolvable Lie group of transformations acts are considered. The basic notions, such as an isotropically-faithful pair, an affine connection, curvature and torsion tensors, a holonomy algebras are defined. An explicit local description of three-dimensional homogeneous spaces of the specified type is given.
Keywords: holonomy algebra, homogeneous space, transformation group, affine connection, curvature tensor.

Введение. Связность на многообразии определяет (через параллельный перенос) понятие голономии. В качестве примеров можно привести голономию связности Леви-Чивита в римановой геометрии (называемую «римановой голономией»), голономию связностей в векторных расслоениях, голономию связностей Картана и др. В каждом из перечисленных случаев голономия связности может быть описана через группу Ли – группу голономии. Исследование голономии было начато еще Э. Картаном для изучения и классификации симметрических пространств, позже группы голономии использовались, чтобы изучить риманову геометрию в целом. Исследования структуры кривизны многообразий с совершенной группой голономии (т. е. вся алгебра голономии порождается только операторами кривизны) проводились, например, в работах [1]–[3]. Связь группы голономии лоренцевых пространств с рекуррентными тензорными полями рассматривается в [4] и [5], применение групп голономии в супергравитации описывается в [6], а также в [7]. С описанием связностей ненулевой кривизны на трехмерных нередуктивных пространствах можно ознакомиться в [8], целью же данной статьи является нахождение алгебр голономии тривиальных аффинных связностей на трехмерных однородных пространствах и определение условий, при которых алгебра голономии является ненулевой. В работе рассматриваются пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований.

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G=\bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Необходимое условие существования аффинной связности – представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [9]. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m}=\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. *Аффинной связностью* на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. *Тензор кручения* $T\in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и *тензор кривизны* $R\in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ для всех $x,y\in\bar{\mathfrak{g}}$ имеют вид:

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x,y]_{\mathfrak{m}}, \quad R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x),\Lambda(y)] - \Lambda([x,y]).$$

Одной из важнейших характеристик связности является группа голономии. Переформулируем теорему Вана [10] об алгебре группы голономии инвариантной связности: *алгебра* Ли $\mathfrak{h}^*$ группы *голономии* инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ на паре ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]] + \ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x),\Lambda(y)] - \Lambda([x,y]) \mid x,y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$.

Основная часть. Будем описывать пару ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ с базисом $\{e_1,...,e_n\}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$), причем $\{e_1,...,e_{n-3}\}$ – базис $\mathfrak{g}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, а m – номер пары ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$). В дальнейшем, если на параметры, появляющиеся в процессе классификации, накладываются дополнительные условия, то они записываются после таблицы умножения, в противном случае предполагается, что параметры пробегают все $\mathbb{R}$. Будем выписывать аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, а тензор кривизны R – через $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$. Все указанные далее связности оказываются связностями без кручения.

Пусть группа, действующая на однородном пространстве, не является разрешимой. Непосредственными вычислениями получаем, что полупростой группа преобразований на трехмерном однородном пространстве, допускающем только тривиальную аффинную связность с ненулевой алгеброй голономии, оказаться не может.

Теорема. А) *Трехмерное однородное пространство, допускающее только тривиальную аффинную связность с ненулевой алгеброй голономии, такое, что* $\bar{\mathfrak{g}}$ *не является разрешимой, а ее радикал коммутативен, имеет вид* 2.9.12

2.9.12.λ=–2, μ=2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_2$	u_1	$-2u_2$	$2u_3$
e_2	e_2	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	e_2	0
u_2	$2u_2$	0	$-e_2$	0	$-e_1$
u_3	$-2u_3$	$-u_1$	0	e_1	0

с разложением Леви – $\{\{u_1, -e_2\}, \{-2u_2, 2u_1+2u_3, -e_1-e_2\}\}$. *Тогда тензор кривизны тривиальной связности –*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

а алгебра голономии – $\left\{ \begin{pmatrix} p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & -2p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_2 \end{pmatrix} \middle| \, p_1, p_2 \in \mathbb{R} \right\}.$

Б) *Трехмерные однородные пространства, допускающие только тривиальную аффинную связность с ненулевой алгеброй голономии, такие, что* $\bar{\mathfrak{g}}$ *не является разрешимой, а ее радикал некоммутативен, имеют вид:*

$2.1.2.\lambda=-1$	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	$-u_2$	0
e_2	0	0	0	0	u_3
u_1	$-u_1$	0	0	e_1	0
u_2	u_2	0	$-e_1$	0	0
u_3	0	$-u_3$	0	0	0

$2.3.2.\lambda=0$	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$-u_2$	u_1	0
e_2	0	0	0	0	u_3
u_1	u_2	0	0	e_1	0
u_2	$-u_1$	0	$-e_1$	0	0
u_3	0	$-u_3$	0	0	0

$2.3.3.\lambda=0$	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$-u_2$	u_1	0
e_2	0	0	0	0	u_3
u_1	u_2	0	0	$-e_1$	0
u_2	$-u_1$	0	e_1	0	0
u_3	0	$-u_3$	0	0	0

$3.8.8.\lambda=-1,\mu=0$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	u_1	0	0
e_2	0	0	e_3	0	u_2	$-u_3$
e_3	$-e_3$	$-e_3$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	e_3	0
u_2	0	$-u_2$	0	$-e_3$	0	$2e_2-e_1$
u_3	0	u_3	$-u_1$	0	e_1-2e_2	0

$4.11.2.\lambda=0,\mu=-1$	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	e_4	u_1	0	0
e_2	0	0	$-e_3$	e_4	0	u_2	$-u_3$
e_3	$-e_3$	e_3	0	0	0	u_1	0
e_4	$-e_4$	$-e_4$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	e_4	e_3
u_2	0	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_4$	0	e_2
u_3	0	u_3	0	$-u_1$	$-e_3$	$-e_2$	0

$4.13.2.\lambda=0$	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	e_3	0	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	e_3	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	$-e_2$	0	0	u_1
e_4	0	$-e_3$	e_2	0	0	$-u_3$	u_2

u_1	$-u_1$	0	0	0	0	e_2	e_3
u_2	0	$-u_1$	0	u_3	$-e_2$	0	e_4
u_3	0	0	$-u_1$	$-u_2$	$-e_3$	$-e_4$	0

4.13.3.$\lambda = 0$	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	e_3	0	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	e_3	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	$-e_2$	0	0	u_1
e_4	0	$-e_3$	e_2	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	$-e_2$	$-e_3$
u_2	0	$-u_1$	0	u_3	e_2	0	$-e_4$
u_3	0	0	$-u_1$	$-u_2$	e_3	e_4	0

Разложения Леви, тензоры кривизны и алгебры голономии тривиальных связностей представленны в таблицах 1–3.

Таблица 1 – Разложения Леви

Пара	Разложение Леви
4.11.2	$\{\{-e_4, e_1, e_3, u_1\}, \{-e_2 - e_4, -u_2, u_1 - u_3\}\}$
4.13.2	$\{\{e_1, -e_2, e_3, u_1\}, \{e_4 - e_2, u_2, u_1 + u_3\}\}$
4.13.3	$\{\{e_1, e_2, -e_3, u_1\}, \{-e_2 - e_4, -u_2, u_1 - u_3\}\}$
3.8.8	$\{\{-e_3, -u_1, e_1\}, \{e_1 - 2e_2 + (1/2)e_3, -2u_2, -u_1 - 2u_3\}\}$
2.1.2	$\{\{u_3, e_2\}, \{u_1, -u_2, e_1\}\}$
2.3.2	$\{\{u_3, e_2\}, \{-u_2, u_1, e_1\}\}$
2.3.3	$\{\{u_3, e_2\}, \{-u_2, u_1, -e_1\}\}$

Таблица 2 – Тензоры кривизны неразрешимых групп Ли

Пара	Тензор кривизны
4.11.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4.13.2	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4.13.3	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
3.8.8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
2.1.2	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.3.2 2.3.3	$\begin{pmatrix} 0 & \mp 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Таблица 3 – Алгебры голономии неразрешимых групп Ли

Пара	Алгебра голономии	Пара	Алгебра голономии
4.11.2	$\begin{pmatrix} 0 & p_2 & p_1 \\ 0 & -p_3 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$	4.13.2 4.13.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & -p_3 \\ 0 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$
3.8.8	$\begin{pmatrix} p_2 & 0 & -p_1 \\ 0 & -2p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_2 \end{pmatrix}$	2.1.2	$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.3.2	$\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2.3.3	$\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Доказательство. Подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ описаны, например, в [11]. Для каждой подалгебры $\mathfrak{g}$ находим изотропно-точные пары с неразрешимой $\bar{\mathfrak{g}}$, аффинные связности на них и определяем пары, допускающие только тривиальную аффинную связность с ненулевой алгеброй голономии.

Рассмотрим, например, случай 4.13, где $\mathfrak{g}$ имеет вид

$$\left\{ \left. \begin{pmatrix} x & z & u \\ 0 & \lambda y & y \\ 0 & -y & \lambda y \end{pmatrix} \right| x, y, z, u \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0 \right\},$$

базис подалгебры выбираем, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту. Нильпотентная подалгебра $\mathfrak{h}$ порождена векторами e_1 и e_2. Пусть $q:\mathfrak{g}\to L(U,\mathfrak{g})$ – линейное отображение такое, что $q([x,y]) = x.q(y) - y.q(x)$, $x, y \in \mathfrak{g}$. Рассмотрим комплексный обобщенный модуль $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, U^{\mathbb{C}})$. Положим $\tilde{e}_i = e_i \otimes 1$, $1 \leq i \leq 4$, $\tilde{u}_j = u_j \otimes 1$, $1 \leq j \leq 3$. Тогда $\tilde{E} = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$ – базис $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Векторное пространство $U^{\mathbb{C}}$ может быть отождествлено с $\mathbb{C}^3$, $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3\}$ – стандартный базис $U^{\mathbb{C}}$. Поскольку $\mathfrak{g}^{(0,0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_4$, $\mathfrak{g}^{(1,-\lambda+i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{e}_2 + i\tilde{e}_3)$, $\mathfrak{g}^{(1,-\lambda-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{e}_2 - i\tilde{e}_3)$, $(U^{\mathbb{C}})^{(1,0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}u_1$, $(U^{\mathbb{C}})^{(0,-\lambda+i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3)$, $(U^{\mathbb{C}})^{(0,-\lambda-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3)$, имеем $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_1)(\tilde{u}_1) = 0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_2 + i\tilde{e}_3)(\tilde{u}_1) = 0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_1)(\tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3) = 0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_2 + i\tilde{e}_3)(\tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3) = 0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_1)(\tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3) = 0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_2 + i\tilde{e}_3)(\tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3) = 0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_2 - i\tilde{e}_3)(\tilde{u}_1) = 0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_2 - i\tilde{e}_3)(\tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3) = 0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_4)(\tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3) = 0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_2 - i\tilde{e}_3)(\tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3) = 0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_4)(\tilde{u}_1) = 0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_4)(\tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3) = 0$. Поэтому $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_i)(u_j) = 0$, $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 3$. Имеем $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_4$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,-\lambda+i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{e}_2 + i\tilde{e}_3)$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,-\lambda-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{e}_2 - i\tilde{e}_3)$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,-\lambda+i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3)$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}u_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,-\lambda-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3)$, тогда $[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(1,\lambda+i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$, $[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(1,\lambda-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$, $[\tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3, \tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(0,2\lambda)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$. Если $\lambda \neq 0$, то $[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3] = 0$, $[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3] = 0$, $[\tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3, \tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3] = -2i[\tilde{u}_2, \tilde{u}_3] = 0$, следовательно, $[u_1, u_2] = [u_1, u_3] = [u_2, u_3] = 0$, пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ тривиальна (т. е. существует коммутативный идеал $\mathfrak{m}$ алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ такой, что $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}$). Связность на этой паре, тензоры кривизны и кручения, алгебра голономии нулевые, поэтому пара не входит в рассматриваемый в работе класс. Если $\lambda = 0$, то $[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3] = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2] + i[\tilde{u}_1, \tilde{u}_3] \in \mathbb{C}(\tilde{e}_2 + i\tilde{e}_3)$, $[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3] = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2] - i[\tilde{u}_1, \tilde{u}_3] \in \mathbb{C}(\tilde{e}_2 - i\tilde{e}_3)$, $[\tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3, \tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3] = -2i[\tilde{u}_2, \tilde{u}_3] \in \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_4$. Тогда $[u_1, u_2] = a_2 e_2 + a_3 e_3$, $[u_1, u_3] = b_2 e_2 + b_3 e_3$, $[u_2, u_3] = c_1 e_1 + c_4 e_4$. В силу тождества Якоби получаем, что $[u_1, u_2] = a_2 e_2$, $[u_1, u_3] = a_2 e_3$, $[u_2, u_3] = a_2 e_4$. При $a_2 = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$ (связность на этой паре, тензоры кривизны и кручения, алгебра голономии нулевые). При $a_2 > 0$ эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 4.13.2 устанавливается посредством $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i, i = \overline{1,4}, \pi(u_j) = a_2^{-1/2} u_j, j = \overline{1,3}$. Связность на этой паре и ее тензор кручения нулевые, тензор кривизны и алгебра голономии выписаны в таблицах 2 и 3. При $a_2 < 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 4.13.3 при помощи $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_3 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,4}$, $\pi(u_j) = (-a_2)^{-1/2} u_j$, $j = \overline{1,3}$. Связность на этой паре и ее тензор кручения также нулевые, тензор кривизны и алгебра голономии выписаны в таблицах 2 и 3. Поскольку $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_2$ и $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_3$, ни одна из пар 4.13.2 и 4.13.3 не эквивалентна тривиальной паре $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$. Через $\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{a}_3$ обозначим подалгебры Леви алгебр $\bar{\mathfrak{g}}_2$ и $\bar{\mathfrak{g}}_3$ соответственно. Заметим, что $\mathfrak{a}_2 \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ и $\mathfrak{a}_3 \cong \mathfrak{su}(2)$, поэтому $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$ и $(\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$ не эквивалентны.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Рассмотрим теперь, например, случай 2.9.12. Отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно, $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0$, $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1)$, $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = 0$, $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = \lambda\Lambda(u_2)$, $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = \mu\Lambda(u_3)$, $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_1)$, поэтому $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$. Тензор кривизны имеет вид, указанный в таблице 2. Алгебра, порожденная множеством $V = \{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$, т. е. $R(u_i, u_j)$, совпадает с алгеброй голономии (таким образом, алгебра голономии совершенна) и имеет вид, указанный в таблице 3. Действительно, поскольку связность тривиальна, $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}) = \Lambda(\mathfrak{g})$ и $[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] = [\Lambda(\mathfrak{g}), V] = V$, так как $\Lambda(\mathfrak{g})$ совпадает с V. В данном случае $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}} = \Lambda(\mathfrak{g})$ и $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ (т. е. связность нормальна). Тензор кручения нулевой.

Других трехмерных однородных пространств с неразрешимой $\bar{\mathfrak{g}}$, допускающих только тривиальную аффинную связность с ненулевой алгеброй голономии, кроме указанных в теореме, не существует.

Заключение. Таким образом, найдены все трехмерные однородные пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований, допускающие только тривиальную аффинную связность с ненулевой алгеброй голономии, что эквивалентно описанию соответствующих эффективных пар алгебр Ли. Описаны в явном виде тензоры кривизны и алгебры голономии указанных связностей.

Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, главным образом, локальный характер. В работе используется алгебраический подход к исследованию однородных пространств с аффинными связностями, а также соединение различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.

Литература

1. Кайгородов, В.Р. Римановы пространства. Структура кривизны пространств типа *A* / В.Р. Кайгородов // Известия вузов. Математика. – 1974. – № 5. – С. 117–127.

2. Кайгородов, В.Р. Структура кривизны пространств типа *B* / В.Р. Кайгородов // Известия вузов. Математика. – 1975. – № 1. – С. 104–107.

3. Кайгородов, В.Р. Римановы пространства. Рекуррентность второго порядка / В.Р. Кайгородов // Известия вузов. Математика. – 1975. – № 2. – С. 112–115.

4. Алексеевский, Д.В. Группы голономии и рекуррентные тензорные поля в лоренцевых пространствах II / Д.В. Алексеевский // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. – 1974. – Вып. 5. – С. 5–17.

5. Кайгородов, В.Р. Полусимметрические лоренцевы пространства с совершенной группой голономии / В.Р. Кайгородов // Гравитация и теория относительности. – 1978. – № 14–15. – С. 113–120.

6. Castellani, L. Holonomy group, sesquidual torsion fields, and $SU(8)$ in $d=11$ supergravity / L. Castellani, R. D'Auria, P. Fre, P. Nieuwenhuizen // J. Math. Phys. – 1984. – № 25. – P. 3209–3213.

7. Hall, G.S. Curvature, metric and holonomy in general relativity / G.S. Hall // Differ. Geom. and Appl. Proc. Conf., 24–30 aug., 1986. – Brno, 1987. – P. 127–136.

8. Можей, Н.П. Связности ненулевой кривизны на трехмерных нередуктивных пространствах / Н.П. Можей // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2017. – Т. 17, вып. 4. – С. 381–393.

9. Kobayashi, S. Foundations of differential geometry / S. Kobayashi, K. Nomizu. – New York : John Wiley and Sons, 1963. – V. 1. – 334 p. ; 1969. – V. 2. – 411 p.

10. Wang, H.C. On invariant connections over a principal fibre bundle / H.C. Wang // Nagoya Math. J. – 1958. – № 13. – P. 1–19.

11. Можей, Н.П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них / Н.П. Можей. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 394 с.

Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники

Поступила в редакцию 30.08.2018