

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерного проектирования

Кафедра электронной техники и технологии

С. М. Аваков, **В. П. Огер**, О. В. Гуревич

## ***ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ***

*Рекомендовано УМО по образованию в области  
информатики и радиоэлектроники для специальности 1-36 04 01  
«Программно-управляемые электронно-оптические системы» в качестве  
пособия*

Минск БГУИР 2018

УДК 681.51(076)  
ББК 32.965я73  
А18

**Р е ц е н з е н т ы:**

кафедра робототехнических систем Белорусского национального  
технического университета (протокол №7 от 07.04.2016);

доцент кафедры конструирования и производства приборов  
Белорусского национального технического университета  
кандидат технических наук, доцент А. А. Новиков

**Аваков, С. М.**

А18 Основы теории систем автоматического управления : пособие /  
С. М. Аваков, В. П. Огер, О. В. Гуревич. – Минск : БГУИР, 2018. – 64 с. : ил.  
ISBN 978-985-543-347-8.

Содержит материалы для практических занятий, направленных на отработку методик построения математических моделей САУ, приобретение навыков расчета их параметров и устойчивости, освоение методов абстрактного проектирования звеньев САУ и моделирования производственных систем.

Издание предназначено для закрепления и углубления теоретических знаний, полученных на лекционных занятиях в рамках филиала кафедры ЭТТ на НПО «Планар», и приобретения практических навыков разработки звеньев САУ и производственных систем.

**УДК 681.51(076)  
ББК 32.965я73**

**ISBN 978-985-543-347-8**

© Аваков С. М., Огер В. П.,  
Гуревич О. В., 2018  
© УО «Белорусский государственный  
университет информатики  
и радиоэлектроники», 2018

## СОДЕРЖАНИЕ

Практическое занятие №1. Математическое моделирование характеристик звеньев САУ .....	4
Практическое занятие №2. Расчет передаточных функций САУ .....	12
Практическое занятие №3. Расчет передаточных функций для механических звеньев САУ .....	16
Практическое занятие №4. Построение частотных характеристик САУ .....	21
Практическое занятие №5. Построение частотных характеристик основных звеньев САУ .....	27
Практическое занятие №6. Исследование устойчивости САУ .....	31
Практическое занятие №7. Расчет запасов устойчивости САУ .....	39
Практическое занятие №8. Преобразование структурных схем САУ .....	46
ЛИТЕРАТУРА.....	63

Библиотека БГУИР

## Практическое занятие №1

### Математическое моделирование характеристик звеньев САУ

**Цель работы:** изучить методику определения частотных характеристик и передаточных функций по дифференциальным уравнениям звеньев САУ; определить дифференциальные уравнения и  $W(s)$ , АФЧХ, ВЧХ, МЧХ по передаточным функциям САУ.

#### 1.1. Краткие теоретические сведения

В общем случае САУ является совокупностью отдельных звеньев, соединенных определенным образом, обеспечивающим требуемый закон функционирования САУ в целом.

Практически любая САУ нелинейна. Однако в пределах малых отклонений параметров САУ в рабочей точке функционирования ее можно рассматривать как линейную.

Математическими моделями линейных САУ и их звеньев являются дифференциальные уравнения, составленные в соответствии с физическими законами функционирования и факторами, от которых зависят переменные уравнений.

Математической моделью линейного звена САУ является дифференциальное уравнение вида

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = F_1\left(g, \frac{dg}{dt}, \frac{d^2g}{dt^2}, \dots, \frac{d^m g}{dt^m}\right), \quad (1.1)$$

где  $x$  – выходная величина;

$g$  – входная величина.

Для описания установившегося режима работы САУ математическая модель линейной САУ принимает вид

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = b_0 \frac{d^m g}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} g}{dt^{m-1}} + \dots + b_m g. \quad (1.2)$$

Для анализа линейных систем применяют преобразование Лапласа.

При использовании преобразования Лапласа функции времени  $x(t)$  ставится в соответствие функция  $x(s)$ . Функция  $x(t)$  называется оригиналом, а  $x(s)$  – ее изображением.

Прямое преобразование Лапласа:

$$L[x(t)] = x(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt. \quad (1.3)$$

Обратное преобразование Лапласа:

$$L^{-1} = x(t) = \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} x(s)e^{st} ds. \quad (1.4)$$

В соответствии с дифференцированием оригинала  $\frac{dx^n}{dt^n}$  соответствует  $s^n x(s)$  и уравнение (1.2) преобразуется к виду

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n)x(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m)g(s). \quad (1.5)$$

Сделаем обозначения:

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n; \quad B(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m. \quad (1.6)$$

Тогда уравнение примет вид  $A(s)x(s) = B(s)g(s)$ .

Зависимость выходной величины от входной принимает вид

$$x(s) = \frac{B(s)}{A(s)}g(s) = W(s)g(s), \quad \text{или} \quad W(s) = \frac{x(s)}{g(s)}. \quad (1.7)$$

Основные характеристики САУ представлены на рис. 1.1. Передаточной функцией  $W(s)$  САУ или ее звена называется отношение изображения по Лапласу выходной величины к изображению по Лапласу входной величины при нулевых начальных условиях.



Рис. 1.1. Основные характеристики САУ

Взаимосвязь частотных характеристик САУ показана на рис. 1.2.

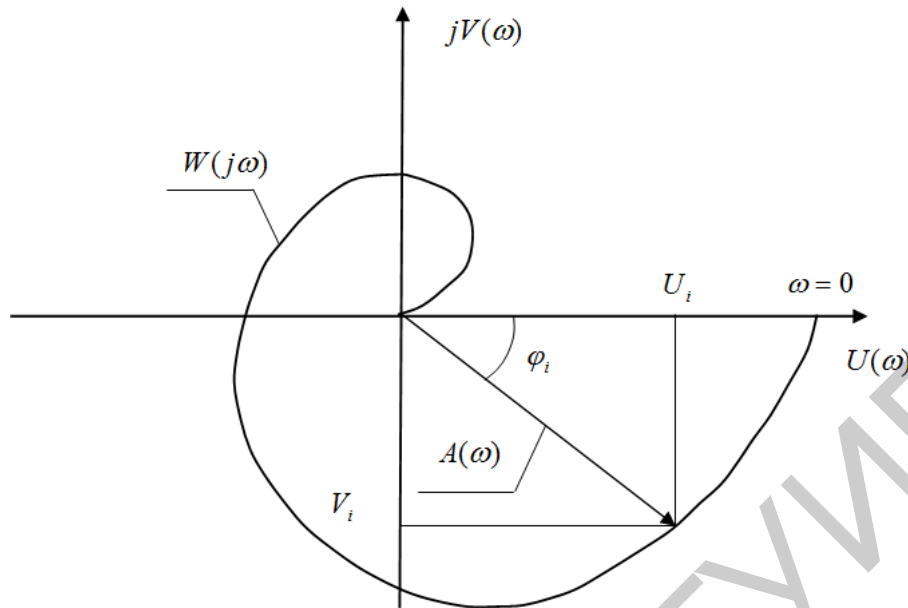


Рис. 1.2. Изображение частотных характеристик на комплексной плоскости

Методика определения частотных характеристик следующая:

1. Определить передаточную функцию  $\bar{W}(s)$ .
2. Переходная функция  $h(t)$  описывает изменение выходной величины САУ при воздействии на ее вход единичного ступенчатого воздействия  $1(t)$  при нулевых начальных условиях:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} W(s) \right\} = \int_0^t k(t) dt. \quad (1.8)$$

3. Весовая функция  $k(t)$  описывает реакцию САУ при воздействии на ее вход  $\delta$ -функции при нулевых начальных условиях:

$$k(t) = L^{-1} \{ W(s) \} = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (1.9)$$

4. Определить АФЧХ. Для этого в передаточной функции САУ выполнить замену  $s$  на  $j\omega$  и получить АФЧХ в виде вещественной и мнимой частей:

$$W(s = j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (1.10)$$

где  $U(\omega)$  – вещественная частотная характеристика (ВЧХ);

$V(j\omega)$  – мнимая частотная характеристика (МЧХ).

5. Определить амплитудно-частотную характеристику АЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}. \quad (1.11)$$

6. Определить фазово-частотную характеристику ФЧХ:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \quad (1.12)$$

ВЧХ и МЧХ связаны с АЧХ и ФЧХ следующими зависимостями:

$$U(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega), \quad V(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega). \quad (1.13)$$

## 1.2. Примеры практического решения задач на определение характеристик САУ

### 1.2.1. Определение передаточных функций по дифференциальным уравнениям звеньев САУ

*Условие*

Задано дифференциальное уравнение звена САУ:

$$10 \frac{d^3 x(t)}{dt^3} + 4 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + x(t) = 8 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + 5g(t). \quad (1.14)$$

Найти передаточную функцию звена.

*Решение*

Из определения передаточной функции следует применение преобразования Лапласа к уравнению звена. Тогда получаем

$$10s^3 x(s) + 4s^2 x(s) + x(s) = 8s^2 g(s) + g(s); \quad (1.15)$$

$$(10s^3 + 4s^2 + 1)x(s) = (8s^2 + 5)g(s). \quad (1.16)$$

Откуда

$$W(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{8s^2 + 5}{10s^3 + 4s^2 + 1}. \quad (1.17)$$

### 1.2.2. Вывод дифференциальных уравнений по передаточной функции САУ

*Условие*

Задана передаточная функция звена САУ:

$$W(s) = \frac{8s^2 + 3s + 3}{5s^3 + 4s^2 + 8}. \quad (1.18)$$

Найти дифференциальное уравнение звена.

*Решение*

По определению

$$W(s) = \frac{x(s)}{g(s)} = \frac{8s^2 + 3s + 3}{5s^3 + 4s^2 + 8} \quad (1.19)$$

получаем

$$(5s^3 + 4s^2 + 8)x(s) = (8s^2 + 3s + 3)g(s) \quad (1.20)$$

или

$$5s^3x(s) + 4s^2x(s) + 8x(s) = 8s^2g(s) + 3sg(s) + 3g(s). \quad (1.21)$$

После обратного преобразования Лапласа получаем

$$5 \frac{d^3x(t)}{dt^3} + 4 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 8x(t) = 8 \frac{d^2g(t)}{dt^2} + 3 \frac{dg(t)}{dt} + 3g(t). \quad (1.22)$$

### 1.2.3. Вывод $W(s)$ , АФЧХ, ВЧХ, МЧХ по дифференциальным уравнениям

*Условие*

Задано дифференциальное уравнение САУ:

$$9 \frac{d^3x(t)}{dt^3} + 6 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 11 \frac{d^2g(t)}{dt^2} + 8 \frac{dg(t)}{dt} + 4g(t). \quad (1.23)$$

Найти выражения для передаточной функции  $W(s)$ , АФЧХ, ВЧХ, МЧХ, координаты начальной и конечной точки графика  $W(j\omega)$ .

*Решение*

1. Вывод выражения для  $W(s)$ .

К дифференциальному уравнению применяем преобразование Лапласа.



$$9s^3x(s) + 6sx(s) + x(s) = 11s^2g(s) + 8sg(s) + 4g(s), \quad (1.24)$$

$$(9s^3 + 6s + 1)x(s) = (11s^2 + 8s + 4)g(s), \quad (1.25)$$

$$\frac{x(s)}{g(s)} = \frac{11s^2 + 8s + 4}{9s^3 + 6s + 1} = W(s). \quad (1.26)$$

2. Для вывода выражения АФЧХ заменяем в выражении передаточной функции  $W(s)$   $s$  на  $j\omega$ :

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{11(j\omega)^2 + 8(j\omega) + 4}{9(j\omega)^3 + 6(j\omega) + 1} = \frac{4 - 11\omega^2 + j8\omega}{1 - j3\omega(3\omega^2 - 2)} = \frac{(4 - 11\omega^2 + j8\omega)[1 + j3\omega(3\omega^2 - 2)]}{1 - j3\omega(3\omega^2 - 2)} = \\ &= \frac{4 - 11\omega^2 - 24\omega^2(3\omega^2 - 2)}{1 + 9\omega^2(3\omega^2 - 2)^2} + j \frac{8\omega + 12\omega(3\omega^2 - 2) - 33\omega^3(3\omega^2 - 2)}{1 + 9\omega^2(3\omega^2 - 2)^2}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

3. ВЧХ:

$$U(\omega) = \frac{4 - 11\omega^2 - 24\omega^2(3\omega^2 - 2)}{1 + 9\omega^2(3\omega^2 - 2)^2}. \quad (1.28)$$

4. МЧХ:

$$V(\omega) = \frac{8\omega + 12\omega(3\omega^2 - 2) - 33\omega^3(3\omega^2 - 2)}{1 + 9\omega^2(3\omega^2 - 2)^2}. \quad (1.29)$$

5. Определение координат:

$$\text{при } \omega = 0 \quad U(\omega) = 4, \quad V(\omega) = 0;$$

$$\text{при } \omega = \infty \quad U(\omega) = 0, \quad V(\omega) = -\infty.$$

### 1.3. Порядок выполнения практического задания

1. Изучить основные теоретические сведения по математическому моделированию характеристик звеньев САУ.

2. Рассмотреть примеры решения типовых задач на определение характеристик звеньев САУ.

3. Получить у преподавателя варианты индивидуальных заданий (подразд. 1.4).

4. Определить дифференциальное уравнение заданного звена.

5. Вывести уравнения для  $W(s)$ ,  $W(j\omega)$ ,  $U(\omega)$ ,  $V(\omega)$ ,  $A(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$  по заданному дифференциальному уравнению.

### 1.4. Варианты индивидуальных заданий

1. *Условие.* Задана передаточная функция звена САУ (табл. 1.1). Найти дифференциальное уравнение звена.

Таблица 1.1

Варианты индивидуальных заданий (задача 1)

Номер варианта	Передаточная функция звена САУ
1	$W(s) = \frac{8s^2 + 3s}{5s^2 + 4s + 1}$
2	$W(s) = \frac{s^3 + s^2 + s + 5}{s^2 + s + 1}$
3	$W(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 10s + 3}$
4	$W(s) = \frac{3s^3 - 2s^2 + s + 6}{5s^3 - 4s^2 + 3s + 2}$
5	$W(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}{4s^2 + 2s + 1}$

2. *Условие.* Задано дифференциальное уравнение САУ (табл. 1.2). Вывести уравнения для  $W(s), W(j\omega), U(\omega), V(\omega), A(\omega), \varphi(\omega)$ .

Таблица 1.2

Варианты индивидуальных заданий (задача 2)

Номер варианта	Дифференциальное уравнение САУ
1	2
1	$-7 \frac{d^3 x(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 x(t)}{d(t)^2} - 7 \frac{dx(t)}{d(t)} = 5 \frac{d^3 g(t)}{dt^3} + 4 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + 7 \frac{dg(t)}{dt}$

1	2
2	$3 \frac{d^3 x(t)}{dt^3} + 4 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} - 2 \frac{dx(t)}{dt} = -2 \frac{d^3 g(t)}{dt^3} - 4 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + 4 \frac{dg(t)}{dt}$
3	$3 \frac{d^3 x(t)}{dt^3} + 6 \frac{dx(t)}{dt} = - \frac{d^3 g(t)}{dt^3} + 5 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} - 5 \frac{dg(t)}{dt}$
4	$6 \frac{d^3 x(t)}{dt^3} - 5 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -5 \frac{d^3 g(t)}{dt^3} - 5 \frac{d^2 g(t)}{dt^2}$
5	$-2 \frac{d^3 x(t)}{dt^3} + 7 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 5 \frac{dx(t)}{dt} = 7 \frac{d^3 g(t)}{dt^3} - 2 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} - 17 \frac{dg(t)}{dt}$

### 1.5. Контрольные вопросы

1. Понятие математической модели САУ. Математическая модель линейного звена САУ.
2. Применение преобразования Лапласа для анализа линейных систем.
3. Основные характеристики САУ.
4. Понятие передаточной функции САУ или звена.
5. Взаимосвязь частотных характеристик.
6. Методика определения частотных характеристик.
7. Понятие весовой функции.
8. Методика определения и взаимосвязь АФЧХ, АЧХ и ФЧХ.

## Практическое занятие №2

### Расчет передаточных функций САУ

**Цель работы:** изучить методику решения задач вывода передаточных функций для электронных звеньев с сосредоточенными параметрами.

#### 2.1. Краткие теоретические сведения

Для расчета передаточной функции САУ или ее звена необходимо построить математическую модель, которая описывает закон преобразования входной величины в выходную и позволяет определить параметры звена САУ.

Закон преобразования входной величины в выходную определяется параметрами физических элементов составляющих звенья САУ. Звенья САУ могут быть реализованы на механических массах, связанных кинематическими связями, электромеханических элементах, взаимодействие в которых реализуется электромагнитными силами, электронных элементах, реализующих уровни напряжения и тока.

Каждый из элементов, составляющих звено САУ, сам является в какой-то мере звеном САУ, т. к. преобразует входную величину, т. е. реализует передаточную функцию и все остальные характеристики звена САУ.

Методика вывода передаточных функций:

1. Составление математической модели функционирования САУ (звена САУ) в виде дифференциального уравнения.
2. Преобразование математической модели в операторный вид, применяя преобразование Лапласа.
3. Представление передаточной функции как

$$W(s) = k \frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)}, \quad (2.1)$$

где  $U_{\text{вых}}(s)$  – изображение выходной, а  $U_{\text{вх}}(s)$  – изображение входной величины.

При составлении математической модели удобно пользоваться эквивалентными электрическими схемами, моделирующими работу звеньев САУ.

#### 2.2. Решение задач вывода передаточных функций для электронных звеньев с сосредоточенными параметрами

**Условие.** Определить передаточную функцию динамического звена по его принципиальной схеме (рис. 2.1).

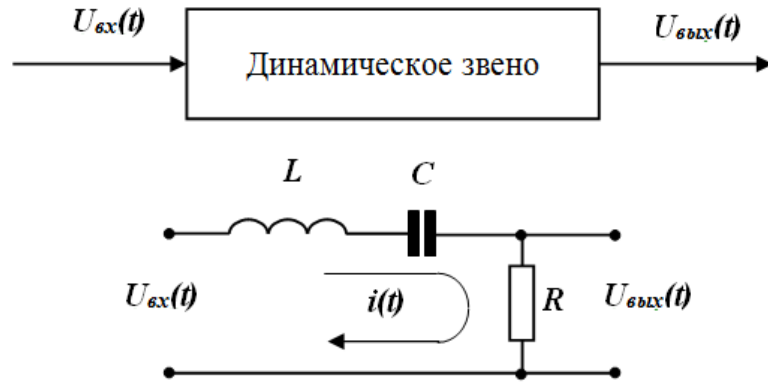


Рис. 2.1. Принципиальная схема звена

Алгоритм решения задачи:

1. По 2-му закону Кирхгофа записать уравнения, описывающие схему:

$$\begin{cases} U_{вх}(t) = U_L(t) + U_C(t) + U_R(t), \\ U_{вых}(t) = U_R(t). \end{cases} \quad (2.2)$$

2. Записать уравнения для каждого элемента схемы:

$$U_R(t) = i(t)R; U_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}; U_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt; i(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt}. \quad (2.3)$$

3. С учетом (2.3) получить систему уравнений

$$\begin{cases} U_{вх}(t) = L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + U_{вых}(t), \\ U_{вых}(t) = i(t)R. \end{cases} \quad (2.4)$$

4. Получить операторные уравнения, применив преобразование Лапласа:

$$\begin{cases} U_{вх}(s) = LsI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) + U_{вых}(s), \\ U_{вых}(s) = I(s)R. \end{cases} \quad (2.5)$$

5. Получить значение изображения тока

$$I(s) = \frac{1}{R} U_{вых}(s). \quad (2.6)$$

6. Преобразовать уравнение (2.2) с учетом (2.6):

$$U_{\text{ex}}(s) + \frac{L}{R} s U_{\text{вых}}(s) + \frac{1}{RCs} U_{\text{вых}}(s) + U_{\text{вых}}(s) = \frac{LCs^2 U_{\text{вых}}(s) + U_{\text{вых}}(s) + RCs U_{\text{вых}}(s)}{RCs} = \frac{LCs + RCs + 1}{RCs} U_{\text{вых}}. \quad (2.7)$$

7. Получить передаточную функцию

$$W(s) = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{ex}}(s)} = \frac{RCs}{RCs^2 + RCs + 1}. \quad (2.8)$$

### 2.3. Порядок выполнения практического задания

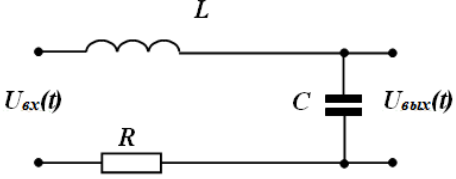
1. Изучить основные теоретические сведения по расчету передаточных функций САУ.
2. Рассмотреть алгоритм решения задач на определение передаточных функций для электронных звеньев с сосредоточенными параметрами.
3. Получить у преподавателя вариант индивидуального задания (подразд. 2.4).
4. Определить дифференциальное уравнение заданного звена.
5. Определить передаточную функцию заданного звена по имеющейся принципиальной схеме.

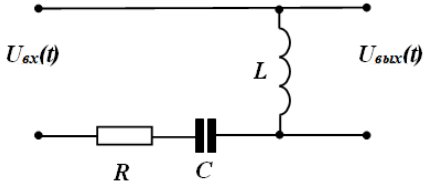
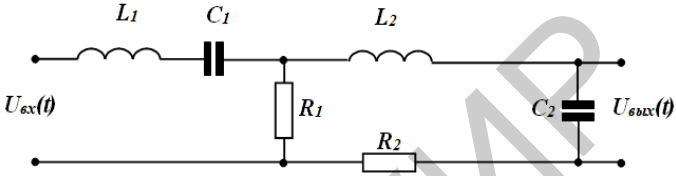
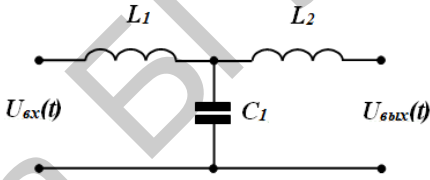
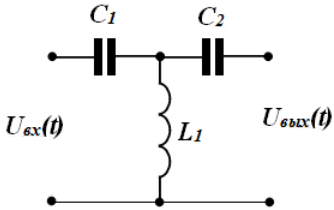
### 2.4. Варианты индивидуальных заданий

*Условие.* Определить передаточную функцию звеньев САУ по имеющейся схеме (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Варианты индивидуальных заданий

Номер варианта	Звено
1	2
1	

1	2
2	
3	
4	
5	

## 2.5. Контрольные вопросы

1. Математическая модель (закон) преобразования входной величины в выходную.
2. Физическая реализация звеньев САУ.
3. Методика вывода передаточных функций.
4. Понятие эквивалентной электрической схемы.

## Практическое занятие №3

### Расчет передаточных функций для механических звеньев САУ

**Цель работы:** изучить методику вывода передаточных функций механических звеньев САУ.

#### 3.1. Краткие теоретические сведения

Для вывода передаточных функций для механических звеньев САУ необходимо следовать следующим правилам:

1. По неформальному описанию звена САУ наиболее полно построить принципиальную или структурную схему звена.

2. По принципиальной схеме построить эквивалентную электрическую модель функционирования звена в виде электрической схемы.

3. Разработать математическую модель функционирования звена в виде системы дифференциальных уравнений токов контуров, связывающих вход и выход звена, т. е. величину входного (управляющего или возмущающего) воздействия и выходной величины.

4. В полученных выражениях перейти к изображениям по Лапласу величин токов и характеристик элементов (сопротивлений, индуктивностей, емкостей).

5. Вывести аналитическое выражение отношения изображений выходной величины ко входной, т. е. получить аналитическое выражение передаточной функции.

#### 3.2. Вывод передаточных функций механических звеньев САУ

Приемы вывода формулы передаточной функции для механических звеньев САУ рассмотрим на примере вывода передаточной функции генератора постоянного тока (рис. 3.1), вращающегося с постоянной скоростью и работающего на чисто активную нагрузку. В качестве входной величины рассматривать напряжение на обмотке возбуждения, выходной – напряжение на нагрузке.

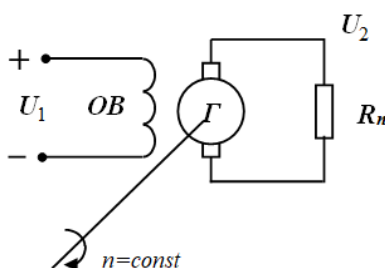


Рис. 3.1. Схема генератора постоянного тока



Алгоритм расчета передаточной функции:

1. Составить эквивалентную электрическую схему (рис. 3.2).

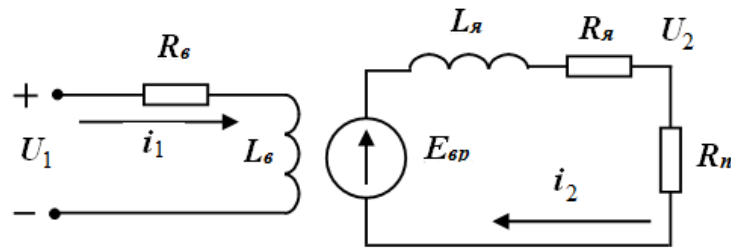


Рис. 3.2. Эквивалентная схема

2. Составить уравнение для контура обмотки возбуждения:

$$L_6 \frac{di_1}{dt} + R_6 i_1 = U_1 . \quad (3.1)$$

3. Составить уравнение для контура якоря:

$$L_я \frac{di_2}{dt} + R_я i_2 + U_2 = E_{сп} , \quad (3.2)$$

где  $i_2 = \frac{U_2}{R_n}$ ;

$E_{сп} = C_e L_6 i_1 n$ ;

$C_e$  – конструктивная постоянная;

$L_6 i_1$  – потокосцепление контура;

$n$  – угловая частота вращения.

Тогда

$$L_я \frac{1}{R_n} \frac{dU_2}{dt} + R_я \frac{U_2}{R_n} + U_2 = C_e L_6 i_1 n \quad \text{или} \quad \frac{L_я}{R_n} \frac{dU_2}{dt} + \left( \frac{R_я}{R_n} + 1 \right) U_2 = C_e L_6 i_1 n . \quad (3.3)$$

Откуда

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{C_e L_6 n} \left[ \frac{L_я}{R_n} \frac{dU_2}{dt} + \left( \frac{R_я}{R_n} + 1 \right) U_2 \right] = \frac{1}{C_e L_6 n} \left[ \frac{L_я}{R_n} \frac{dU_2}{dt} + \left( \frac{R_я + R_n}{R_n} \right) U_2 \right] = \\ &= \frac{1}{C_e L_6 n} \left( \frac{R_я + R_n}{R_n} \right) \left( \frac{L_я}{R_n \left( \frac{R_я + R_n}{R_n} \right)} \frac{dU_2}{dt} + U_2 \right) = \frac{R_я + R_n}{C_e L_6 n} \left( \frac{L_я}{R_я + R_n} \frac{dU_2}{dt} + U_2 \right) . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Вводим обозначения:

$$T_{\text{я}} = \frac{L_{\text{г}}}{R_{\text{н}}}, T_{\text{я}} = \frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}} + R_{\text{н}}}, k = \frac{R_{\text{я}} + R_{\text{н}}}{C_{\text{e}} n R_{\text{н}} T_{\text{г}}}. \quad (3.5)$$

Исходя из (3.5):

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{R_{\text{я}} + R_{\text{н}}}{C_{\text{e}} n R_{\text{н}} \frac{L_{\text{г}}}{R_{\text{г}}}} \left( \frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}} + R_{\text{н}}} \frac{dU_2}{dt} + U_2 \right) = \frac{R_{\text{я}} + R_{\text{н}}}{C_{\text{e}} n R_{\text{н}} T_{\text{г}} R_{\text{г}}} \left( T_{\text{я}} \frac{dU_2}{dt} + U_2 \right) = \\ &= \frac{k}{R_{\text{г}}} \left( T_{\text{я}} \frac{dU_2}{dt} + U_2 \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

С другой стороны, (3.1) при  $L_{\text{г}} = T_{\text{г}} R_{\text{г}}$  выглядит так:

$$T_{\text{г}} R_{\text{г}} \frac{di_1}{dt} + R_{\text{г}} i_1 = U_1 \quad \text{или} \quad T_{\text{я}} \frac{di_1}{dt} + i_1 = \frac{U_1}{R_{\text{г}}}. \quad (3.7)$$

Подставив (3.6) в (3.7), получаем

$$T_{\text{г}} \frac{d}{dt} \left[ \frac{k}{R_{\text{г}}} \left( T_{\text{я}} \frac{dU_2}{dt} + U_2 \right) \right] + \frac{k}{R_{\text{г}}} \left( T_{\text{я}} \frac{dU_2}{dt} + U_2 \right) = \frac{U_1}{R_{\text{г}}}, \quad (3.8)$$

$$\frac{k T_{\text{г}}}{R_{\text{г}}} \left( T_{\text{я}} \frac{d^2 U_2}{dt^2} + \frac{dU_2}{dt} \right) + \frac{k}{R_{\text{г}}} \left( T_{\text{я}} \frac{dU_2}{dt} + U_2 \right) = \frac{U_1}{R_{\text{г}}}, \quad (3.9)$$

$$\frac{k T_{\text{г}} T_{\text{я}}}{R_{\text{г}}} \frac{d^2 U_2}{dt^2} + \frac{k T_{\text{г}}}{R_{\text{г}}} \frac{dU_2}{dt} + \frac{k T_{\text{я}}}{R_{\text{г}}} \frac{dU_2}{dt} + \frac{k}{R_{\text{г}}} U_2 = \frac{U_1}{R_{\text{г}}}, \quad (3.10)$$

$$k T_{\text{г}} T_{\text{я}} \frac{d^2 U_2}{dt^2} + k (T_{\text{г}} + T_{\text{я}}) \frac{dU_2}{dt} + k U_2 = U_1. \quad (3.11)$$

Для получения передаточной функции применяем к (3.11) правило дифференцирования преобразования Лапласа из расчета нулевых начальных условий:

$$k T_{\text{г}} T_{\text{я}} s^2 U_2(s) + k (T_{\text{г}} + T_{\text{я}}) s U_2(s) + k U_2(s) = U_1(s), \quad (3.12)$$

$$U_2(s) [k T_{\text{г}} T_{\text{я}} s^2 + k (T_{\text{г}} + T_{\text{я}}) s + k] = U_1(s), \quad (3.13)$$

т. к.  $U_2(s) = W(s) \cdot U_1(s)$ , то

$$W(s) = \frac{1}{kT_6T_яs^2 + k(T_6 + T_я)s + k} = \frac{1}{k[T_6T_яs^2 + (T_6 + T_я)s + 1]} = \frac{1}{k(T_яs + 1)(T_6 + 1)} = \frac{k_1}{(T_яs + 1)(T_6 + 1)}, \quad (3.14)$$

где  $k_1 = \frac{1}{k}$ .

### 3.3. Порядок выполнения практического задания

1. Изучить основные теоретические сведения по методике построения передаточных функций для механических звеньев САУ.
2. Рассмотреть алгоритм решения задачи вывода формулы передаточной функции реального механического звена САУ.
3. Получить у преподавателя вариант индивидуального задания (подразд. 3.4).
4. Составить эквивалентную электрическую схему заданного звена.
5. Составить уравнение для контуров схемы.
6. Применить правило дифференцирования преобразования Лапласа из расчета нулевых начальных условий.
7. Определить передаточную функцию заданного механического звена САУ.

### 3.4. Варианты индивидуальных заданий

*Вариант №1.* Вывести формулу передаточной функции двигателя с независимым возбуждением. Принципиальная схема двигателя представлена на рис. 3.3. Разработать структурную схему. При управлении со стороны якорной цепи напряжение  $U = \text{const}$ .

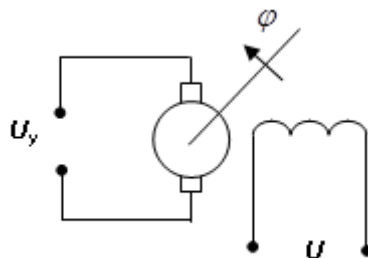


Рис. 3.3. Принципиальная схема двигателя с независимым возбуждением

*Вариант №2.* Вывести формулу передаточной функции по управляющему воздействию генератора с регулированием управляющего

напряжения ( $U_B$ ) переменным сопротивлением ( $R_H$ ), включенным последовательно с обмоткой возбуждения. Индуктивность обмотки возбуждения  $L_B$ , активное сопротивление якоря  $R_A$ , индуктивностью якоря пренебречь. Генератор работает на активную нагрузку с сопротивлением  $R_H$ .

### 3.5. Контрольные вопросы

1. Общая методика построения передаточных функций для механических звеньев САУ.
2. Принципы составления уравнений для контуров обмоток.
3. Правило дифференцирования преобразования Лапласа.

Библиотека БГУИР

## Практическое занятие №4

### Построение частотных характеристик САУ

**Цель работы:** изучить методику построения частотных характеристик САУ и их графических отображений.

#### 4.1. Краткие теоретические сведения

Методика построения характеристик САУ состоит из следующих этапов:

1. В соответствии с физическими законами функционирования элементов САУ вывести аналитическое выражение передаточной функции  $W(s)$ .
2. Заменой  $s$  на  $j\omega$  в передаточной функции получить аналитическое выражение АФЧХ  $W(j\omega)$ .
3. Преобразовать аналитическое выражение  $W(j\omega)$  к виду

$$W(j\omega) = Re + Im = U(\omega) + jV(\omega). \quad (4.1)$$

Графическое изображение характеристик производится на комплексной плоскости, осями координат которой являются  $U(\omega)$  – действительная ось,  $V(\omega)$  – мнимая ось. Для построения графика надо с необходимой дискретностью вычислить значения координат точек и далее соединить их линиями, применяя тот или иной метод интерполяции. Дискретность построения графика определяется количеством координатных точек на интервале изменения ВЧХ  $U(\omega)$  (АЧХ) и  $V(\omega)$  (МЧХ). Количество координатных точек может быть переменным для разных участков графика.

Методика построения графических изображений характеристик:

1. Определить координаты точек графика  $W(j\omega)$  при  $\omega = 0$  и  $\infty$ .
2. Определить координаты точек пересечения графика с осями координат, если ранее они не определились. Для этого, задаваясь величиной МЧХ  $V(\omega) = 0$ , определить значение  $\omega$ , а затем и величину ВЧХ  $U(\omega)$ . Далее, задаваясь величиной ВЧХ  $U(\omega) = 0$ , определить значение  $\omega$  и вычислить МЧХ  $V(\omega)$ .
3. Задаваясь на разных участках промежуточными значениями  $\omega$ , определить нужное количество промежуточных точек графика.
4. Соединить полученные точки плавной линией.

#### 4.2. Пример практического решения задачи построения характеристик САУ

**Условие.** Задана передаточная функция  $W(s) = \frac{k_1}{(T_A s + 1)(T_B s + 1)}$ . Построить график АФЧХ.

Порядок решения задачи:

1. Получить выражение АФЧХ  $W(j\omega)$  в форме  $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ .

$$\begin{aligned}
 W(j\omega) &= W(s = j\omega) = \frac{k_1}{(1 + jT_A\omega)(1 + jT_B\omega)} = \\
 &= \left( \frac{k_1(1 - jT_A\omega)(1 - jT_B\omega)}{(1 + jT_A\omega)(1 + jT_B\omega)(1 - jT_A\omega)(1 - jT_B\omega)} \right) = \\
 &= \frac{k_1(1 - T_A T_B \omega^2)}{[1 + (T_A\omega)^2][1 + (T_B\omega)^2]} - j \frac{k_1(T_A + T_B)\omega}{[1 + (T_A\omega)^2][1 + (T_B\omega)^2]}. \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

ВЧХ:

$$U(\omega) = \frac{k_1(1 - T_A T_B \omega^2)}{[1 + (T_A\omega)^2][1 + (T_B\omega)^2]}. \quad (4.3)$$

МЧХ:

$$V(\omega) = - \frac{k_1(T_A + T_B)\omega}{[1 + (T_A\omega)^2][1 + (T_B\omega)^2]}. \quad (4.4)$$

Для определенности положим  $T_B = 2T_A$ , тогда:

ВЧХ:

$$U(\omega) = \frac{k_1(1 - 2T_A^2\omega^2)}{[1 + T_A^2\omega^2][1 + 4T_A^2\omega^2]} = \frac{k_1(1 - 2T_A^2\omega^2)}{1 + 5T_A^2\omega^2 + 4T_A^4\omega^4}. \quad (4.5)$$

МЧХ:

$$V(\omega) = - \frac{k_1(T_A + 2T_A)\omega}{[1 + T_A^2\omega^2][1 + 4T_A^2\omega^2]} = - \frac{k_1 3T_A\omega}{1 + 5T_A^2\omega^2 + 4T_A^4\omega^4}. \quad (4.6)$$

2. Координаты точки графика АФЧХ  $W(j\omega)$  при  $\omega = 0$ .

ВЧХ:

$$U(\omega) = \frac{k_1(1 - 2T_A^2 \times 0)}{1 + 5T_A^2 \times 0 + 4T_A^4 \times 0} = \frac{k_1}{1} = k_1. \quad (4.7)$$

МЧХ:

$$V(\omega) = -\frac{k_1 3T_J \times 0}{1 + 5T_J^2 \times 0 + 4T_J^4 \times 0} = 0. \quad (4.8)$$

3. Координаты точки графика АФЧХ  $W(j\omega)$  при  $\omega = \infty$ .

ВЧХ:

$$U(\omega) = \frac{k_1(1 - 2T_J^2\omega^2)}{1 + 5T_J^2\omega^2 + 4T_J^4\omega^4} = k_1 \frac{\frac{1}{4T_J^4\omega^4} - \frac{2T_J^2\omega^2}{4T_J^4\omega^4}}{\frac{1}{4T_J^4\omega^4} + \frac{5T_J^2\omega^2}{4T_J^4\omega^4} + \frac{4T_J^4\omega^4}{4T_J^4\omega^4}} = \frac{0-0}{0+0+1} = 0. \quad (4.9)$$

МЧХ:

$$V(\omega) = -\frac{k_1 3T_J \omega}{1 + 5T_J^2\omega^2 + 4T_J^4\omega^4} = -k_1 \frac{\frac{3T_J \omega}{4T_J^4\omega^4}}{\frac{1}{4T_J^4\omega^4} + \frac{5T_J^2\omega^2}{4T_J^4\omega^4} + \frac{4T_J^4\omega^4}{4T_J^4\omega^4}} = k_1 \frac{0}{1} = 0. \quad (4.10)$$

4. Координаты точек пересечения графика АФЧХ с осями координат.

Первая при  $\omega = 0$  и последняя при  $\omega = \infty$  точки графика лежат в точках пересечения графика с вещественной осью  $U(\omega)$ . МЧХ может принимать значение 0 только в этих точках.

Определить значение МЧХ при ВЧХ = 0.

ВЧХ:

$$U(\omega) = \frac{k_1(1 - 2T_J^2\omega^2)}{1 + 5T_J^2\omega^2 + 4T_J^4\omega^4} = 0. \quad (4.11)$$

Это возможно, если  $(1 - 2T_J^2\omega^2) = 0$  или  $2T_J^2\omega^2 = 1$ , откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2T_J^2}} = \frac{1}{T_J \sqrt{2}}. \quad (4.12)$$

МЧХ:

$$V(\omega) = -\frac{k_1 3T_J \frac{1}{T_J \sqrt{2}}}{1 + 5T_J^2 \frac{1}{T_J^2 2} + 4T_J^4 \frac{1}{T_J^4 4}} = -\frac{k_1 \frac{3}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{5}{2} + \frac{4}{4}} = -0,48k_1. \quad (4.13)$$

5. Определить координаты промежуточных точек.

Для отрезка  $\omega$  ( $0 \dots \frac{1}{T_{Я}\sqrt{2}}$ ) выбираем промежуточную точку при

$$\omega = 0,5 \frac{1}{T_{Я}\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}T_{Я}}. \text{ Вычисляем МЧХ и ВЧХ.}$$

ВЧХ:

$$U\left(\omega = \frac{1}{2\sqrt{2}T_{Я}}\right) = \frac{k_1 \left(1 - 2T_{Я}^2 \frac{1}{4 \times 2T_{Я}^2}\right)}{1 + 5T_{Я}^2 \frac{1}{4 \times 2T_{Я}^2} + 4T_{Я}^4 \frac{1}{16 \times 4T_{Я}^4}} = \frac{k_1 \left(1 + \frac{1}{4}\right)}{1 + \frac{5}{8} + \frac{1}{16}} = 0,44k_1. \quad (4.14)$$

МЧХ:

$$V\left(\omega = \frac{1}{2\sqrt{2}T_{Я}}\right) = -\frac{k_1 3T_{Я} \frac{1}{2\sqrt{2}T_{Я}}}{1 + 5T_{Я}^2 \frac{1}{4 \times 2T_{Я}^2} + 4T_{Я}^4 \frac{1}{16 \times 4T_{Я}^4}} = -0,63k_1. \quad (4.15)$$

Координаты промежуточных точек на интервале изменения  $\omega$  ( $\frac{1}{T_{Я}\sqrt{2}} \dots \infty$ ) определим для частот  $\omega$ :  $1,2 \frac{1}{T_{Я}\sqrt{2}} = \frac{0,86}{T_{Я}}$ ,  $1,3 \frac{1}{T_{Я}\sqrt{2}} = \frac{0,93}{T_{Я}}$ ,  $2 \frac{1}{T_{Я}\sqrt{2}} = \frac{1,43}{T_{Я}}$ ,  $3 \frac{1}{T_{Я}\sqrt{2}} = \frac{2,14}{T_{Я}}$ .

Результаты расчета сведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Координаты промежуточных точек для построения характеристики

Номер точки	Частота $\omega$	ВЧХ $U(\omega)$	МЧХ $V(\omega)$
1	2	3	4
1	0	$k_1$	0
2	$\frac{1}{2T_{Я}\sqrt{2}}$	$0,44k_1$	$-0,63k_1$
3	$\frac{1}{T_{Я}\sqrt{2}}$	0	$-0,48k_1$
4	$\frac{0,86}{T_{Я}}$	$-0,07 k_1$	$-0,37 k_1$



1	2	3	4
5	$\frac{0,93}{T_я}$	$-0,09 k_1$	$-0,34 k_1$
6	$\frac{1,43}{T_я}$	$-0,11 k_1$	$-0,15 k_1$
7	$\frac{2,14}{T_я}$	$-0,08 k_1$	$-0,04 k_1$
8	$\infty$	0	0

После достижения  $\omega > \frac{1,43}{T_я}$  происходит перегиб графика АФЧХ и ВЧХ устремляется к 0. Строим на комплексной плоскости график АФЧХ (рис. 4.1).

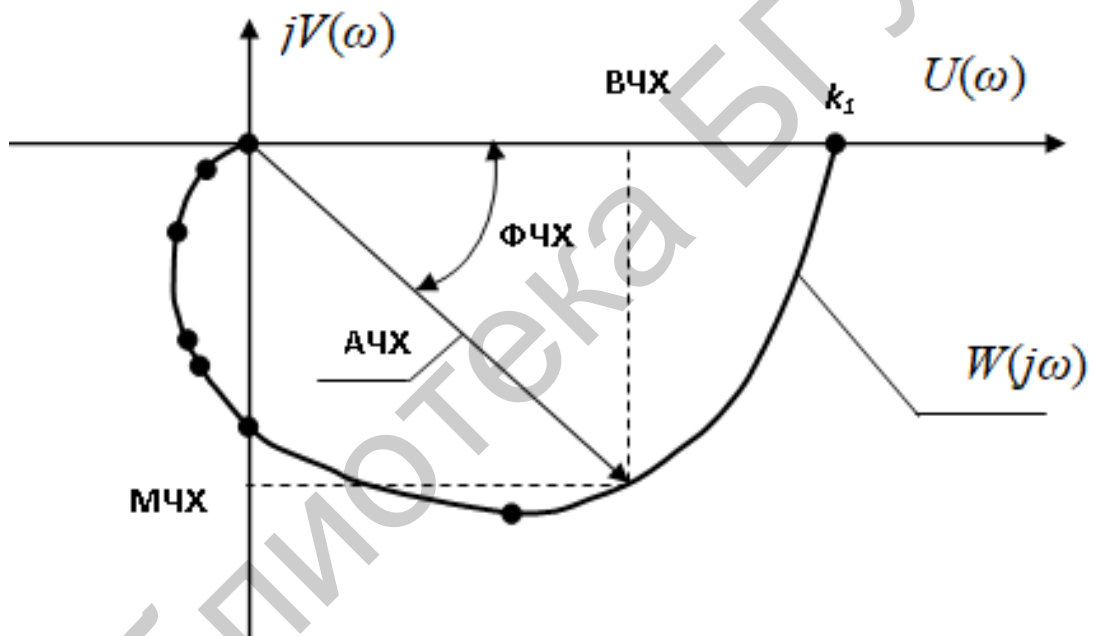


Рис. 4.1. Графическое изображение характеристик на плоскости

### 4.3. Порядок выполнения практического задания

1. Изучить основные теоретические сведения по методике построения частотных характеристик САУ.
2. Рассмотреть алгоритм практического решения задачи построения графического изображения частотных характеристик САУ.
3. Получить у преподавателя вариант индивидуального задания (подразд. 4.4).
4. По заданной передаточной функции получить выражение АФЧХ в виде  $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ .
5. Определить ВЧХ и МЧХ.

6. Определить координаты точки графика при  $\omega = 0$ .
7. Определить координаты точки графика при  $\omega = \infty$ .
8. Определить координаты точек пересечения графика АФЧХ с осями координат.
9. Определить координаты промежуточных точек.
10. На комплексной плоскости построить график АФЧХ.

#### 4.4. Варианты индивидуальных заданий

*Условие.* Построить АФЧХ для звеньев САУ с заданной передаточной функцией (табл. 4.2).

Таблица 4.2

Варианты индивидуальных заданий на построение АФЧХ

Номер варианта	1	2	3	4
Передаточная функция	$W(s) = \frac{1}{LCs^2 + 1}$	$W(s) = \frac{1}{RCs + 1}$	$W(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$	$W(s) = \frac{CLs^2}{LCs^2 + RCs + 1}$

#### 4.5. Контрольные вопросы

1. Основные этапы построения частотных характеристик САУ.
2. Построение графического изображения частотных характеристик.
3. Дискретность построения частотной характеристики.
4. Определение координат точек частотных характеристик при различных условиях.
5. Определение множества промежуточных точек при построении графического изображения частотных характеристик САУ.
6. Определение координат точек пересечения графиком частотной характеристики (АФЧХ) осей координат.

## Практическое занятие №5

### Построение частотных характеристик основных звеньев САУ

**Цель работы:** изучить основные типовые звенья САУ и определить их частотные характеристики.

#### 5.1. Краткие теоретические сведения

Звеном САУ называют математическую модель элемента, соединения элементов или любые части системы. Звенья описываются дифференциальными уравнениями и в общем случае их передаточные функции могут быть записаны в виде

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (5.1)$$

Но всегда их можно представить как соединение типовых, или элементарных, звеньев, порядок дифференциальных уравнений которых не выше второго.

Полином произвольного порядка можно разложить на простые множители вида

$$k_1 s; (d_1 s + d_2); (d_1 s^2 + d_2 s + d_3). \quad (5.2)$$

Поэтому передаточную функцию (5.1) можно представить как произведение простых множителей вида (5.2) и простых дробей вида

$$\frac{k}{s}; \frac{k}{d_1 s + d_2}; \frac{k}{d_1 s^2 + d_2 s + d_3}. \quad (5.3)$$

Звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей (5.2) или простых дробей (5.3), называют типовыми или элементарными.

Для получения АФЧХ в передаточной функции САУ необходимо выполнить замену  $s$  на  $j\omega$  и получить АФЧХ в виде вещественной и мнимой частей.

#### 5.2. Алгоритм решения задач на получение частотных характеристик типовых (элементарных) звеньев САУ

Частотные характеристики звеньев САУ определяются по следующим формулам:

1. Для получения АФЧХ в формуле передаточной функции заменить  $s$  на  $j\omega$ , в полученном выражении избавиться от иррациональности в знаменателе, тогда

$$W(s = j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (5.4)$$

где  $U(\omega)$  – вещественная частотная характеристика (ВЧХ);

$V(\omega)$  – мнимая частотная характеристика (МЧХ).

2. Определить амплитудно-частотную характеристику АЧХ как

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}. \quad (5.5)$$

3. Определить фазово-частотную характеристику ФЧХ как

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \quad (5.6)$$

ВЧХ и МЧХ связаны с АЧХ и ФЧХ следующими зависимостями:

$$U(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega), \quad (5.7)$$

$$V(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega). \quad (5.8)$$

Взаимосвязь частотных характеристик САУ показана на рис. 5.1.

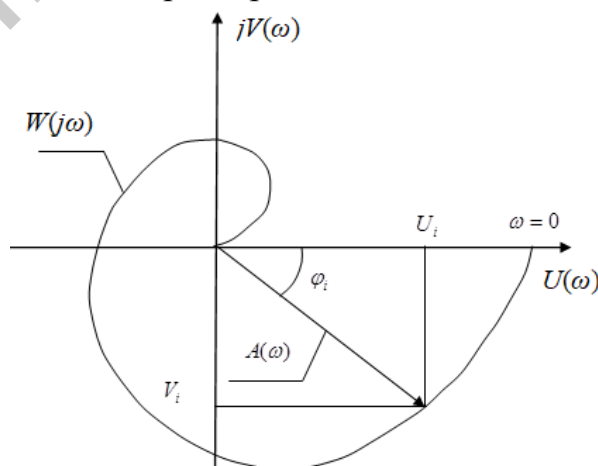


Рис. 5.1. Изображение частотных характеристик на комплексной плоскости

### 5.3. Порядок выполнения практического задания

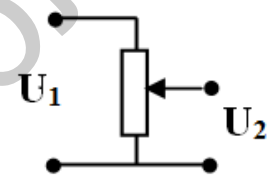
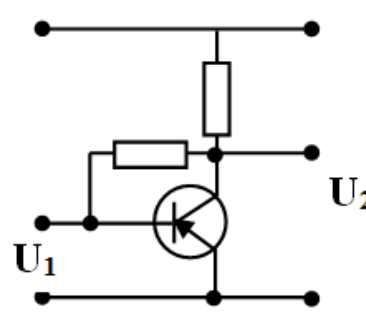
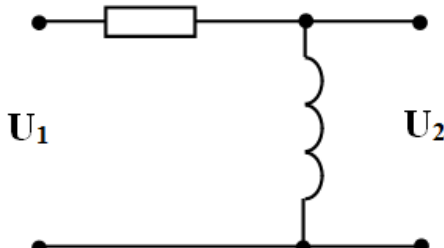
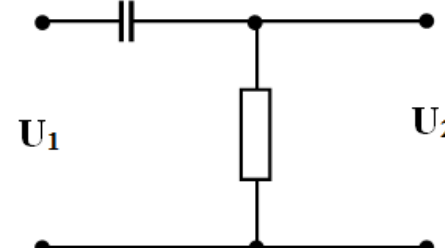
1. Изучить основные теоретические сведения по построению частотных характеристик звеньев САУ.
2. Рассмотреть алгоритм расчета частотных характеристик типового (элементарного звена).
3. Получить у преподавателя вариант индивидуального задания (подразд. 5.4).
4. Определить АФЧХ заданного звена.
5. Определить АЧХ заданного звена.
6. Определить ФЧХ заданного звена.

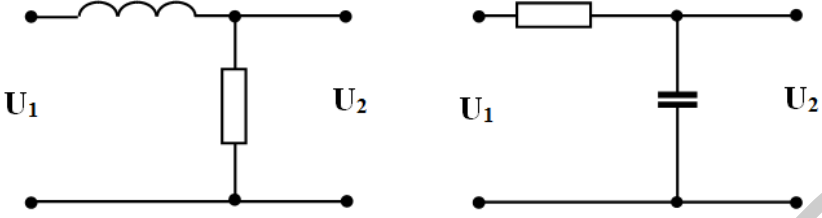
### 5.4. Варианты индивидуальных заданий

*Условие.* Определить АФЧХ, ВЧХ, МЧХ, АЧХ, ФЧХ заданного звена САУ (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Варианты индивидуальных заданий по определению частотных характеристик типовых (элементарных звеньев)

Номер варианта	Описание и передаточная характеристика звена
1	<p style="text-align: center;">2</p> <p style="text-align: center;">Усилительное звено <math>W(s)=k</math> (коэффициент усиления <math>k &gt; 0</math>, т. е. может быть больше либо меньше 1)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">   </div>
2	<p style="text-align: center;">Идеальное дифференцирующее звено <math>W(s)=ks</math></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">   </div>

1	2
3	<p data-bbox="523 248 1190 315">Идеальное интегрирующее звено <math>W(s) = \frac{k}{s}</math></p> 
4	<p data-bbox="448 685 1270 752">Апериодическое звено первого порядка <math>W(s) = \frac{k}{Ts+1}</math></p>
5	<p data-bbox="571 853 1145 920">Консервативное звено <math>W(s) = \frac{k}{1-s^2T^2}</math></p>
6	<p data-bbox="587 1021 1129 1055">Форсирующее звено <math>W(s) = k(Ts)+1</math></p>
7	<p data-bbox="555 1155 1161 1189">Звено чистого запаздывания <math>W(s) = e^{-Ts}</math></p>

### 5.5. Контрольные вопросы

1. Общее понятие звена САУ.
2. Способ записи передаточных функций звеньев САУ.
3. Понятие типового (элементарного) звена.
4. Методика определения АФЧХ типового звена.
5. Методика определения АЧХ типового звена.
6. Методика определения ФЧХ типового звена.
7. Взаимосвязь частотных характеристик звеньев САУ.

## Практическое занятие №6

### Исследование устойчивости САУ

**Цель работы:** изучить понятие и основные критерии устойчивости систем автоматического управления; изучить методики расчета критериев Михайлова, Гурвица и Рауса и построения годографов.

#### 6.1. Краткие теоретические сведения

Понятие устойчивости системы связано со способностью системы возвращаться в состояние равновесия после действия внешних сил, которые вывели ее из этого состояния. Если система неустойчива, то она не возвращается в состояние равновесия с допустимой погрешностью. Любая САУ создается таким образом, чтобы ее основной режим работы был устойчивым.

Критерии устойчивости основываются на следующих теоремах:

**Теорема 1.** Если вещественные части  $a_k$  всех корней  $a_k \pm jb_k$  характеристического уравнения первого приближения отрицательны, то невозмущенное движение исходной нелинейной системы асимптотически устойчиво независимо от неучитываемых членов разложения в ряд Тейлора выше первого порядка.

**Теорема 2.** Если среди корней характеристического уравнения первого приближения найдется хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущающее движение исходной нелинейной системы неустойчиво независимо от неучитываемых членов разложения в ряд Тейлора выше первого порядка малости.

По виду характеристического уравнения можно сделать заключение об неустойчивости САУ. Характеристическое уравнение устойчивой системы должно иметь положительные коэффициенты. Это условие является необходимым, но недостаточным для заключения об устойчивости системы. Вместе с тем, если среди коэффициентов характеристического уравнения есть хоть один отрицательный, то система неустойчива.

Для суждения об устойчивости САУ практически нет необходимости находить корни характеристического уравнения, т. к. хорошо разработаны алгебраические и частотные методы, дающие возможность судить о знаках вещественных частей корней и тем самым об устойчивости системы, не решая самого уравнения.

##### 6.1.1. Критерий Михайлова

Критерий Михайлова относится к частотным критериям. Имеется характеристическое уравнение САУ  $n$ -го порядка:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0. \quad (6.1)$$

Подстановкой  $s = j\omega$  получаем уравнение для вектора  $D(j\omega)$ . При изменении  $\omega$  конец вектора будет описывать в комплексной плоскости некоторую кривую, называемую годографом Михайлова.

Для того чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты от 0 до  $+\infty$  годограф Михайлова (рис. 6.1) прошел столько квадрантов, каков порядок характеристического уравнения, причем начинался бы с положительной действительной оси и не нарушал порядок пересечения вещественной и мнимой осей комплексной плоскости.

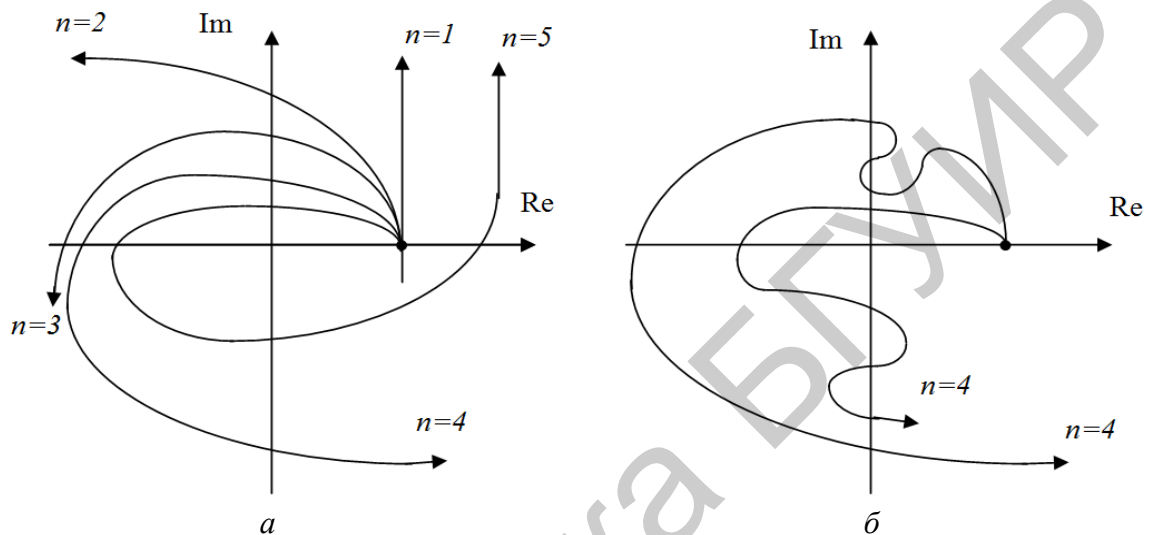


Рис. 6.1. Годограф Михайлова для устойчивых (а) и неустойчивых (б) систем

### 6.1.2. Критерий устойчивости Гурвица

Критерий устойчивости Гурвица относится к алгебраическим критериям оценки устойчивости.

Для оценки устойчивости САУ по этому критерию необходимо из коэффициентов характеристического уравнения составить определитель Гурвица.

Правила составления определителя Гурвица:

1. По главной диагонали выписываются все коэффициенты характеристического уравнения от  $a_1$  до  $a_n$  в порядке возрастания индексов.
2. Столбцы определителя заполняются коэффициентами от главной диагонали вниз по убывающим, а вверх по возрастающим индексам.
3. Места коэффициентов, индексы которых больше  $n$  или меньше 0, заполняются нулями.

Пусть характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0s^5 + a_1s^4 + a_2s^3 + a_3s^2 + a_4s + a_5 = 0 \quad \text{все } a_n > 0. \quad (6.2)$$



Получим определитель Гурвица:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix}. \quad (6.3)$$

Для того чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части корней и система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты и все диагональные определители Гурвица были строго больше нуля, т. е.  $\Delta_k > 0, k = 1 \dots n$ . В нашем случае  $\Delta_k > 0, k = 1 \dots 5$ .

То есть

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad (6.4)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix} > 0.$$

### 6.1.3. Критерий устойчивости Рауса

Раус предложил критерий устойчивости САУ в виде алгоритма, по которому заполняется таблица с использованием коэффициентов характеристического уравнения. Основные принципы расчета:

1. Число строк таблицы Рауса на единицу больше порядка характеристического уравнения, т. е.  $n+1$ .

2. Число столбцов равно целой части от  $\frac{n+2}{2}$ , увеличенное на 2, т. е.  $E\left(\frac{n+2}{2}\right) + 2$ .

3. Наименование столбцов:  $R_i, i, k_j, j = 1 \dots E\left(\frac{n+2}{2}\right)$ .

4. В первой строке  $R_i, i=1, k_j$  – коэффициенты уравнения с четными индексами в порядке возрастания.

5. Во второй строке  $R_i, i=2, k_j$  – коэффициенты уравнения с нечетными индексами в порядке возрастания.

6. Остальные строки определяются по формулам:

$$R_i = \frac{C_{1,i-2}}{C_{1,i-1}}, \quad (6.5)$$

где  $i = 3..(n-1)$  – номер текущей строки;

$$C_{k,i} = C_{k+1,i-2} - R_i C_{k+1,i-1}, \quad (6.6)$$

где  $k$  – номер столбца  $k_j$ .

Для предыдущего случая  $a_0 s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + a_5 = 0$  все  $a_n > 0$ .  
Получаем таблицу Рауса (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Таблица Рауса для заданной системы

$R_i$	$i$	$k_1$	$k_2$	$k_3$
–	1	$C_{11} = a_0$	$C_{21} = a_2$	$C_{31} = a_4$
–	2	$C_{12} = a_1$	$C_{22} = a_3$	$C_{32} = a_5$
$R_3 = \frac{C_{11}}{C_{12}}$	3	$C_{13} = C_{21} - R_3 C_{22}$	$C_{23} = C_{31} R_3 C_{32}$	–
$R_4 = \frac{C_{12}}{C_{13}}$	4	$C_{14} = C_{22} - R_4 C_{23}$	$C_{24} = C_{32} - R_4 C_{33}$	–
–	5	–	–	–
–	6	–	–	–

*Критерий Рауса.* Для того чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса  $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1(n+1)}$  были положительны. Если это условие не выполняется, то система неустойчива, а количество правых корней равно числу перемены знака в первом столбце.

## 6.2. Примеры практического решения задач на определение устойчивости системы

### 6.2.1. Пример определения устойчивости системы по критерию Михайлова

Условие. Задано характеристическое уравнение САУ:

$$D(s) = 5s^3 + s^2 + s + 3 = 0. \quad (6.7)$$

Определить устойчивость системы по критерию Михайлова.

Решение:

1. Делаем подстановку  $s = j\omega$ , получаем

$$\begin{aligned} D(j\omega) &= 5(j\omega)^3 + (j\omega)^2 + j\omega + 3 = -j5\omega^3 - \omega^2 + j\omega + 3 = (3 - \omega^2) + j(\omega - 5\omega^3) = \\ &= U(\omega) + jV(\omega). \end{aligned} \quad (6.8)$$

2. Рассчитываем точки координат при изменении  $\omega$  в пределах  $(0 \dots \infty)$  с шагом, равным 1. Данные заносим в табл. 6.2.

Таблица 6.2  
Расчет точек для построения годографа

$\omega$	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	3	0
1	2	-4
2	-1	-38
3	-6	-132
...	...	...
...	...	...
$\infty$	$-\infty$	$-\infty$

3. Строим годограф Михайлова (рис. 6.2).

Шаг дискретности по вещественной оси равен 1. Масштаб по мнимой оси выбран с возрастающим размером, кратным степени  $2^n$ .

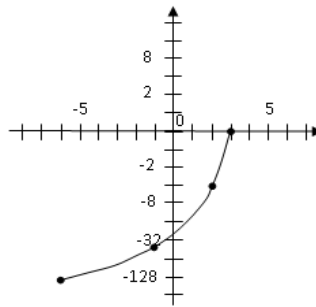


Рис. 6.2. Годограф Михайлова для исследуемой системы

Порядок характеристического уравнения – 3, годограф проходит 2 квадранта. Система неустойчива.

### 6.2.2. Пример определения устойчивости системы по критерию Гурвица

*Условие.* Оценить устойчивость САУ, характеристическое уравнение которой приведено в предыдущем примере.

$$D(s) = 5s^3 + s^2 + s + 3 = 0. \quad (6.9)$$

Расчет через определитель Гурвица:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = a_1 = 1 > 0, \quad (6.10)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 15 = -14 < 0.$$

Вывод: САУ неустойчива.

### 6.2.3. Пример определения устойчивости системы по критерию Гурвица

*Условие.* Оценить устойчивость САУ, характеристическое уравнение которой приведено в предыдущих примерах.

$$D(s) = 5s^3 + s^2 + s + 3 = 0. \quad (6.11)$$

*Решение:*

1. Число строк таблицы Рауса равно 4.
2. Число столбцов – 4.
3. Наименование столбцов (табл. 6.3):  $R_i, i, k_1, k_2$ .

Таблица 6.3

Таблица Рауса для заданной системы

$R_i$	$i$	$k_1$	$k_2$
–	1	$C_{11} = 5$	$C_{21} = 1$
–	2	$C_{12} = 1$	$C_{22} = 3$
$R_3 = 5$	3	$C_{13} = -14$	$C_{23} = 0$
$R_4 = -\frac{1}{14}$	4	$C_{14} = 3$	$C_{24} = 0$

Коэффициент  $C_{13} < 0$ . Система неустойчива.

### 6.3. Порядок выполнения практического задания

1. Изучить основные теоретические сведения по критериям устойчивости систем.
2. Рассмотреть алгоритмы решения задач на определение устойчивости систем по критериям Михайлова, Гурвица и Рауса.
3. Получить у преподавателя вариант индивидуального задания (подразд. 6.4).
4. По полученному заданию сделать вывод о устойчивости системы с помощью указанного в задании критерия.

### 6.4. Варианты индивидуальных заданий

Условие. Определить устойчивость САУ по заданному критерию. Сопоставить годографы для вариантов 2, 3, 4.

Таблица 6.4

Варианты индивидуальных заданий для решения задач на определение устойчивости системы

Номер варианта	Характеристическое уравнение	Используемый критерий
1	2	3
1	$D(s) = 15s^3 + s^2 + 10s + 10$	Критерий Гурвица
2	$D(s) = 2s^3 + 6s^2 + 9s + 11$	Критерий Михайлова
3	$D(s) = 2s^3 - 6s^2 + 9s + 11$	Критерий Михайлова

1	2	3
4	$D(s) = 2s^3 + 6s^2 + 3s + 11$	Критерий Михайлова
5	$D(s) = 5s^4 + s^3 + 10s^2 + 9s + 3$	Критерии Гурвица, Рауса
6	$D(s) = s^6 + 6s^5 + 21s^4 + 44s^2 + 52s + 100$	Критерий Рауса

### 6.5. Контрольные вопросы

1. Понятие устойчивости систем.
2. Теоремы, на которых основываются критерии устойчивости.
3. Коэффициенты характеристического уравнения и их влияние на устойчивость системы.
4. Критерий Михайлова.
5. Определение устойчивости системы по годографу.
6. Критерий устойчивости Гурвица.
7. Правила составления определителя Гурвица.
8. Критерий устойчивости Рауса.

## Практическое занятие №7

### Расчет запасов устойчивости САУ

**Цель работы:** изучить основные принципы анализа и расчета устойчивости систем; изучить алгоритмы расчета запасов устойчивости систем по критериям Гурвица и Рауса, а также методику расчета запаса устойчивости по фазе.

#### 7.1. Краткие теоретические сведения

Так как номиналы параметров отдельных элементов САУ определяются с некоторой степенью точности и в процессе работы не остаются постоянными, то весьма важное значение имеет оценка запаса устойчивости системы по фазе и модулю (усилению).

Методика расчета включает последовательное выполнение следующих процедур:

1. Получить характеристическое уравнение системы.

2. Провести оценку устойчивости САУ по одному из критериев.

Если система устойчива, то член характеристического уравнения, не имеющий в качестве множителя оператор замены дифференцируемой функции, представить в виде суммы этого члена и произвольного дополнительного коэффициента усиления:

$$a_n' = a_n + k. \quad (7.1)$$

В дальнейшем при расчетах рассматривается значение  $k > 0$ .

3. При использовании алгебраического критерия устойчивости Гурвица составить определитель с использованием вместо коэффициента характеристического уравнения  $a_n$  коэффициент  $a_n'$ .

4. Рассчитать, при каких предельных значениях  $k_i$  главные (диагональные) миноры определителя Гурвица, содержащие  $a_n'$ , будут больше 0.

5. Предельный коэффициент усиления равен наименьшему  $a_n'$ , т. е.

$$a_n + k_{i \min}, \quad (7.2)$$

а запас устойчивости равен величине приращения коэффициента усиления  $k_{i \min}$ .

6. При использовании при расчетах арифметического критерия Рауса рассчитать коэффициенты таблицы Рауса.

7. Рассчитать, при каких значениях  $k_i$  коэффициенты 1-го столбца таблицы становятся меньше нуля.

8. Предельный коэффициент усиления равен наименьшему из них, а запас устойчивости равен величине приращения коэффициента усиления  $k_{i \min}$ .

## 7.2. Алгоритмы решения задач на расчет запаса устойчивости систем

### 7.2.1. Анализ устойчивости системы по критерию Гурвица

*Условие.* Рассчитать предельный коэффициент усиления и запас устойчивости САУ, представленного следующим характеристическим уравнением:

$$D(s) = 2s^3 + 6s^2 + 10s + 15. \quad (7.3)$$

Анализ устойчивости системы по критерию Гурвица:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 15 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \\ 0 & 6 & 15 \end{vmatrix} = 900 - 450 = 450 > 0,$$

$$\Delta_1 = 6 > 0, \quad (7.4)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 15 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 60 - 30 = 30 > 0.$$

*Промежуточный вывод:* система устойчива, можно продолжать расчет на определение запаса устойчивости.

Сделаем замену  $a_3' = a_3 + k$ , тогда

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & (a_3 + k) & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & (a_3 + k) \end{vmatrix}. \quad (7.5)$$

В дальнейшем анализ нужно вести только для главных миноров определителя  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$ :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & (a_3 + k) \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 (a_3 + k), \quad (7.6)$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > a_0 k \quad k_1 < \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_0}, \quad (7.7)$$



$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & (a_3 + k) & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & (a_3 + k) \end{vmatrix} = a_1 a_2 (a_3 + k) - a_0 (a_3 + k)^2 > 0, \quad (7.8)$$

$$k_2 < \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_0}, \quad (7.9)$$

$$k_1 = k_2 < \frac{6 \times 10 - 2 \times 15}{2} = 15. \quad (7.10)$$

*Вывод:* предельный коэффициент усиления равен 30, запас устойчивости – 15.

### 7.2.2. Анализ устойчивости системы по критерию Рауса

При использовании критерия устойчивости Рауса рассчитываем коэффициенты таблицы Рауса (табл. 7.1):

1. Число строк – 4.
2. Число столбцов – 4.

Таблица 7.1

Таблица Рауса

$R_i$	$i$	$k_1$	$k_2$
–	1	$C_{11} = 2$	$C_{21} = 10$
–	2	$C_{12} = 6$	$C_{22} = 15 + k$
$R_3 = \frac{1}{3}$	3	$C_{13} = 5 - \frac{k}{3}$	$C_{23} = 0$
$R_4 = -\frac{6}{5 - \frac{k}{3}}$	4	$C_{14} = 15 + k$	$C_{24} = 0$

Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 5 - \frac{k}{3} > 0, \\ 15 + k > 0. \end{cases} \quad (7.11)$$

Так как  $k > 0$  всегда, то второе неравенство можно не рассматривать.

Из первого неравенства следует  $k < 15$ , т. е. получаем результат, такой же как и в первом случае.

### 7.2.3. Расчет запаса устойчивости по фазе

Весьма важное значение имеет оценка удаления частотной характеристики от точки  $(-1, j0)$ . Это удаление определяет запас устойчивости по фазе и запас устойчивости по модулю (усилению).

Для определения этих запасов на частотной характеристике разомкнутой системы проводится окружность радиусом 1 с центром в начале координат (рис. 7.1).

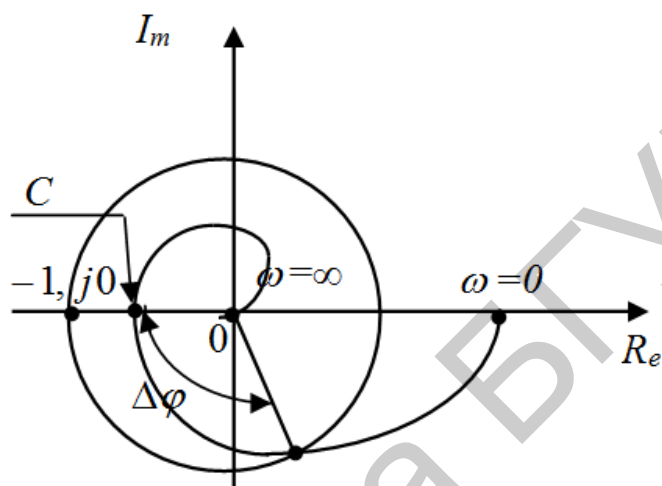


Рис. 7.1. Частотная характеристика системы

Запас по фазе:

$$\Delta\varphi = \pi - |\varphi(\omega_i)| \quad (7.12)$$

для частоты  $\omega_i$ , при которой  $|W_p(j\omega_i)| = 1$ .

Запас по модулю определяется величиной модуля отрезка от  $(-1, j0)$  до точки  $C$ , при которой  $\varphi(\omega_i) = -\pi$ .

Практически считается приемлемым запас устойчивости по модулю, равный  $0,3 - 0,35$ , а  $\Delta\varphi = 40^\circ - 60^\circ$ .

Общая методика расчета устойчивости САУ по АФЧХ:

1. Составить дифференциальное уравнение САУ.
2. Получить характеристическое уравнение САУ.
3. Провести анализ устойчивости САУ.
4. Составить передаточную функцию САУ.
5. Получить годограф АФЧХ.
6. Определить  $\Delta\varphi$ .

В рассматриваемом ранее примере принимаем для определенности  $k_1 = 1$  и на графике АФЧХ проводим окружность радиусом 1 (рис. 7.2).

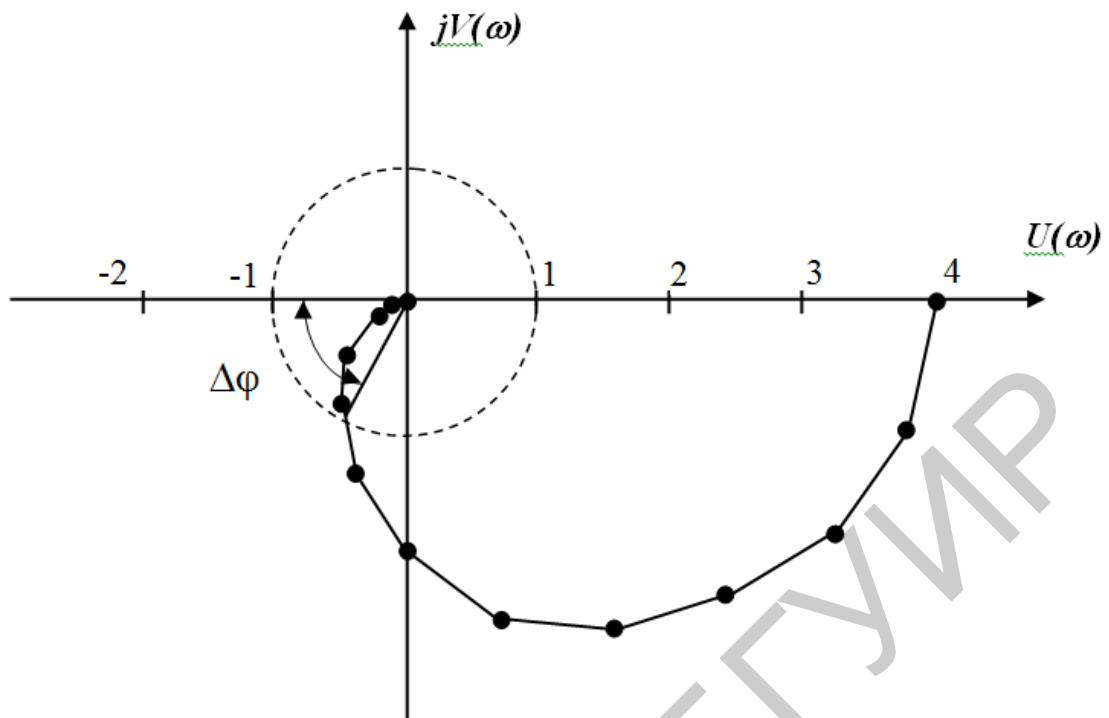


Рис. 7.2. Частотная характеристика рассматриваемой в примере системы

В точке пересечения окружности и АФЧХ АЧХ = 1:

$$A(\omega) = \frac{4}{\sqrt{1+5\omega^2+4\omega^4}} = 1. \quad (7.13)$$

Откуда

$$4\omega^4 + 5\omega^2 - 15 = 0 \quad (7.14)$$

или  $\omega = 1,135$ .

Так как

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3\omega}{1-2\omega^2}\right), \quad (7.15)$$

то

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{3 \times 1,235}{1 - 2 \times 1,135^2} = 2,16. \quad (7.16)$$

По таблице тангенсов находим  $\varphi = -115^\circ$  или  $\Delta\varphi = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$ .

### 7.3. Порядок выполнения практического задания

1. Изучить основные теоретические сведения по методике расчета запасов устойчивости САУ.
2. Рассмотреть алгоритм расчета запаса устойчивости системы по критерию Гурвица.
3. Рассмотреть алгоритм расчета запаса устойчивости системы по критерию Рауса.
4. Рассмотреть алгоритм расчета запаса устойчивости системы по фазе и модулю (усилению).
5. Получить у преподавателя вариант индивидуального задания (подразд. 7.4).
6. По заданному уравнению рассчитать предельный коэффициент усиления и запас устойчивости системы по модулю и фазе.
7. Сопоставить годографы Михайлова для исходной и «предельной» систем.

### 7.4. Варианты индивидуальных заданий

*Условие.* Рассчитать предельный коэффициент усиления, запас устойчивости по модулю и фазе для системы с заданным уравнением (табл. 7.2). Сопоставить годографы Михайлова для исходной и «предельной» системы.

Таблица 7.2

Варианты индивидуальных заданий

Номер варианта	Уравнение системы
1	$D(s) = s^3 + 5s^2 + s + 3 = 0$
2	$D(s) = 2s^3 + 6s^2 + 9s + 8 = 0$
3	$D(s) = 5s^4 + s^3 + 10s^2 + 9s + 3 = 0$
4	$D(s) = 6s^5 + 21s^4 + 44s^3 + 62s^2 + 100 = 0$
5	$D(s) = s^6 + 6s^5 + 21s^4 + 44s^3 + 52s^2 + 100 = 0$

## 7.5. Контрольные вопросы

1. Общая методика расчета запаса устойчивости систем.
2. Анализ запаса устойчивости системы по критерию Гурвица.
3. Анализ запаса устойчивости системы по критерию Рауса.
4. Расчет запаса устойчивости системы по фазе и модулю (усилению).
5. Общая методика расчета устойчивости САУ по АФЧХ.

Библиотека БГУИР

## Практическое занятие №8

### Преобразование структурных схем САУ

**Цель работы:** изучить методику и основные правила преобразования структурных схем.

#### 8.1. Краткие теоретические сведения

Структурной схемой в теории систем автоматического управления называют графическое изображение математической модели САУ в виде соединений звеньев, на которые ее можно разделить по определенным признакам, и связей между частями с указанием направления передачи воздействий. По дифференциальным уравнениям, описывающим алгоритм функционирования САУ, можно построить ее алгоритмическую структурную схему, и наоборот, зная структурную схему, можно составить дифференциальные уравнения, описывающие САУ.

Любую линейную часть САУ с сосредоточенными постоянными параметрами можно расчленить на элементарные, далее неделимые звенья четырех типов: интегрирующие, дифференцирующие, масштабные, суммирующие.

Звено на структурной схеме условно обозначают в виде прямоугольника с указанием входных и выходных величин, а также передаточной функции внутри него.

Примеры обозначений звеньев и элементов структурных схем представлены на рис. 8.1.

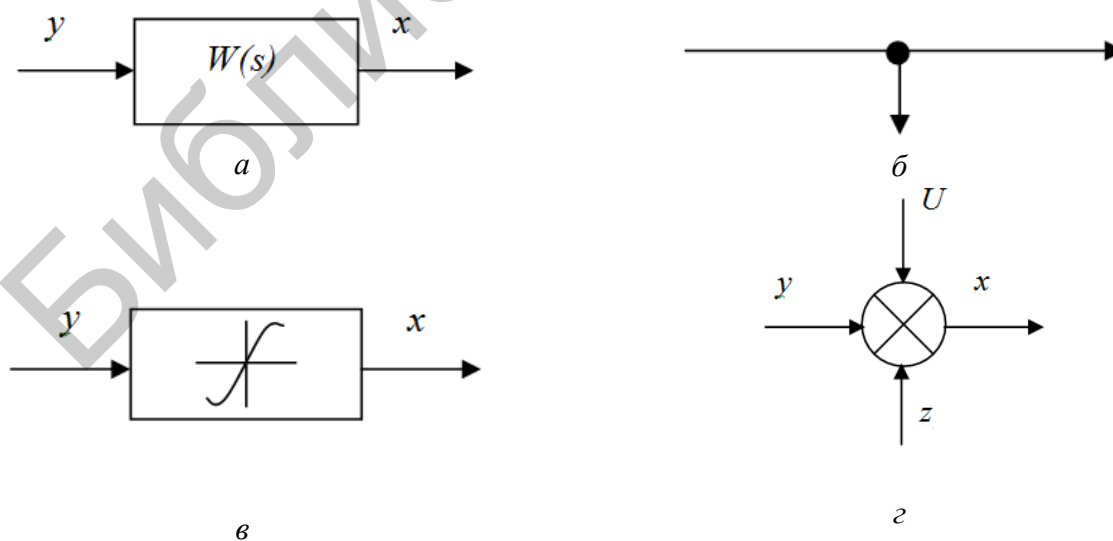


Рис. 8.1. Элементы структурных схем:

$a$  – линейное звено;  $b$  – узел;  $v$  – функциональный преобразователь;  $z$  – сумматор

### 8.1.1. Правила преобразования структурных схем

Структурные схемы для реальных САУ имеют сложный и запутанный вид. С целью упрощения структурной схемы или приведения ее к более удобному виду можно производить структурные преобразования.

#### **Преобразование последовательного соединения звеньев**

При последовательном соединении звеньев (рис. 8.2) с передаточными функциями  $W_i(s)$  ( $i=1, \dots, n$ ) результирующая передаточная функция равна произведению передаточных функций отдельных звеньев:

$$W_{\Sigma}(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s). \quad (8.1)$$

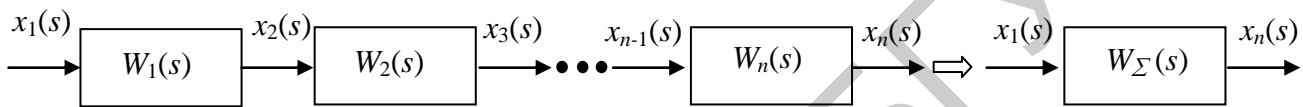


Рис. 8.2. Преобразование последовательного соединения звеньев

#### **Преобразование параллельного соединения звеньев**

При параллельном соединении на вход всех звеньев подается один и тот же сигнал, а выходные сигналы складываются (рис. 8.3).

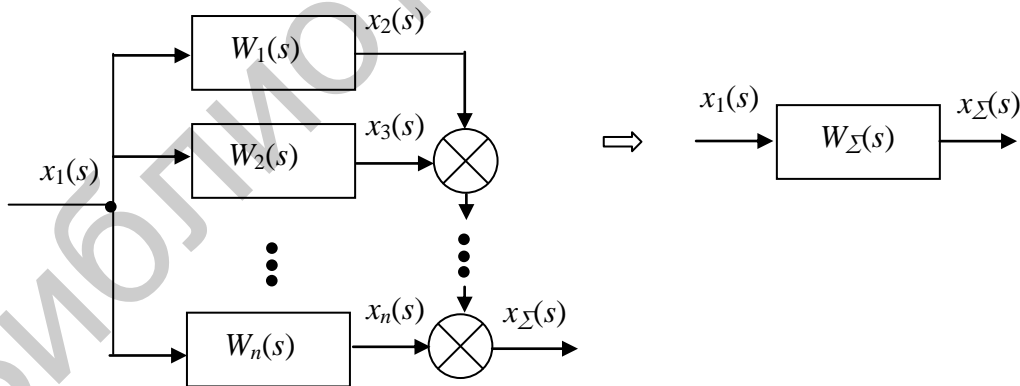


Рис. 8.3. Преобразование параллельного соединения звеньев

Передаточная функция  $n$  параллельно соединенных звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев:

$$W_{\Sigma}(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s). \quad (8.2)$$

### Преобразование параллельно-встречных соединений

Параллельно-встречное соединение – это звено или звенья, охваченные положительной или отрицательной обратной связью, по которой сигнал идет в противоположном направлении по отношению к направлению распространения входного сигнала, т. е. с выхода на вход звена или участка цепи звеньев.

Участок с положительной обратной связью представлен на рис. 8.4.

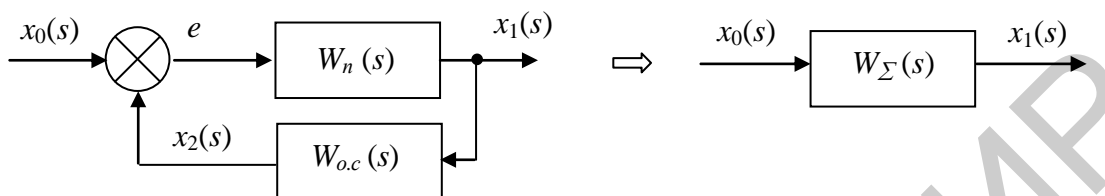


Рис. 8.4. Преобразование звена, охваченного положительной обратной связью

Результирующая передаточная функция

$$W_{\Sigma}(s) = \frac{W_n(s)}{1 - W_n(s)W_{o.c}(s)}. \quad (8.3)$$

Участок с отрицательной обратной связью представлен на рис. 8.5.

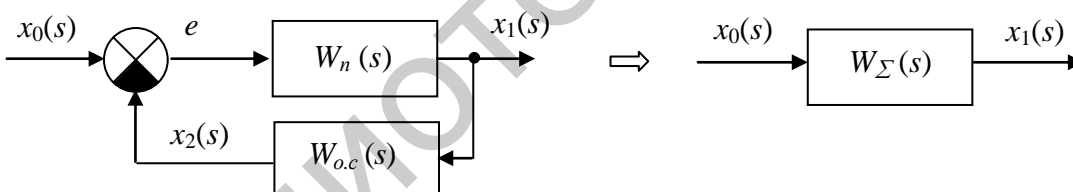


Рис. 8.5. Преобразование звена, охваченного отрицательной обратной связью

Результирующая передаточная функция

$$W_{\Sigma}(s) = \frac{W_n(s)}{1 + W_n(s)W_{o.c}(s)}. \quad (8.4)$$

При единичной обратной связи (рис. 8.6), когда  $W_{o.c}(s) = 1$ , имеем

$$W_{\Sigma}(s) = \frac{W_n(s)}{1 \pm W_n(s)}. \quad (8.5)$$



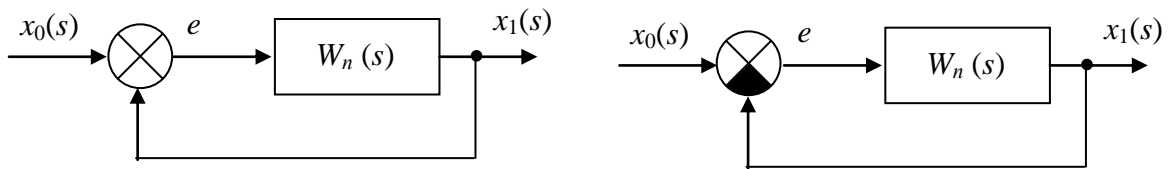


Рис. 8.6. Звено, охваченное единичной обратной связью

В общем случае структурные схемы могут иметь различного рода перекрещивающиеся связи, поэтому для приведения структуры к одноконтурной разработаны правила переноса сигналов из одной точки структуры в другую.

### ***Перенос сумматора через звено по ходу сигнала***

Если сумматор переносится через звено по ходу сигнала (рис. 8.7), то в цепь подводимого сигнала суммирования надо добавить звено с передаточной функцией звена, через которое был сделан перенос.

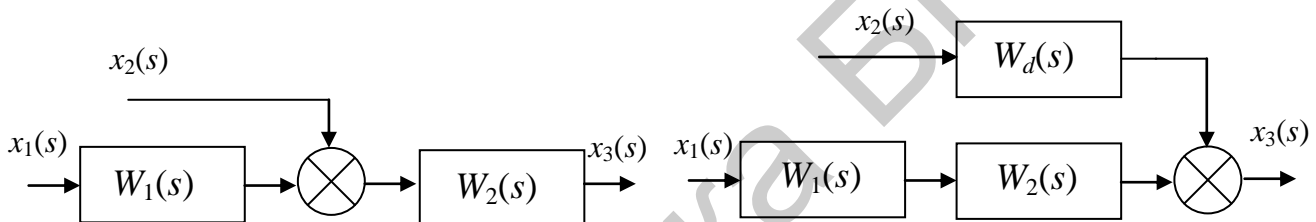


Рис. 8.7. Перенос сумматора через звено по ходу сигнала

### ***Перенос сумматора против хода сигнала***

Если сумматор переносится против хода сигнала (рис. 8.8), то в цепь суммирующего сигнала добавляется звено с передаточной функцией, равной обратной передаточной функции звена, через которое переносится узел.

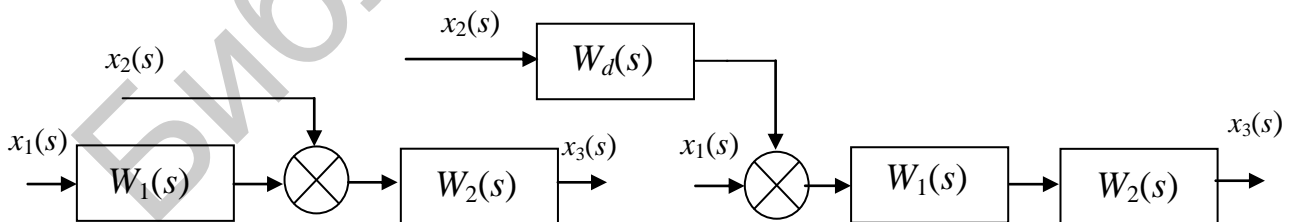


Рис. 8.8. Перенос сумматора через звено против хода сигнала

### ***Перенос узла через звено по ходу сигнала***

Если узел переносится по ходу сигнала (рис. 8.9), то добавляется звено с передаточной функцией, обратной передаточной функции звена, через которое переносится узел.

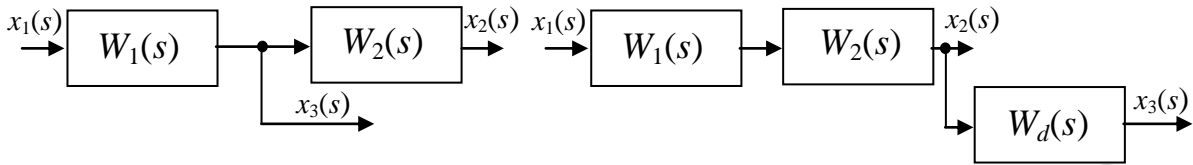


Рис. 8.9. Перенос узла через звено по ходу сигнала

Передаточная функция добавочного звена

$$W_d(s) = \frac{1}{W_2(s)} = W_2(s)^{-1}. \quad (8.6)$$

### ***Перенос узла против хода сигнала***

Если узел переносится против хода сигнала (рис. 8.10), то добавляется звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится сигнал.

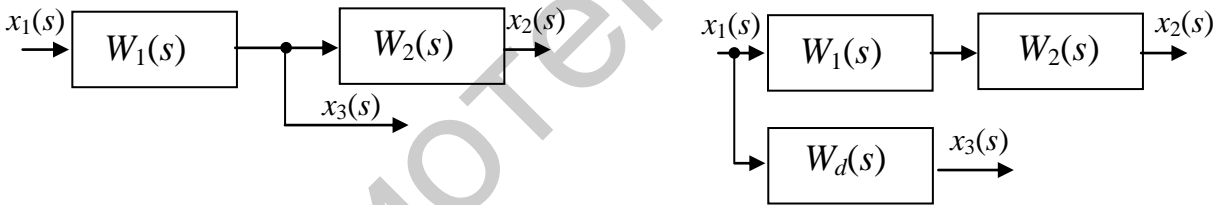


Рис. 8.10. Перенос узла через звено против хода сигнала

Передаточная функция добавочного звена

$$W_d(s) = W_1(s). \quad (8.7)$$

### ***Перемена мест узла и сумматора***

При перенесении узла по ходу сигнала через сумматор (рис. 8.11), прибавляющий сигнал  $x_i$ , надо добавлять в перенесенную с узлом ветвь сигнала сумматор, вычитающий сигнал  $x_i$ .

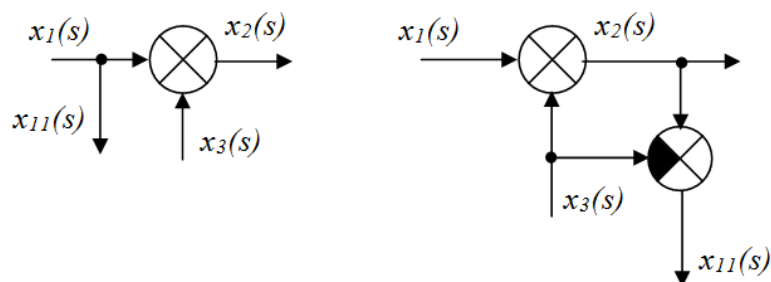


Рис. 8.11. Перенос узла через сумматор по ходу сигнала

Выражения для расчета сигналов:

$$\begin{aligned}
 x_{11}(s) &= x_1(s); & x_{11}(s) &= x_1(s) + x_3(s) + x_n(s); & x_1(s) &= x_1(s) + x_3(s) + x_n(s); \\
 x_n(s) + x_3(s) &= 0; & x_n(s) &= -x_3(s).
 \end{aligned}
 \tag{8.8}$$

При перенесении узла по ходу сигнала через сумматор (рис. 8.12), вычитающий сигнал  $x_i$ , надо добавлять в перенесенную с узлом ветвь сигнала сумматор, прибавляющий сигнал  $x_i$ .

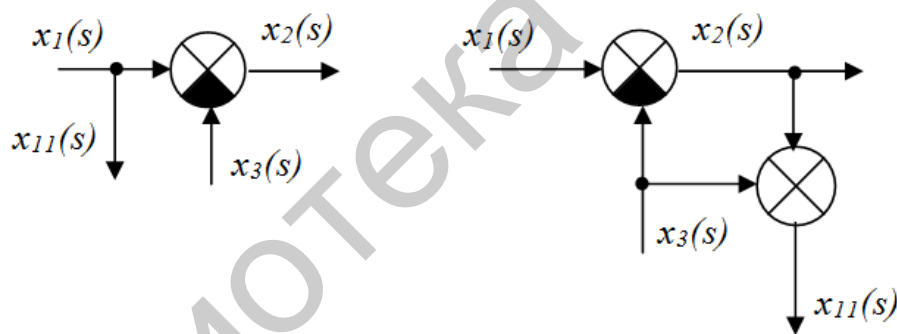


Рис. 8.12. Перенос узла через вычитающий сумматор по ходу сигнала

Выражения для расчета сигналов:

$$\begin{aligned}
 x_{11}(s) &= x_1(s); & x_{11}(s) &= x_1(s) - x_3(s) + x_n(s); & x_1(s) &= x_1(s) - x_3(s) + x_n(s); \\
 x_n(s) - x_3(s) &= 0; & x_n(s) &= x_3(s).
 \end{aligned}
 \tag{8.9}$$

При перенесении узла против хода сигнала через сумматор (рис. 8.13), прибавляющий сигнал  $x_i$ , надо добавлять в перенесенную с узлом ветвь сигнала сумматор, прибавляющий сигнал  $x_i$ .

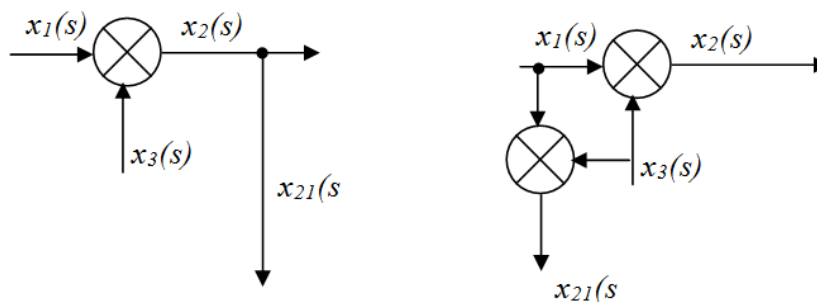


Рис. 8.13. Перенос узла против хода сигнала через сумматор

Выражения для расчета сигналов:

$$\begin{aligned} x_{21}(s) &= x_1(s) + x_3(s); & x_{21}(s) &= x_1(s) + x_n(s); \\ x_1(s) + x_3(s) &= x_1(s) + x_n(s); & x_3(s) &= x_n(s). \end{aligned} \quad (8.10)$$

При перенесении узла против хода сигнала через сумматор (рис. 8.14), вычитающий сигнал  $x_i$ , надо добавлять в перенесенную с узлом ветвь сигнала сумматор, вычитающий сигнал  $x_i$ .

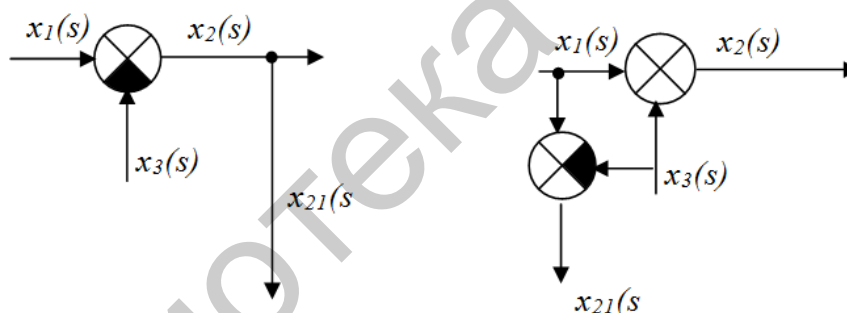


Рис. 8.14. Перенос узла против хода сигнала через вычитающий сумматор

Выражения для расчета сигналов:

$$\begin{aligned} x_{21}(s) &= x_1(s) - x_3(s); & x_{21}(s) &= x_1(s) + x_n(s); \\ x_1(s) - x_3(s) &= x_1(s) + x_n(s); & -x_3(s) &= x_n(s). \end{aligned} \quad (8.11)$$

### *Перенос сумматора через сумматор*

При переносе сумматора через сумматор (рис. 8.15) вместе с поперечными примыкающими сигналами эквивалентность не нарушается. Для сохранения эквивалентности при перенесении сумматоров необходимо переносить их вместе с поперечными сигналами, т. е. сохраняя полярность сигналов.

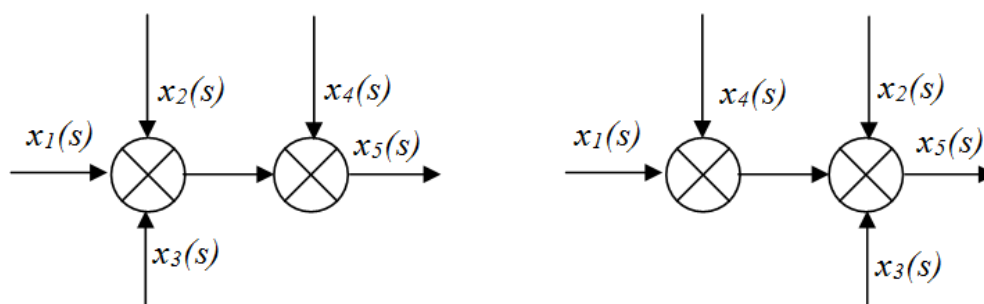


Рис. 8.15. Перенос сумматора через сумматор

### **Перенос узла через узел**

При переносе узлов (рис. 8.16) эквивалентность схемы не нарушается.

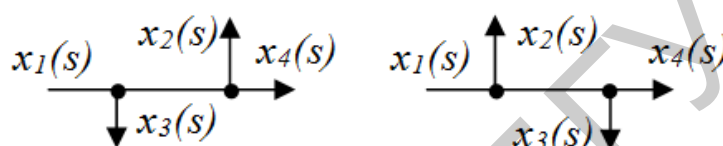


Рис. 8.16. Перенос узла через узел

#### **8.1.2. Методика выполнения преобразования структурных схем САУ**

Методика выполнения преобразования структурных схем САУ состоит в последовательном выполнении следующих процедур:

1. Преобразовать все последовательные соединения.
2. Преобразовать все параллельные соединения.
3. Преобразовать все цепи с обратными связями, не охваченные перекрестными связями.
4. Выполнять подп. 1, 2, 3 настоящей методики для вновь образовавшихся соединений звеньев.
5. Последовательно устранять перекрестные связи путем переноса узлов и сумматоров.
6. По мере устранения перекрестных связей выполнять подп. 1, 2, 3 настоящей методики для вновь образовавшихся соединений звеньев.

### **8.2. Пример решения задачи на преобразование структурных схем и расчет результирующей передаточной функции**

*Условие.* Преобразовать структурную схему (рис. 8.17) и рассчитать результирующую передаточную функцию.

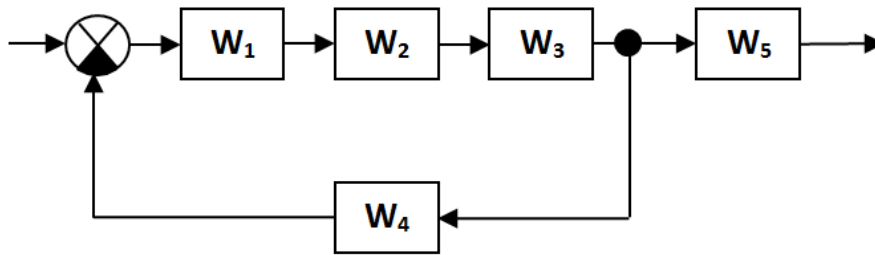


Рис. 8.17. Пример структурной схемы

*Решение:*

1. Преобразуем последовательное соединение звеньев  $W_1$ ,  $W_2$  и  $W_3$  (рис. 8.18).

Промежуточная передаточная функция вновь образованного звена будет высчитываться как произведение звеньев  $W_1$ ,  $W_2$  и  $W_3$ .

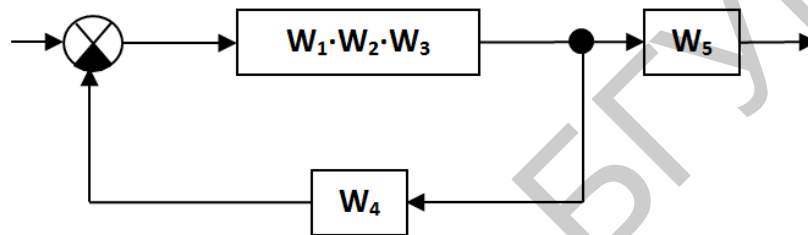


Рис. 8.18. Преобразование последовательного соединения звеньев

2. Уберем из схемы отрицательную обратную связь (рис. 8.19).

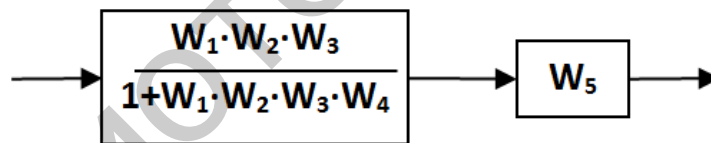


Рис. 8.19. Удаление отрицательной обратной связи

3. Преобразуем полученное последовательное соединение звеньев и рассчитаем результирующую передаточную функцию (рис. 8.20).

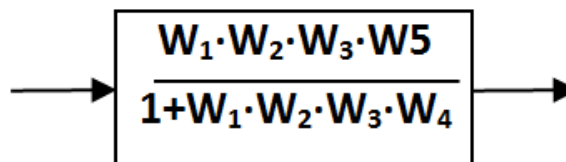


Рис. 8.20. Преобразование последовательного соединения и расчет результирующей передаточной функции

### 8.3. Порядок выполнения практического задания

1. Изучить основные теоретические сведения по структурным схемам САУ и правилам их преобразования.
2. Рассмотреть пример практического решения задачи на преобразование структурной схемы и расчет результирующей передаточной функции.
3. Получить у преподавателя вариант индивидуального задания.
4. В заданной схеме преобразовать все последовательные соединения (при их наличии).
5. Преобразовать все параллельные соединения (при их наличии).
6. Преобразовать цепи, охваченные отрицательной, положительной или единичной обратной связью (при их наличии).
7. По мере преобразования схемы устранять перекрестные связи.
8. Рассчитать результирующую передаточную функцию.

### 8.4. Варианты индивидуальных заданий

*Условие задачи №1.* Преобразовать заданную структурную схему в соответствии с вариантом задания (рис. 8.21–8.38), определить выражение для результирующей передаточной функции.

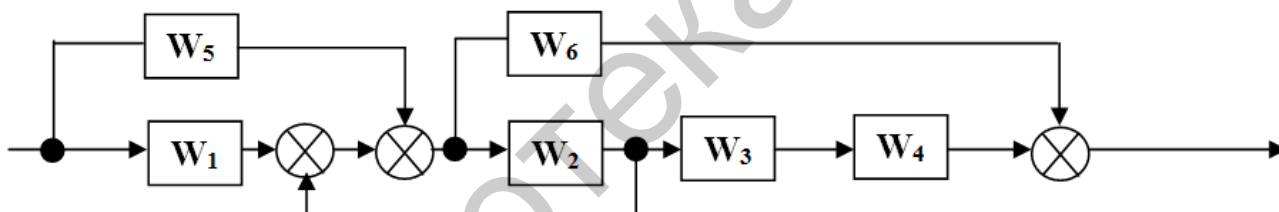


Рис. 8.21. Структурная схема. Вариант 1

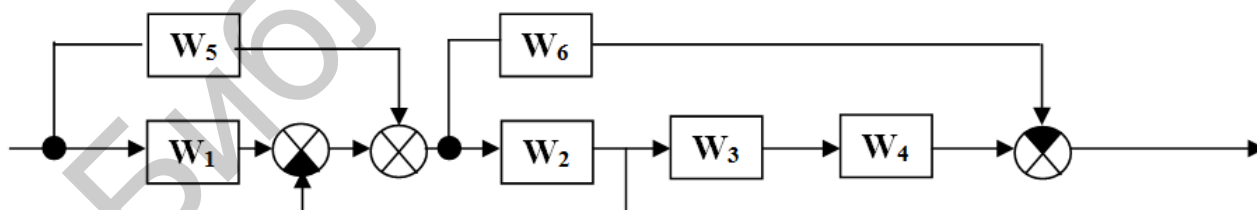


Рис. 8.22. Структурная схема. Вариант 2

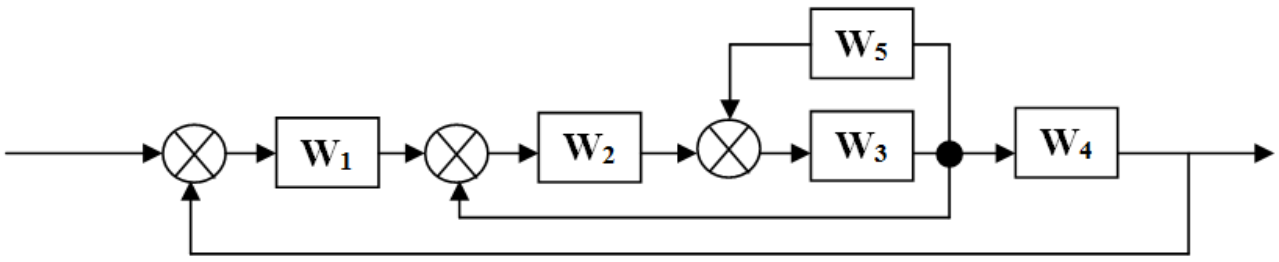


Рис. 8.23. Структурная схема. Вариант 3

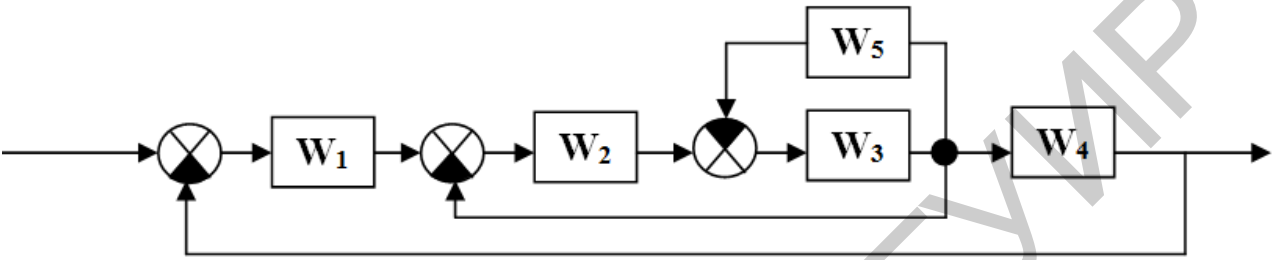


Рис. 8.24. Структурная схема. Вариант 4

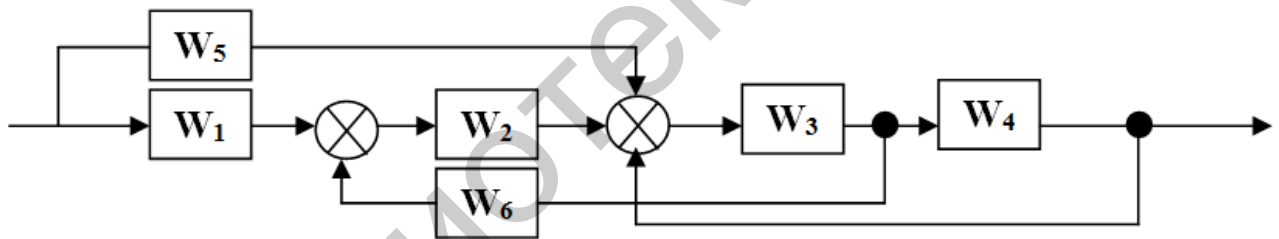


Рис. 8.25. Структурная схема. Вариант 5

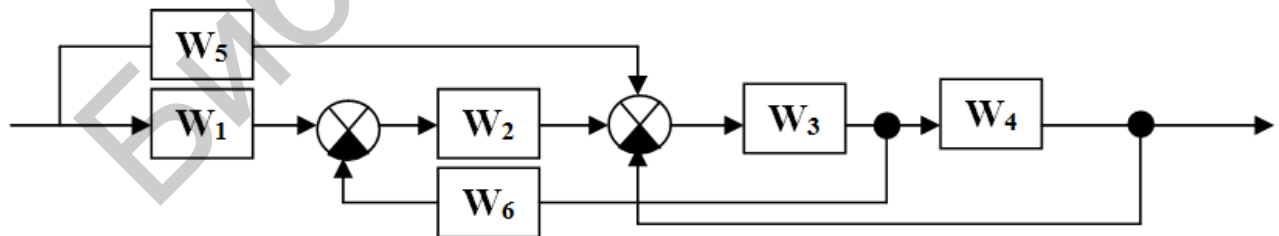


Рис. 8.26. Структурная схема. Вариант 6



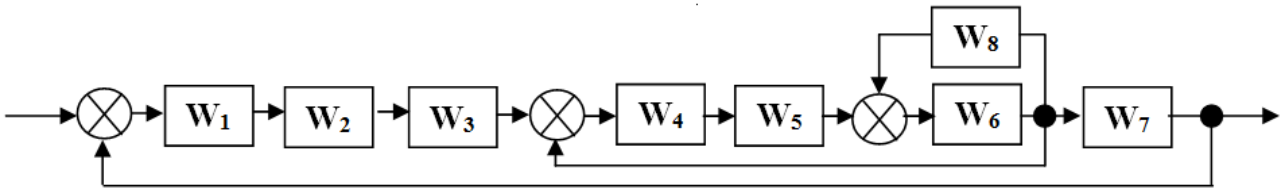


Рис. 8.27. Структурная схема. Вариант 7

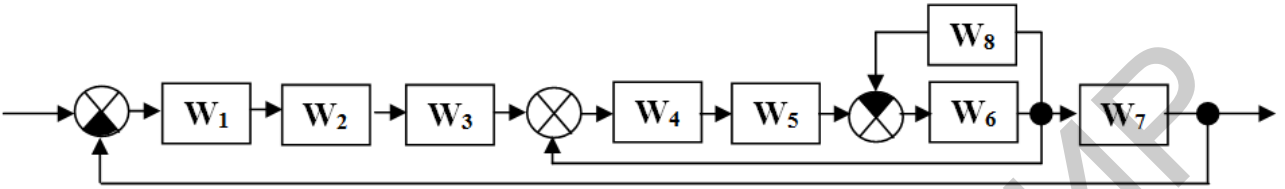


Рис. 8.28. Структурная схема. Вариант 8

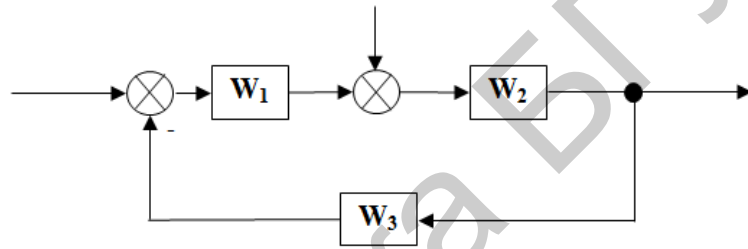


Рис. 8.29. Структурная схема. Вариант 9

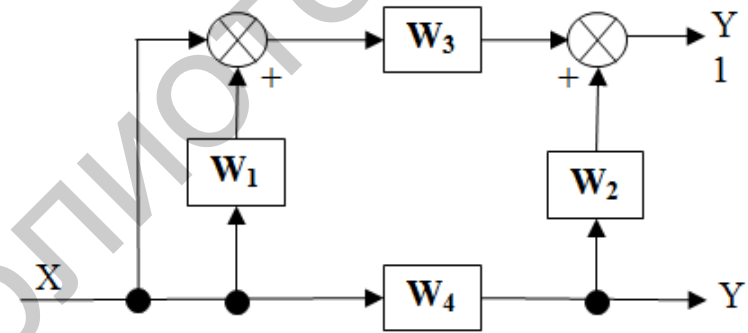


Рис. 8.30. Структурная схема. Вариант 10

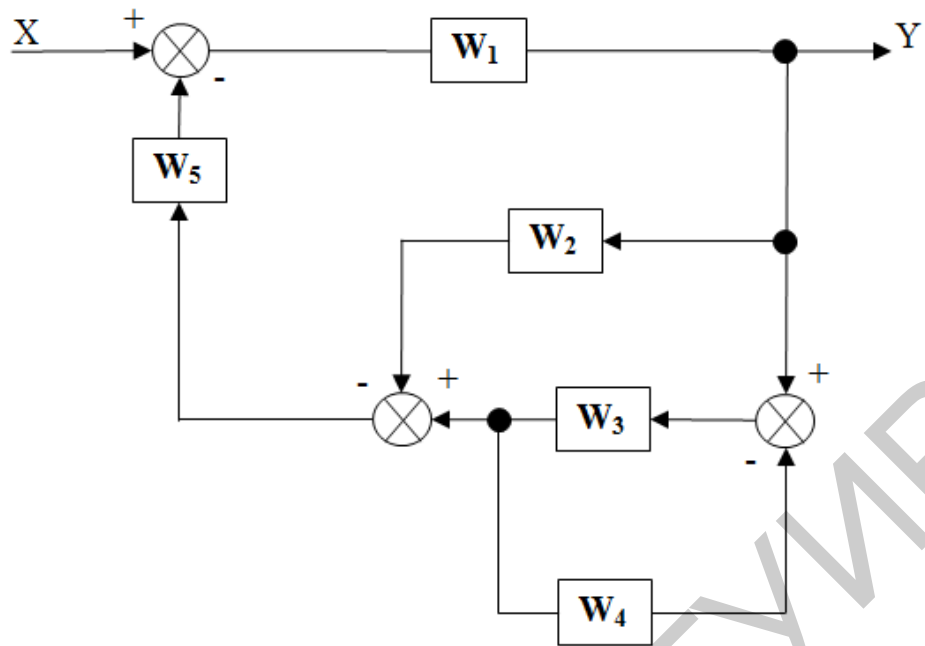


Рис. 8.31. Структурная схема. Вариант 11

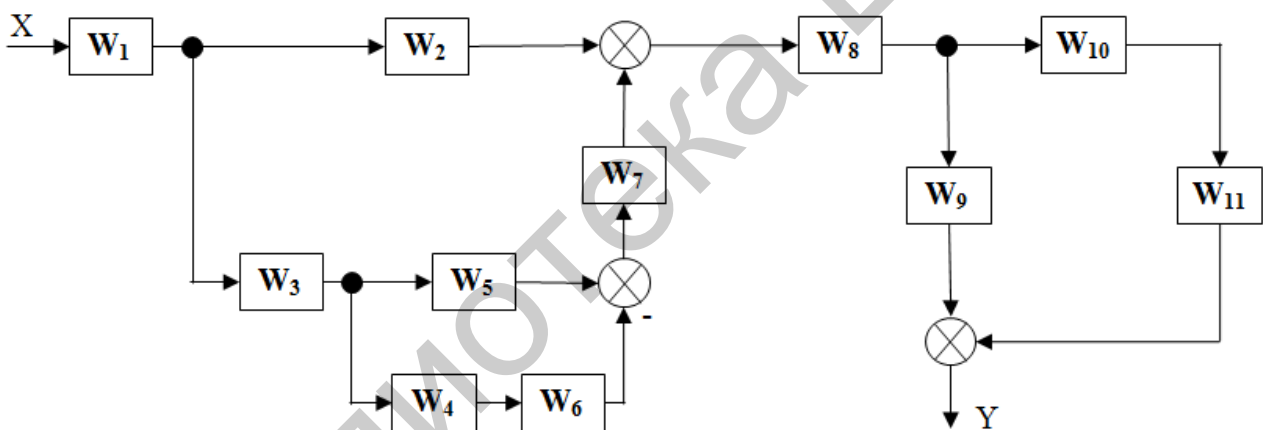


Рис. 8.32. Структурная схема. Вариант 12



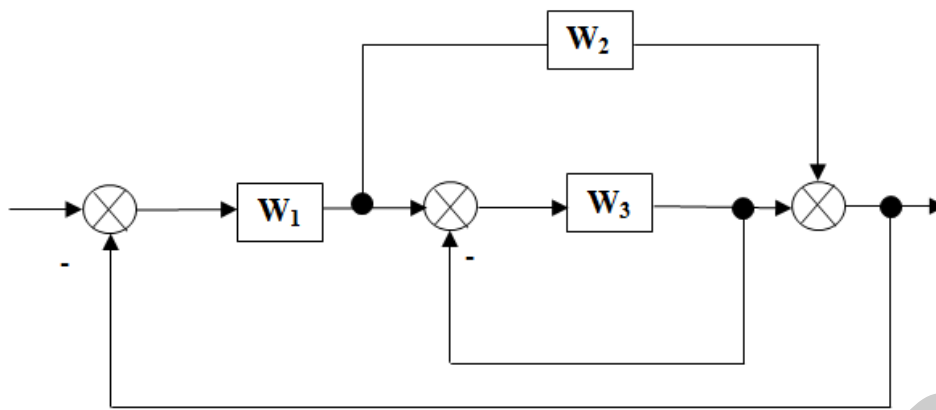


Рис. 8.36. Структурная схема. Вариант 16

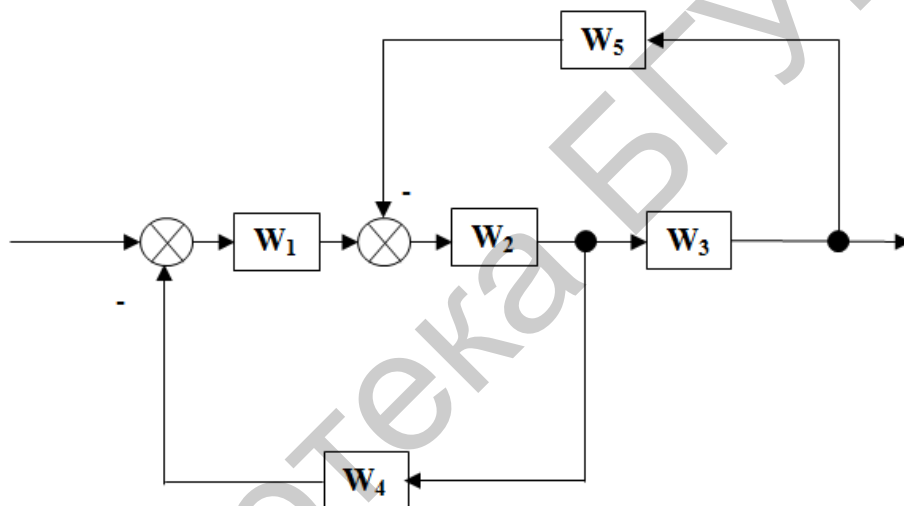


Рис. 8.37. Структурная схема. Вариант 17

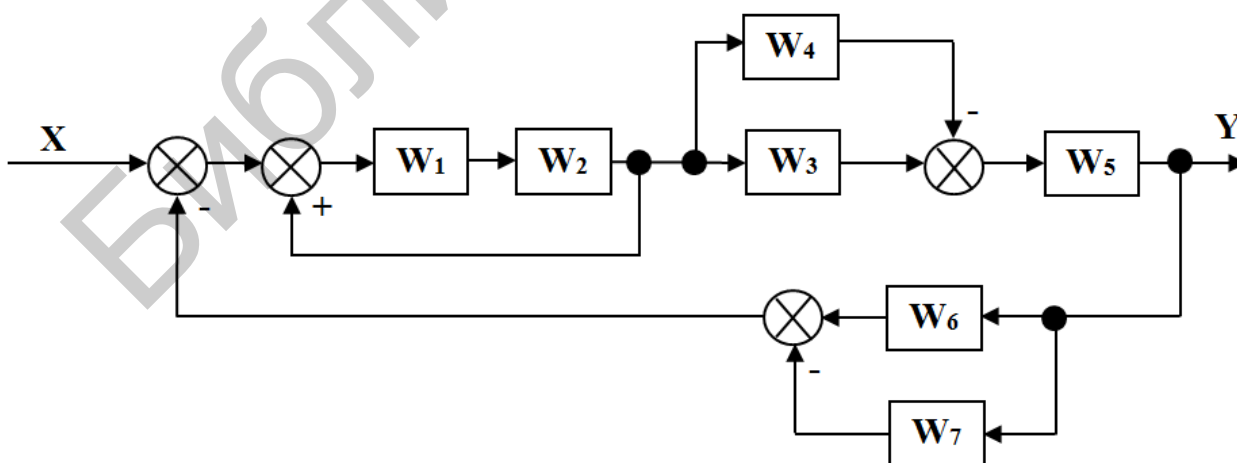


Рис. 8.38. Структурная схема. Вариант 18

Условие задачи №2. Построить структурную схему и определить передаточную функцию звена САУ электродвигателя постоянного тока и нагрузки (рис. 8.39).

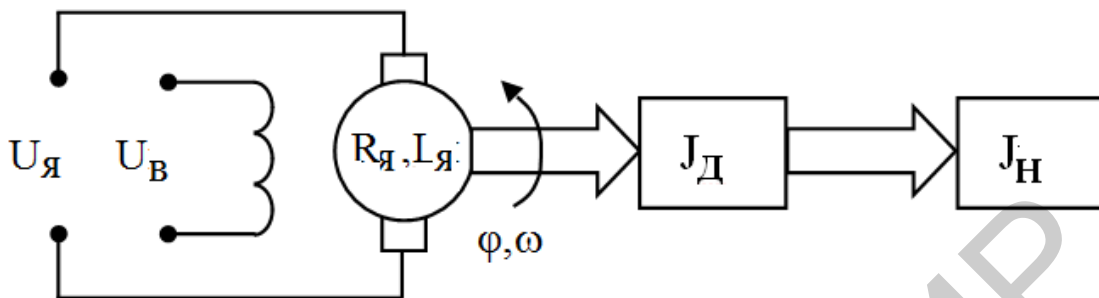


Рис. 3.39. Схема звена двигателя и нагрузки:

$U_я$  – управляющее напряжение на якорной цепи;  $U_в$  – постоянное напряжение возбуждения;  $\varphi$  – угол поворота вала двигателя;  $\omega$  – угловая скорость вращения вала двигателя;  $J_д$  – момент инерции ротора двигателя;  $J_н$  – момент инерции нагрузки на выходном валу двигателя

Условие задачи №3. Построить структурную схему и определить передаточную функцию звена САУ электродвигателя переменного тока (рис. 3.40).

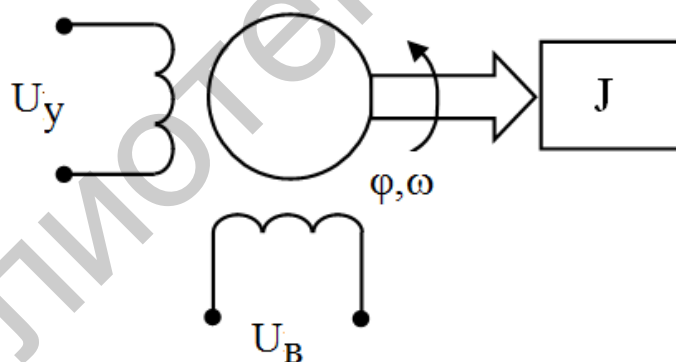


Рис. 3.40. Схема электродвигателя переменного тока:

$U_у$  – переменное управляющее напряжение;  $U_в$  – напряжение возбуждения; величина управляющего воздействия регулируется изменением амплитуды  $U_у$ ;  $\varphi$  – угол поворота вала двигателя;  $\omega$  – угловая скорость вращения вала двигателя;  $J$  – момент инерции нагрузки

## 8.5. Контрольные вопросы

1. Понятие структурной схемы.
2. Звенья структурных схем.

3. Правила преобразования последовательного и параллельного соединения звеньев в структурных схемах.
4. Понятие параллельно-встречного звена.
5. Правила преобразования звеньев, охваченных положительной или отрицательной обратной связью.
6. Правила преобразования звеньев, охваченных единичной обратной связью.
7. Правила переноса сумматора через звено по и против хода сигнала.
8. Правила переноса узла через звено по и против хода сигнала.
9. Правила перемены мест узла и сумматора.
10. Правило переноса сумматора через сумматор.
11. Правило переноса узла через узел.
12. Последовательность преобразования структурных схем.

Библиотека БГУИР

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бесекерский, В. А. Теория систем автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – 4-изд. – СПб. : Профессия, 2003. – 752 с.
2. Мирошник, И. В. Теория автоматического управления. Линейные системы / И. В. Мирошник. – СПб. : Питер, 2005. – 336 с.
3. Егоров, А. И. Основы теории управления : учеб. пособие / А. И. Егоров. – М. : Физмалит, 2007. – 504 с.
4. Зубов, В. И. Лекции по теории управления : учеб. пособие / В. И. Зубов. – СПб. : Лань, 2009. – 496 с.
5. Гудвин, Г. К. Проектирование систем управления / Г. К. Гудвин, С. Ф. Гребе, М. Э. Сальго. – М. : Бинوم. Лаборатория знаний, 2014. – 911 с.
6. Дорф, Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп ; пер. с англ. Б. И. Копылова. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.
7. Кечиев, Л. Н. Защита электронных средств от воздействия статического электричества / Л. Н. Кечиев, Е. Д. Пожидаев. – М. : Изд. дом «Технологии», 2005. – 352 с.

*Учебное издание*

**Аваков** Сергей Мирзоевич

**Огер** Виктор Павлович

**Гуревич** Ольга Викторовна

***ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО  
УПРАВЛЕНИЯ***

ПОСОБИЕ

Редактор *Е. И. Костина*

Корректор *Е. Н. Батурчик*

Компьютерная правка, оригинал-макет *О. И. Толкач*

Подписано в печать 09.10.2018. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».  
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 3,84. Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 40 экз. Заказ 409.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования  
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,  
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.  
ЛП №02330/264 от 14.04.2014.  
220013, Минск, П. Бровки, 6