УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ УСЛОВИЯ РЕГУЛЯРНОСТИ ПОСТОЯННОГО РАНГА В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

О.Ф. БОРИСЕНКО, Л.И. МИНЧЕНКО, С.М. СТАХОВСКИЙ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 17 января 2008

Условия регулярности (constraint qualifications) играют важную роль в задачах математического программирования, поскольку позволяют гарантировать выполнение принципа Лагранжа в невырожденной форме. В то же время условия регулярности различаются между собой общностью, сравнительной простотой проверки и условиями применения. Ввиду этого значительный интерес вызывает поиск новых типов условий регулярности, применимых к более широким классам задач и более простых для проверки их выполнения. Целью данной заметки является обобщение широко известного в литературе условия регулярности постоянного ранга, а также сравнительный анализ некоторых типов условий регулярности в задачах математического программирования.

Ключевые слова: нелинейное программирование, условие регулярности, оптимизация.

Введение

Пусть $h_i\ (y)$, i=1,…, p — непрерывно дифференцируемые функции из R^m в R. Введем непустое множество допустимых точек

$$C = \ y \in R^m \mid \ h_i(y) \le 0, \quad i \in I \ , \quad h_i(y) = 0, \quad i \in I_0 \ \ ,$$

где $y \in R^m$, I={1,…, s}, I_0={s+1,…, p} или $I_0=\varnothing$, и рассмотрим задачу (P) математического программирования $f(y) \to \min, y \in C$ с непрерывно дифференцируемой целевой функцией f.

Для задачи (P) введем функцию Лагранжа

$$L(y,\lambda) = f(y) + \langle \lambda, h(y) \rangle, \text{ где } \lambda = (\lambda_1,...,\lambda_p),\ h = (h_1,...,h_p)$$

и множество множителей Лагранжа в точке y

$$\Lambda(y) = \ \lambda \in \mathrm{R}^p \mid \nabla_x L(y,\lambda) = 0,\ \lambda_i \ge 0 \quad и \quad \lambda_i h_i(y) = 0,\ i \in I \ \ .$$

Условиями, существенно влияющими на возможность эффективного решения задачи (P), являются условия регулярности. Одним из наиболее известных условий регулярности является условие (RLI) линейной независимости градиентов $\nabla h_i(y_0) \quad i \in I(y_0) \bigcup I_0$ всех активных в точке y_0 ограничений. Более общий характер носит обобщающее его условие (RMF) регулярности Мангасаряна–Фромовица [1–8], требующее, чтобы система векторов $\nabla h_i(y) \quad i \in I_0$ была линейно независимой и существовал вектор $\overline{y}_0$ такой, что

$$\langle \nabla h_i(y),\ \overline{y}_0 \rangle = 0,\ i \in I_0,\ \langle \nabla h_i(y),\ \overline{y}_0 \rangle < 0,\ i \in I(y).$$

Здесь $I(y) = \{i \in I \mid h_i(y) = 0\}$.

Пусть $\rho(x,C) = \inf\limits_{y \in C} |x - y|$, где $|y|$ — евклидова норма вектора, *B* — открытый единичный шар с центром в 0 в пространстве R^m.

Будем говорить, что множество *C* *R*-регулярно в точке y_0 [9–11], если найдутся числа $\alpha > 0,\ \delta > 0$ такие, что

$$\rho(y,C) \le \alpha \max \ 0,\ \ h_i(y) \quad i \in I,\ |h_i(y)| \quad i \in I_0 \ ,$$

для всех $y \in y_0 + \delta B$.

Известно [9], что выполнение условия регулярности Мангасаряна-Фромовица в точке y_0 гарантирует *R*-регулярность множества *C* в этой точке.

Непосредственным обобщением условия *(RLI)* является также условие постоянного ранга [4–6]. Напомним [4] , что множество *C* удовлетворяет в точке y_0 условию постоянного ранга или *CR*-регулярно в этой точке, если для любого подмножества индексов $J \subset I(y_0) \cup I_0$ система векторов $\nabla h_i(y), i \in J$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y_0.

Известно, что условия регулярности (*RMF*) и (*CR*) независимы друг от друга [4].

Модифицированное условие постоянного ранга

Очевидным недостатком условия постоянного ранга является трудность его проверки. Ниже предлагается более простая в данном отношении модификация этого условия.

Определение 1. Будем говорить, что множество *C* удовлетворяет в точке $y_0 \in C$ модифицированному условию постоянного ранга, или *MCR*-регулярно в этой точке, если для любого подмножества индексов $J = K \cup I_0$, где $K \subset I(y_0)$, система векторов $\nabla h_i(y), \quad i \in J$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y_0.

Покажем, что модифицированное условие постоянного ранга (*MCR*) обеспечивает выполнение принципа Лагранжа в невырожденной форме, т.е. является условием регулярности.

Пусть $y_0 \in C$. Рассмотрим касательный конус (нижний касательный конус) к множеству *C* в точке $y_0 \in C$:

$$T_C(y_0) = \ \overline{y} \in R^m \mid \exists \text{ функция } o(t) \text{ такая, что } y + t\overline{y} + o(t) \in C \quad \forall t \ge 0$$

и введем множество

$$\Gamma_C(y_0) = \ \overline{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y_0), \overline{y} \rangle \le 0, \quad i \in I(y_0); \ \ \langle \nabla h_i(z_0), \overline{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0 \ ,$$

которое будем называть линеаризованным касательным конусом к *C* в точке $y_0 \in C$.

Лемма 1. Пусть множество *C* *MCR*-регулярно в точке $y_0 \in C$. Тогда $\Gamma_C(y_0) = T_C(y_0)$.

Доказательство. Пусть $\overline{y} \in \Gamma_C(y_0)$ и пусть $J = J(\overline{y}) = I^2(y_0, \overline{y}) \bigcup I_0$,
где $I^2(y_0, \overline{y}) = \ i \in I(y_0) \mid \langle \nabla h_i(y_0), \overline{y} \rangle = 0$. Тогда для любой *m*-векторной функции *r*(*t*) такой, что $r(t)/t \to 0$ при $t \downarrow 0$, найдется число $t_0 > 0$ такое, что $h_i(y_0 + t\overline{y} + r(t)) < 0$ для всех

$i \in I \setminus I^2(y_0, \bar{y})$ и всех $t \in (o, t_0)$. Действительно, если $i \in I \setminus I(y_0)$, то $h_i(y_0) < 0$ и, следовательно, $h_i(y_0 + t\bar{y} + r(t)) = h_i(y_0) + t\langle \nabla h_i(y_0 + \theta(t\bar{y} + r(t)), \bar{y} \rangle < 0$ (где $0 < \theta < 1$) при достаточно малых $t > 0$.

Если $i \in I(y_0)$, но $i \notin I^2(y_0, \bar{y})$, то

$$h_i(y_0 + t\bar{y} + r(t)) = h_i(y_0) + t\langle \nabla h_i(y_0), \bar{y} \rangle + \gamma(t) = t\langle \nabla h_i(y_0), \bar{y} \rangle + \gamma(t),$$

где $\gamma(t) = \langle \nabla h_i(y_0), r(t) \rangle + \langle \nabla h_i(y_0 + \theta(t\bar{y} + r(t)) - \nabla h_i(y_0), t\bar{y} + r(t) \rangle$, $0 < \theta < 1$.

В этом случае, поскольку $\langle \nabla h_i(y_0), \bar{y} \rangle < 0$ и $\gamma(t)/t \to 0$, то $h_i(y_0 + t\bar{y} + r(t)) < 0$ для всех достаточно малых положительных *t*.

Пусть ранг системы функций $h_i(y_0 + t\bar{y} + r)$ $i \in J$ относительно *r* в точке (*t*, *r*)=(0, 0) равен l. В силу условия (*MCR*) он сохранится и в некоторой окрестности (0, 0). Тогда (теорема 2 [12], с. 203) l функций системы (для определенности перенумеруем их так, чтобы это были $h_1, \ldots, h_l$) независимы, а остальные (если они есть) от них зависят, т.е. $h_{l+1} = \varphi_1(h_1, \ldots h_l), \ldots, h_{l+q} = \varphi_q(h_1, \ldots h_l)$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ — непрерывные функции с непрерывными частными производными.

Рассмотрим в окрестности точки (0,0) систему уравнений

$$\begin{cases} h_1(y_0 + t\bar{y} + r) = 0 \\ \quad \ldots \\ h_l(y_0 + t\bar{y} + r) = 0 \\ \quad \ldots \\ h_{l+q}(y_0 + t\bar{y} + r) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

относительно переменных *t, r*.

Очевидно, она равносильна системе

$$\begin{cases} h_1(y_0 + t\bar{y} + r) = 0 \\ \quad \ldots \\ h_l(y_0 + t\bar{y} + r) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

с дополнительным условием

$h_{l+1}(y_0 + t\bar{y} + r) = \phi_1(h_1(y_0 + t\bar{y} + r), \ldots h_l(y_0 + t\bar{y} + r)) = 0$,

…

$h_{l+q}(y_0 + t\bar{y} + r) = \phi_q(h_1(y_0 + t\bar{y} + r), \ldots h_l(y_0 + t\bar{y} + r)) = 0$.

При этом $\varphi_i(h_1(y_0), \ldots h_l(y_0)) = 0, \quad i = 1, \ldots, q$ и, следовательно, $\varphi_i(0, \ldots 0) = 0, \quad i = 1, \ldots, q$.

Если $l = m$, то по теореме о неявной функции ([12], с. 188) система (2) определяет в окрестности (0,0) неявную непрерывно дифференцируемую функцию $r = r(t)$ такую, что $r(0) = 0$ и $\dfrac{dr}{dt}(0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{r(t)}{t} = 0$.

Если $l < m$, то, не ограничивая общности, можно предположить, что ранг системы (2) равен l относительно первых l координат вектора r. Положим в этом случае $r = (\bar{r}, \bar{\bar{r}})$, где $\bar{r} = (r_1, \ldots, r_l)$, $\bar{\bar{r}} = (r_{l+1}, \ldots, r_m)$.

Тогда в силу теоремы о неявной функции система (2) определяет в окрестности точки (0, 0, 0) неявную непрерывно дифференцируемую функцию $\overline{r} = \overline{r}(t, \overline{\overline{r}})$, удовлетворяющую условиям $\overline{r}(0,0) = 0$, $\frac{\partial \overline{r}}{\partial t}(0,0) = 0$.

Пусть $\overline{\overline{r}} = 0,$ положим $\overline{r} = \overline{r}(t) = \overline{r}(t,0)$. Тогда функция $r = r(t) = (\overline{r}(t), 0)$ удовлетворяет системе (2), а значит и (1). Кроме того, $r(t)/t \to 0$ при $t \downarrow 0$.

Таким образом, для $\overline{y} \in \Gamma_C(y_0)$ существует функция $r(t)$ такая, что

$$h_i(y_0 + t\overline{y} + r(t)) = 0 \;\; i \in J\,,\;\; h_i(y_0 + t\overline{y} + r(t)) < 0 \;\; i \in I \setminus J\,,$$

для всех $t \in (o, t_0)$, где t_0 достаточно малое положительное число, и $r(t)t^{-1} \to 0$ при $t \downarrow 0$. Последнее означает, что $y_0 + t\overline{y} + r(t) \in C$ при $t \in [0, t_0]$ и, следовательно, $\overline{y} \in T_C(y_0)$.

Теорема 1. Пусть множество *C* *MCR*-регулярно в точке $y_0 \in C$. Тогда для любой непрерывно дифференцируемой функции f, имеющей в точке $y_0 \in C$ локальный минимум на множестве *C*, справедливо условие $\Lambda(y_0) \neq \varnothing$.

Доказательство. В силу леммы 1 для любого $\overline{y} \in \Gamma_C(y_0)$ найдется векторная функция $o(t)$ такая, что $y_0 + t\overline{y} + o(t) \in C$, $t > 0$, и, следовательно,

$$f(y_0 + t\overline{y} + o(t)) - f(y_0) \geq 0\,,$$

откуда $\langle \nabla f(y_0), \overline{y} \rangle \geq 0$ для всех $\overline{y} \in \Gamma_C(y_0)$. В таком случае по теореме двойственности линейного программирования [13] множество допустимых точек двойственной задачи, совпадающее с $\Lambda(y_0)$, не пусто.

Связь *MCR*-регулярности с *R*-регулярностью

Установим связь *MCR*-регулярности с *R*-регулярностью.

Пусть $v \in R^m$, $v \notin C.$ Обозначим $\Pi_C(v)$ множество точек из *C*, ближайших к точке v. Очевидно, эти точки являются решениями задачи нелинейного программирования

$$f_v(y) \to \min\,,\;\; y \in C\,,$$

где $f_v(y) = |y - v|$.

Обозначим

$$L_v(y,\lambda) = f_v(y) + \langle \lambda, h(y) \rangle,\;\; \Lambda_v(y) = \;\; \lambda \in \mathrm{R}^p \mid \nabla L_v(y,\lambda) = 0,\;\; \lambda_i \geq 0 \text{ и } \lambda_i h_i(y) = 0, i \in I \;\; .$$

Лемма 2. Пусть условие *MCR*-регулярности выполнено в точке $y_0 \in frC$. Тогда существуют числа $M > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при всех $v \notin C$ таких, что $v \in y_0 + \delta B$ условие $\Lambda_v^M(y) = \{\lambda \in \Lambda_v(y) : \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| \leq M\} \neq \varnothing$ выполнено во всех точках $y(v) \in \Pi_C(v)$.

Доказательство. Допустим противное. В таком случае найдется последовательность $v_k \to y_0$ такая, что $v_k \notin C$ и $\rho(0, \Lambda_{v_k}(y_k)) \to \infty$ при $y_k = y(v_k)$. При этом $y_k = y(v_k) \to y_0$, поскольку $|v_k - y_k| \leq |v_k - y_0|$.

Из условия *MCR*-регулярности в точке $y_0 \in frC$ следует, что это условие будет выполнено и в некоторой окрестности данной точки. В таком случае , не ограничивая общности, можно считать, что $\Lambda_{v_k}(y_k) \neq \varnothing$. При этом y_k удовлетворяет ограничениям

$$h_i(y_k) = 0 \quad i \in I_0 \cup I(y_k), \quad h_i(y_k) < 0 \quad i \notin (I_0 \cup I(y_k))$$

при достаточно больших k. Поскольку $I(y_k)$ может принимать только конечное число значений, то из последовательности $\{y_k\}$ можно извлечь подпоследовательность (для простоты будем считать, что это сама $\{y_k\}$), для которой множество индексов $I(y_k) = I^*$ не зависит от k. Пусть $J = I_0 \cup I^*$. Тогда $h_i(y_k) = 0, \quad i \in I_0 \cup I^*; \quad h_i(y_k) < 0, \quad i \notin (I_0 \cup I^*)$.

В силу условия *MCR*-регулярности система $\{\nabla h_i(y) \quad i \in J\}$ не меняет ранг в окрестности точки y_0. Пусть этот ранг равен l. Тогда система векторов $\{\nabla h_i(y_0), \quad i \in J\}$ имеет ранг l. Обозначим через $B(y_0)$ базисный минор этой системы. В силу непрерывности данного минора по y можно, не ограничивая общности, считать, что $B(y_k) \neq 0$ и, следовательно, в силу условия *MCR*-регулярности $B(y_k)$ остается базисным минором для системы $\{\nabla h_i(y_k), \quad i \in J\}$. Обозначим через J^0 множество индексов из J, для которых соответствующие векторы являются базисными для базисного минора $B(y_0)$.

Поскольку

$$\Lambda_{v_k}(y_k) = \ \lambda \in \mathrm{R}^p \mid \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y_k) + \nabla f_{v_k}(y_k) = 0, \ \lambda_i \geq 0 \quad i \in I, \lambda_i = 0 \quad i \notin J\},$$

то для всех k=1, 2, …, система

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y_k) + \nabla f_{v_k}(y_k) = 0, \quad \lambda_i \geq 0 \, i \in I, \lambda_i = 0 \quad i \notin J^0$$

имеет единственное решение λ^k. При этом базисный минор не обращается в 0 при $y_k \to y_0$ и, следовательно, последовательность $\{\lambda^k\}$ ограничена, что противоречит предположению о том, что $\rho(0, \Lambda_{v_k}(y_k)) \to \infty$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения леммы.

Лемма 3 ([8]). Пусть $y_0 \in frC$ и существуют числа $M > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что при всех $v \in y_0 + 2^{-1}\delta_0 B$, $v \notin C$ в точках $y = y(v) \in \Pi_C(v)$ выполнено условие $\Lambda_v^M(y) = \{\lambda \in \Lambda_v(y) \mid \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| \leq M\} \neq \varnothing$.

Тогда множество *C R*-регулярно в точке y_0.

Теорема 2. Пусть условие *MCR*-регулярности выполнено в точке $y_0 \in frC$. Тогда множество *C R*-регулярно в данной точке.

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы непосредственно получается последовательным применением лемм 2 и 3.

Рассмотрим ослабленный вариант условия из Определения 1. Будем говорить, что множество *C* удовлетворяет в точке $y_0 \in C$ слабому условию (*MCR*), если для любого подмножества индексов $J = K \cup I_0$, где $K \subset I(y_0)$, система векторов $\nabla h_i(y), \quad i \in J$ имеет постоянный ранг для всех $y \in C$ из некоторой окрестности точки y_0.

Легко видеть, что данное условие тривиально выполняется в случае одноточечного множества $C = \{y_0\}$ и, как нетрудно убедиться, не является условием регулярности, так как не гарантирует непустоту множества множителей Лагранжа в точках экстремума на множестве *C*.

Поскольку все условия регулярности обязаны гарантировать не пустоту множества множителей Лагранжа, то самый широкий характер, очевидно, носят так называемые условия регулярности по Лагранжу [3].

Определение 2. Множество *C* регулярно в точке y_0 по Лагранжу, если при любой гладкой функции *f*, имеющей в точке y_0 локальный минимум на множестве *C*, множество $\Lambda(y_0)$ не пусто.

Лемма 4. Пусть множество *C* регулярно по Лагранжу в точке $y_0 \in frC$ и в ее окрестности на C, и в этой точке выполнено слабое условие (*MCR*). Тогда существуют числа $M > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при всех $v \notin C$ таких, что $v \in y_0 + \delta B$, условие

$$\Lambda_v^M(y) = \{\lambda \in \Lambda_v(y): \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| \le M\} \ne \varnothing$$

выполнено во всех точках $y(v) \in \Pi_C(v)$.

Доказательство данной леммы получается незначительной модификацией доказательства леммы 2.

Последовательное применение лемм 3 и 4 приводит к к следующему обобщению теоремы 2.

Теорема 3. Пусть множество *C* регулярно по Лагранжу в точке $y_0 \in frC$ и в ее окрестности на C, и в этой точке выполнено слабое условие (*MCR*). Тогда множество *C* *R*-регулярно в данной точке.

ON SOME MODIFICATION OF CONSTANT RANK CONSTRAINT QUALIFICATION IN MATHEMATICAL PROGRAMMING

O.F. BORISENKO, L.I. MINCHENKO, S.M. STAKHOVSKI

Abstract

Constraint qualification of constant rank is studied and generalized. It is proved that generalized constant rank constraint qualification implies metric regularity condition.

Литература

1. *Bonnans J.F., Shapiro A.* Perturbations analysis of optimization problems. N.-Y., 2000.
2. *Luderer B., Minchenko L., Satsura T.* Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Dordreht, 2002.
3. *Березнев В.А., Завриев С.Н., Третьяков А.А.* // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 6. С. 1289–1291.
4. *Janin R.* // Mathematical Programming Study. 1984. Vol. 21. P. 110–126.
5. *Pang J.-S., Ralph D.* //Mathematics of Operations Research. 1993. P. 102–154.
6. *Ralph D., Dempe S.* // Mathematical Programming. 1995. Vol. 70. P. 159–172.
7. *Минченко Л.И., Тараканов А.Н.* // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48, № 4. С. 24–28.
8. *Минченко Л.И., Гвоздь Е.И.* // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 1. С. 7–12.
9. *Robinson S.M.* // SIAM J. Numer. Analysis. 1976. Vol. 13. P. 497–513.
10. *Ioffe A.D.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. Vol. 251. P. 61–69.
11. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М., 1979.
12. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. 1. М., 1981.
13. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М., 1978.