

УДК 621.316.726.078

АНАЛИЗ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ФАЗОВОГО УПРАВЛЕНИЯ

В.Л. БУСЬКО, А.А. ЛОБАТЫЙ, Л.В. РУСАК

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь*

Поступила в редакцию 15 мая 2008

На основе теории марковских случайных процессов рассматривается задача оценки вероятностных характеристик дискретных систем фазового управления.

Ключевые слова: фазовое рассогласование, плотность вероятности, захват сигнала, временной интервал.

Введение

В различных областях автоматики, радиотехники, связи широкое применение находят дискретные системы с фазовым управлением (ДСФУ), сигнал ошибки в которых формируется на основе сравнения фаз входного и выходного сигналов. Дискретные системы с фазовым управлением включают в себя два больших класса: импульсные системы с фазовым управлением (ИСФУ) и цифровые системы с фазовым управлением (ЦСФУ). Построение и применение систем с фазовым управлением по импульсному или цифровому принципам обусловлены областью применения, а также частотами сигналов, которые надо обрабатывать.

Примерами таких систем являются системы цифровой и импульсно-фазовой автоподстройки частоты, системы регулирования скорости, импульсные стабилизаторы напряжения, следящие фильтры и т.п.

К достоинствам дискретных систем с фазовым управлением следует отнести малые габариты и вес, высокий к.п.д., простоту исполнения, способность работать на высоких частотах квантования. Основной проблемой, возникающей при проектировании дискретных систем с фазовым управлением, является обеспечение устойчивости, хороших динамических и статистических характеристик. В силу существенной нелинейности большинства ДСФУ анализ и синтез таких систем представляет собой сложную задачу.

Задачи вероятностного анализа таких систем решаются в ряде работ, исходя из условия рассмотрения вероятности первого достижения фазовой координатой φ границ срыва синхронизма (области работоспособности). В реальных ДСФУ срыв синхронизма не может произойти мгновенно. Инерционность перехода системы из одного состояния в другое может быть приближенно охарактеризована минимальным интервалом времени τ_c пребывания разности фаз за пределами границ области работоспособности системы, необходимым для перехода ее в другое (неработоспособное) состояние. Учет инерционности системы при вероятностном анализе смены режима ее работы позволяет более полно учесть реальные физические свойства ДСФУ.

Постановка задачи

Одним из наиболее распространенных классов ДСФУ являются системы импульсно-фазовой автоподстройки частоты.

Обобщенная структурная схема ДСФУ показана на рис. 1.

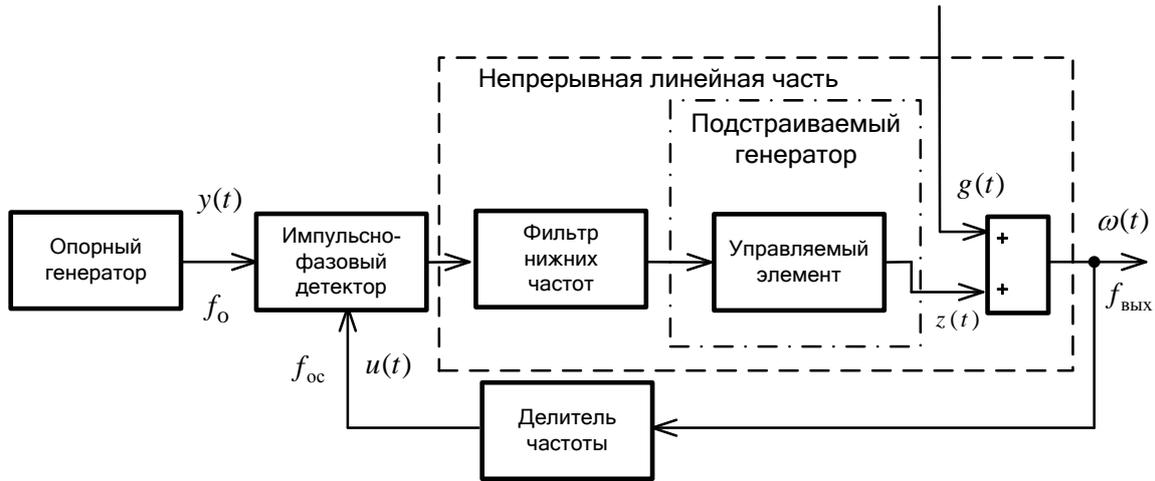


Рис. 1. Обобщенная структурная схема ДСФУ

Одним из важнейших режимов работы рассматриваемых систем является режим больших соотношений шум/сигнал, т.е. такой режим, при котором дисперсия шума сравнима с квадратом величины полезного сигнала. В этих условиях исследование статистической динамики ДСФУ необходимо проводить, используя нелинейные разностные уравнения динамики системы. При этом наиболее полной статистической характеристикой системы, определяемой на основе таких уравнений, является нестационарная плотность распределения вероятностей (ПРВ) расширенного вектора состояния $\tilde{X}[n] \in R^{v+1}$ на каждом такте опорного генератора.

При работе ДСФУ в условиях воздействия шума, когда соотношение шум/сигнал велико, в системе возможен срыв синхронизма. Под срывом синхронизма понимается первый выход величины фазового рассогласования за границы апертур: $\varphi_{\min} < \varphi < \varphi_{\max}$ (обычно $0 < \varphi < 2\pi$). Количественная оценка явления срыва синхронизма возможна с помощью различных статистических характеристик и, прежде всего, с помощью нестационарной ПРВ $f(\tilde{X}[n])$. При этом пределы интегрирования по $(v+1)$ -й компоненте вектора \tilde{X} , т.е. по величине фазового рассогласования φ , представляют собой границы апертур φ_{\min} и φ_{\max} .

Рассмотрим систему уравнений, описывающих динамику ДСФУ, работающую на кратных частотах [1]:

$$h(n) = U_M (\sin \psi(n) + 1); \quad (1)$$

$$X(n+1) = H(T)X(n) + A^{-1}(H(T) - I)Bh(n); \quad (2)$$

$$\varphi(n+1) = \varphi(n) + CA^{-1}(H(T) - 1)X(n) + (K_1T + CA^{-2}(H(T) - 1)B)h(n) + GT - 2j, \quad (3)$$

где $\varphi(n)$ — одномерный односвязный дискретный марковский процесс, распределенный по нормальному закону; $X(n) = x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)^T$ — вектор состояния системы, $H(T)$ — переходная матрица состояния системы; T — период дискретизации.

Система уравнений (1)–(3) при наличии шума запишется следующим образом:

$$h(n) = U_M (\sin \psi(n) + 1) + \xi_h(n), \quad (4)$$

$$X(n+1) = H(T)X(n) + A^{-1}(H(T) - I)BU_M(\sin \varphi(n) + 1); \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varphi(n+1) = & \varphi(n) + CA^{-1}(H(T) - I)X(n) + (K_1T + CA^{-2}(H(T) - I)B)U_M(\sin \varphi(n) + 1) + \\ & + GT - 2\pi j + (K_1T + CA^{-2}(H(T) - I)B)\xi_h(n), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\xi_h(n)$ — центрированный белый гауссовый дискретный шум с дисперсией σ_h^2 .

Система стохастических уравнений (5) и (6) описывает дискретный марковский процесс.

Уравнения (5)–(6) могут быть представлены в виде:

$$\tilde{X}(n+1) = F(\tilde{X}(n)) + K_\xi(X(n), n+1)\xi(n), \quad (7)$$

где $\tilde{X}(n)$ — расширенный вектор состояния; $F(\tilde{X}(n))$ — нелинейная векторная функция, $K_\xi(X(n), n+1)$ — матричная функция; $\xi(n)$ — вектор дискретного белого шума с корреляционной матрицей $K_\xi(n, l) = M[\xi(n)\xi^T(l)] = G(n)\delta_{nl}$; δ_{nl} — символ Кронекера

$$\delta_{nl} = \begin{cases} 1 & n = l, \\ 0 & n \neq l. \end{cases}$$

Определение вероятностных характеристик

Полной вероятностной характеристикой марковской векторной непрерывнозначной последовательности $\tilde{X}(n)$ является первая плотность распределения вероятности (ПРВ) реализаций, удовлетворяющая разностному уравнению [2]:

$$f(\tilde{X}, n+1) = f(\tilde{X}, n) - \nabla_x^T \Delta \Pi(\tilde{X}, n), \quad (8)$$

с начальным условием $f(\tilde{X}, 0) = f_0(\tilde{X}_0)$. $\Delta \Pi(\tilde{X}, n)$ — приращение вектора плотности потока вероятности за время T ; ∇_x^T — векторный оператор дифференцирования.

$$\Delta \Pi(\tilde{X}, n) = \Delta A(\tilde{X}, n)f(\tilde{X}, n) - \frac{1}{2} \Delta B(\tilde{X}, n)f(\tilde{X}, n) \nabla_x^T. \quad (9)$$

Выражения для приращений вектора сноса и матрицы диффузии при трактовке стохастических интегралов в смысле К. Ито в соответствии с (7) имеют вид:

$$\Delta A(\tilde{X}, n) = F(\tilde{X}(n+1)) - \tilde{X}(n), \quad (10)$$

$$\Delta B(\tilde{X}, n) = K_\xi(n+1)G(n)K_\xi^T(n+1). \quad (11)$$

На основе разностного уравнения (8) запишем уравнение для ненормированной ПРВ не поглощенных реализаций $f^{(1)}(\tilde{X}, n)$ с учетом введения функции поглощения на границе R_u области $U_\varphi = [\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$:

$$f^{(1)}(\tilde{X}, n+1) = f^{(1)}(\tilde{X}, n) - \nabla_x^T \Delta \Pi^{(1)}(\tilde{X}, n) - \Delta \vartheta(\tilde{X}, n). \quad (12)$$

Последний член в правой части выражения (12) фактически учитывает поглощение реализаций, достигших границы области U_φ и исключаемых из дальнейшего рассмотрения. Численно он характеризует изменение плотности вероятности в течение времени дискретизации за счет поглощения на границе U_φ .

$\Delta\vartheta(\tilde{X}, n)$ — приращение функции поглощения реализаций $\tilde{X}(n)$, вычисляемое по формуле:

$$\Delta\vartheta(\tilde{X}, n) = \delta(R_u - \tilde{X})n^0 \Delta\Pi(\tilde{X}, n), \quad (13)$$

где n^0 — в общем случае нормаль к гиперповерхности R_u .

Проинтегрировав выражение (12) по \tilde{X} в бесконечных пределах, получим выражение для $P^{(1)}(n)$ — вероятности не достижения процессом $\tilde{X}(n)$ границ области U_φ . Заметим, что интеграл от второго слагаемого правой части выражения (12) равен нулю, так как он представляет собой интеграл от дивергенции вектора $\Delta\Pi^{(1)}(\tilde{X}, n)$, вычисляемый по областям существования не поглощенных реализаций, для которых по предположению во всей открытой бесконечной области интегрирования нет дополнительных истоков и стоков вероятности. Это также доказывается непосредственным вычислением интеграла.

$$P^{(1)}(n+1) = P^{(1)}(n) - \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\vartheta(\tilde{X}, n) d\tilde{X}. \quad (14)$$

Для вычисления входящей в выражение (13) $\Delta\Pi(R_u, n)$ при малых значениях $f^{(1)}(\tilde{X}, n)$ на границах поглощения, удобно применить усеченную гауссову аппроксимацию плотности вероятности $f^{(1)}(\tilde{X}, n)$:

$$f^{(1)}(\tilde{X}, n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \Delta(n)}} \exp\left[\frac{-\Delta^*(n)}{\Delta(n)}\right], & \tilde{X} \in U_\varphi; \\ 0, & \tilde{X} \notin U_\varphi. \end{cases} \quad (15)$$

где $\Delta(n)$ — определитель, соответствующий матрице корреляционных моментов $\theta(n)$ системы $\tilde{X}(n)$; $\Delta^*(n)$ — окаймленный определитель вида:

$$\Delta^*(n) = (\tilde{X}(n) - m(n))^T \theta(n) (\tilde{X}(n) - m(n)), \quad (16)$$

$m(n)$ — вектор математического ожидания последовательности $\tilde{X}(n)$.

Если в рассматриваемой импульсной системе срыв управления происходит не мгновенно, а с некоторым запаздыванием τ_c , что характерно для реальной ДСФУ, необходимо при вероятностном анализе применить подход, предложенный в [3]. Если $\tau_c \gg T$, то вероятность бессрывного управления импульсной системой к моменту времени t_r в общем случае определяется по рекуррентной формуле:

$$P_{BC}(t_r) = \prod_{n=1}^r \prod_{j=1}^{\mu} \{1 - P_1^{(j)}(t_n) P_2^{(j)}(t_n + \tau_c) | \tilde{X}(t_n) \notin U_\varphi\}, \quad (17)$$

$r = 0, 1, \dots, k-1$, $k = (t_k - t_0) / \tau_c$. μ — количество j -х поглощающих границ области U_φ ; τ_c — временной интервал, характеризующий инерционность системы; t_0, t_k — моменты времени начала и окончания работы системы; $P_1^{(j)}(t_n)$ — вероятность нахождения $\tilde{X}(n)$ за пределами j -й границы области U_φ в каждый текущий момент времени t_n .

Если срывы процесса управления на j -х границах области U_φ — события несовместные, то

$$P_1^{(j)}(t_n) = P_1^{(j)}(n) = 1 - \int_{U_\varphi} f(\tilde{X}, n) d\tilde{X}, \quad (18)$$

где $f(\tilde{X}, n)$ — плотность вероятности распределения $\tilde{X}(n)$ в открытой области без граничений, определяемая из разностного уравнения (8) (при гауссовой аппроксимации вычисляется на основе решения разностных уравнений для моментов без учета поглощения на границах области U_φ).

$P_2^{(j)}(t_n + \tau_n | \tilde{X}(t_n) \notin U_\varphi)$ — вероятность невозвращения процесса $\tilde{X}(t_n) = \tilde{X}(n)$ в область U_φ через j -ю границу в течение времени τ_c . $P_2^{(1)}$ определяется из разностного уравнения типа (14) при начальном условии на каждом интервале τ_c $P_2^{(1)}(t_n) = 1$. При этом рассматривается плотность вероятности распределения реализаций, находящихся за пределами области U_φ и не достигших границ этой области.

При исследовании вероятности захвата сигнала поисковой системой ДСФУ расчетная формула имеет вид

$$P_3(t_r) = 1 - \prod_{n=1}^r 1 - P_1(t_n)P_2(t_n + \tau_3 | \tilde{X}(t_n) \in U_\varphi) . \quad (19)$$

В данном случае $P_1(t_n)$ — вероятность нахождения процесса $\tilde{X}(n)$ в области захвата в момент времени t_n , $P_2(t_n)$ — вероятность невыхода процесса $\tilde{X}(n)$ в течение времени τ_3 за границы области U_φ .

Пример

В качестве примера рассмотрим ДСФУ, описываемую уравнением

$$\varphi(n+1) = A\varphi(n) + B\xi(n) . \quad (20)$$

Область U_φ определим следующим образом: $\varphi_{\min} < \varphi < \varphi_{\max}$.

Плотность вероятности распределения фазовой координаты φ при гауссовом начальном условии также гауссова $f^{(1)}(\varphi, n)$ с параметрами $m_\varphi(n)$, $D_\varphi(n)$. Тогда входящая в выражение (17) вероятность $P_1^{(j)}(t_{n+1}) = P_1(n+1)$ будет вычислена по формуле

$$P_1(n+1) = 1 - \left(\Phi \left[\frac{\varphi_{\max} - m_\varphi(n+1)}{\sqrt{D_\varphi(n+1)}} \right] - \Phi \left[\frac{\varphi_{\min} - m_\varphi(n+1)}{\sqrt{D_\varphi(n+1)}} \right] \right) , \quad (21)$$

где $\Phi(\dots)$ — функция Лапласа, а $m_\varphi(n+1)$ и $D_\varphi(n+1)$ определяются из уравнений

$$m_\varphi(n+1) = Am_\varphi(n) + Bm_\xi(n) , \quad (22)$$

$$D_\varphi(n+1) = 2AD_\varphi(n) + 2B^2G_\xi(n) . \quad (23)$$

При малых значениях плотности вероятности $f^{(1)}(\varphi, n)$ на границах $[\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$ в соответствии с допущением об усеченной гауссовой аппроксимации представим ее в виде

$$f^{(1)}(\varphi, n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\varphi(n)}} \exp \left[-\frac{(\varphi(n) - m_\varphi(n))^2}{2D_\varphi(n)} \right] , & \varphi < \varphi_{\min}, \varphi > \varphi_{\max} ; \\ 0, & \varphi_{\min} \leq \varphi \leq \varphi_{\max} . \end{cases} \quad (24)$$

Для определения $P_2^{(1)}(t_n + \tau_c) = P_2(n)$ в соответствии с (13) и (14) получаем рекуррентную формулу:

$$P_2(n+1) = P_2(n) - [-\Delta\pi^{(1)}(\varphi_{\max}, n) - \Delta\pi^{(1)}(\varphi_{\min}, n)] , \quad (25)$$

где

$$\Delta\pi^{(1)}(\varphi, n) = \Delta A(\varphi, n) f^{(1)}(\varphi, n) - \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \left[\Delta B(\varphi, n) f^{(1)}(\varphi, n) \right]. \quad (26)$$

Если $M[\xi_\varphi] = 0$, то $\Delta A(\varphi, n) = 0$, $\Delta B(\varphi, n) = B^2 G$

Производственную $df^{(1)}(\varphi, n)/d\varphi$ на границах φ_{\min} и φ_{\max} приближенно вычисляем следующим образом:

$$\left. \frac{d}{d\varphi} \left[f^{(1)}(\varphi, n) \right] \right|_{\varphi=\varphi_{\min}} = - \left. \frac{d}{d\varphi} \left[f^{(1)}(\varphi, n) \right] \right|_{\varphi=\varphi_{\max}} = \frac{f^{(1)}(\varphi_{\min} - \Delta\varphi)}{\Delta\varphi}, \quad (27)$$

где $\Delta\varphi$ — малое приращение φ .

Расчеты были проведены при следующих исходных данных: $A=0,4$; $B=0,5$; $m_\varphi(n)=0$; $D_\varphi(n)=1$; $\varphi_{\max} = -\varphi_{\min}=0,5$; $\tau_c=0,2$; $\Delta t=0,001$.

На рис. 2 изображен график $f^{(1)}(\varphi, n)$ плотности вероятности распределения фазовой координаты φ в момент t_n при гауссовом начальном условии. На рис. 3 изображен график $P_1(n)$, представленный в виде $P_1(t)$. На рис. 4 изображен график $P_2(n)$, представленный в виде $P_2(t)$. На рис. 5 представлены значения $P_{BC}(t_r)$, соединенные интерполяционной кривой.

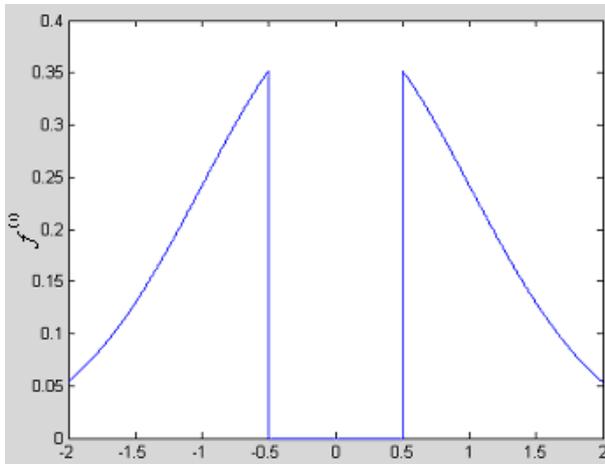


Рис. 2. График зависимости $f^{(1)}(\varphi, n)$

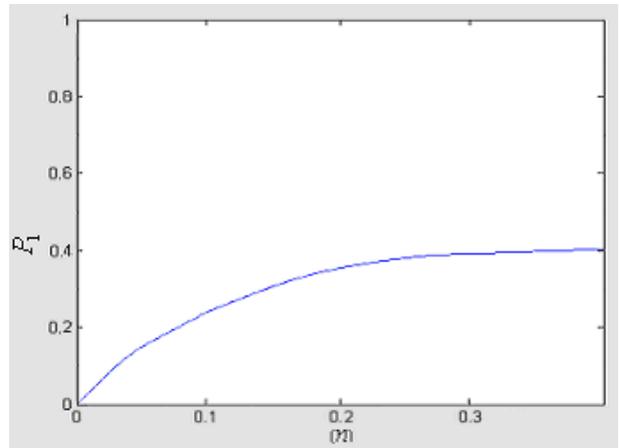


Рис. 3. График зависимости $P_1(n)$

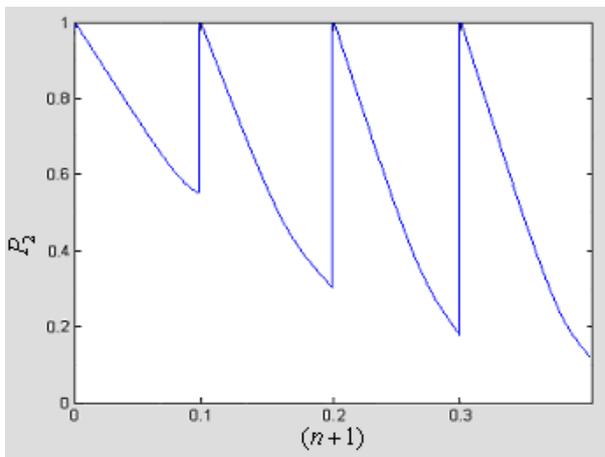


Рис. 4. Зависимость $P_2(n+1)$

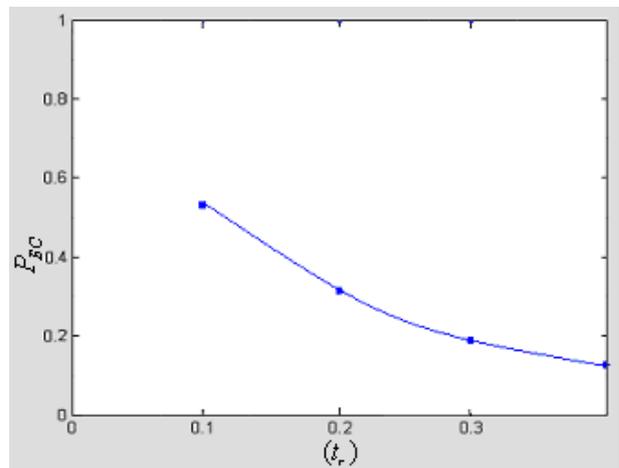


Рис. 5. Значения $P_{BC}(t_r)$

В соответствии с выражением (17) значения $P_{\text{БС}}(t_r)$ вычисляются в дискретные моменты времени, кратные τ_c . Однако изменяя (сдвигая вперед на заданную величину) начало отсчета (момент времени t_n) при $n=1$, вероятность беспрывного управления $P_{\text{БС}}$ можно вычислять в любой момент времени t_r .

Заключение

Результаты расчетов показывают, что при вероятностном срыве синхронизма систем ДСФУ необходимо учитывать инерционность системы, так как без учета этого фактора происходит существенное изменение вероятностной картины процесса, а это может привести к ошибкам при принятии решения о качестве объекта. Срыв управления происходит не мгновенно, а с некоторым запаздыванием τ_c , что характерно для реальной ДСФУ. При этом точность полученного решения тем выше, чем меньше τ_c по сравнению со временем работы системы.

Предлагаемый подход, основанный на введении функции поглощения, позволяет решать задачи вероятностного анализа граничных режимов ДСФУ, срыва синхронизма, то есть исследовать граничные режимы ДСФУ.

THE ANALYSIS OF PROBABILITY CHARACTERISTICS DISCRETE SYSTEMS OF PHASE MANAGEMENT

V.L. BUSKO, A.A. LOBATY, L.V. RUSAK

Abstract

On the basis of the theory Markov casual processes the problem of an estimation of probability characteristics of discrete systems of phase management is considered.

Литература

1. Батура М.П. Дискретные системы с фазовым управлением Минск, 2002.
2. Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. М., 1993.
3. Бусько В.Л., Лобатый А.А., Алькатауна Х.А. // Докл. БГУИР. 2007. Т. 6, № 3. С. 24–30.