УДК 681.3.519.241.2

ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИРУЮЩЕЙ АППАРАТУРОЙ

Э.А. БАКАНОВИЧ, Т.М. КРИВОНОСОВА

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 3 марта 2010

Рассмотрен способ построения устройств генерирования пуассоновских потоков сигналов с программно-управляемыми интенсивностями. Способ основан на инвариантности потоков этого типа к операциям вероятностного прореживания и суммирования. Приведены схемотехнические решения, направленные на создание генератора пуассоновских потоков сигналов для систем со стохастическими компонентами, позволяющие минимизировать число первичных генераторов пуассоновских потоков сигналов и обеспечить требуемую точность задания параметра формируемого пуассоновского потока.

Ключевые слова: автоматизация моделирования и испытаний, стохастические устройства, вероятностные преобразователи, генераторы пуассоновских потоков сигналов.

Введение

При создании современных сложных систем затраты на проведение испытаний и моделирование процессов их функционирования могут существенно превосходить затраты на разработку и изготовление образцов систем этого вида. Автоматизация испытаний и моделирования сложных систем, в частности, радиотехнических комплексов, обеспечивает значительный экономический и научно-технический эффект за счет сокращения объема натурных испытаний и обеспечения единства испытаний.

Многочисленные внешние факторы, воздействующие на электронную аппаратуру, и процессы, протекающие в ней в условиях реальной эксплуатации, являются случайными. Поэтому создание стохастических вычислительных и моделирующих устройств, основанных на вероятностных принципах представления и обработки информации и ориентированных на использование в автоматизированных системах управления моделированием и испытаниями для генерирования потоков случайных чисел, физических сигналов и процессов с программно-управляемыми характеристиками, является актуальной задачей.

Основным компонентом любой стохастической аппаратуры являются вероятностные преобразователи (ВП) — устройства, в которых входной первичный поток (или потоки) случайных сигналов (событий) с известными свойствами преобразуется в выходной случайный процесс с требуемыми вероятностными характеристиками. Вероятностный преобразователь называется управляемым (УВП), если за счет изменения структуры преобразователя, параметров его элементов или отдельных параметров входных потоков сигналов могут быть получены случайные процессы с различными требуемыми вероятностными характеристиками. В программно-управляемых вероятностных преобразователях (ПУВП) воспроизведение требуемой функции распределения обеспечивается введением в их память и изменением кодированных значений настроечных параметров.

Аналогично могут быть определены корреляционные преобразователи (КП), управляемые (УКП) и программно-управляемые корреляционные преобразователи (ПУКП).

Вероятностные и корреляционные преобразователи используются в стохастической вычислительной и моделирующей аппаратуре для формирования основного носителя информации

— потоков случайных величин (чисел, временных интервалов, амплитуд, фаз сигналов и т.д.), обладающих требуемыми свойствами.

Математические модели π- и S-операторов

Создание управляемых вероятностных элементов и преобразователей является необходимым, но не достаточным условием построения многофункциональных программно-управляемых стохастических устройств. Важнейшей задачей является разработка методов и средств программного управления параметрами первичных потоков случайных импульсных сигналов. В основу организации программного управления видом и числовыми характеристиками функции распределения вероятностей потока случайных величин, формируемых ПУВП, может быть положен способ, основанный на инвариантности распределения интервалов между соседними событиями в пуассоновском потоке по отношению к операциям стохастического прореживания и суммирования.

Обратимся к рис. 1. Поток $\varphi_\pi(z)$ назовем полученным из потока $\varphi(z)$ применением оператора π вероятностного прореживания, если каждое событие в $\varphi(z)$ с вероятностью p остается в потоке и с дополнительной вероятностью $q=1-p$ исключается, т.е. $\varphi_\pi(z)=\pi[\varphi(z)]$. Пусть $\varphi(z)$ — стационарный поток Пальма. Интервалы ϑ_π между соседними сигналами в потоке $\varphi_\pi(z)$ являются суммами случайного числа h взаимно-независимых слагаемых ϑ_i, каждое из которых имеет характеристическую функцию $g_{\vartheta i}(x)$. Величина h подчинена распределению Паскаля $P(h=k)=p\cdot q^{k-1}$. Так как $m[h]=1/p$, $D[h]=q/p^2$, то $m[\vartheta_\pi]=m[\vartheta]\cdot m[h]$, $D[\vartheta_\pi]=D[\vartheta]\cdot m[h]+$ $+(m[\vartheta])^2\cdot D[h]$; интенсивность прореженного потока $\varphi_\pi(z)$ $\lambda_\pi=1/(m[\vartheta]\cdot m[h])=\lambda\cdot p$, где λ — интенсивность исходного пуассоновского потока. Характеристическая функция $g_{\vartheta_\pi}(x)$ позволяет определить плотность распределения вероятностей $f(\vartheta_\pi)$ случайной величины ϑ_π.

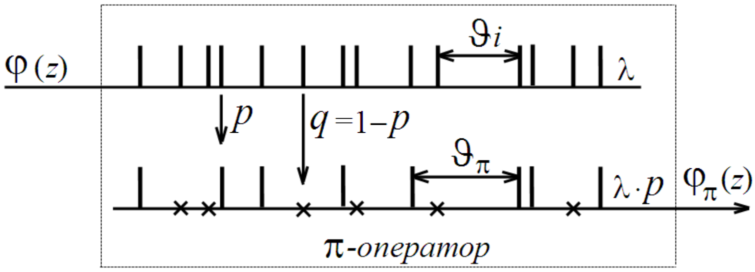

Рис. 1. Иллюстрация к действию π-оператора прореживания

Введем оператор преобразования исходного потока — S-оператор, в соответствии с которым поток $\varphi(z)$ подвергается π-преобразованию, а затем сжимается так, что его интенсивность после S-преобразования становится равной интенсивности исходного потока. В этом случае $\vartheta_S=\vartheta_\pi\cdot p$. Тогда $S[g(x)]=pg(x)/[1-qg(x)]$; $m[\vartheta_S]=m[\vartheta]$; $D[\vartheta_S]=D[\vartheta]\cdot p+(m[\vartheta])^2 q$.

Многократное последовательное прореживание со сжатием стационарного потока Пальма приближает его к простейшему. Пусть p_1, p_2, ..., p_n — вероятности таких преобразований, после каждого из которых поток сжимается. Тогда для n преобразований: $S^{(n)}[\varphi(t)]=Sp_n\{Sp_{n-1}\langle ...Sp_1[\varphi(t)]...\rangle\}$. Двойное прореживание со сжатием потока $\varphi(z)$, осуществляемое с вероятностями p_1 и p_2, эквивалентно применению одного оператора S с вероятностью $p=p_1\cdot p_2$. Поэтому $S^{(n)}[g(x)]=g[p^{(n)}x]/\{\langle 1-g[p^{(n)}x]\rangle\cdot[p^{(n)}]^{-1}+g[p^{(n)}x]\}$, где $p^{(n)}=\prod_{i=1}^{n}p_i$. Если неограниченно увеличивать число преобразований исходного потока ($n\to\infty$, $p^{(n)}\to 0$), то $\lim_{n\to\infty}S^{(n)}\ g(x)\ =\lambda/(\lambda-ix)$, т.е. предельный поток также будет потоком Пальма, но с показательным распределением интервалов между соседними событиями, т.е. простейшим потоком.

Известно, что при суммировании m простейших потоков с интенсивностями λ_k, $k=\overline{1,m}$, результирующий поток также будет простейшим с интенсивностью $\lambda=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k$. Если значения интенсивностей λ_i, $i\in\{\overline{0,m-1}\}$, $m(r-1)$ первичных пуассоновских потоков образуют $r-1$ идентичную числовую последовательность с параметрами, изменяющимися от λ_0 до λ_{m-1} по геометрической прогрессии со знаменателем r, а набор из m коэффициентов a_i, $a_i\in\{\overline{0,r-1}\}$, составляет код требуемого нормированного значения $\lambda_н=\lambda_в/\lambda_0$ параметра формируемого потока в системе счисления с основанием r, то формирование пуассоновского потока с параметром $\lambda_в\geq\lambda_0$ обеспечивается суммированием первичных пуассоновских потоков с параметрами и в количестве, определяемыми выражением

$$\lambda_в\approx\lambda_0\sum_{i=0}^{m-1}a_i r^i\,, \tag{1}$$

причем значение параметра выходного потока изменяется с шагом λ_0 в диапазоне от 0 до

$$\lambda_{\max}=\lambda_0(r^m-1)\approx r\lambda_{m-1}. \tag{2}$$

Точность задания значения $\lambda_в$ зависит от разрядности управляющих кодов m, которая при заданных r, λ_0 и $\lambda_{\max}$ может быть определена по (2).

Схемотехнические аспекты управления параметром потока

Функциональная схема устройства цифрового управления параметром пуассоновского потока приведена на рис. 2. Параметры первичных пуассоновских потоков от генераторов G_0 — G_{m-1} образуют двоичновзвешенный числовой ряд $\lambda_i=\lambda_0 2^i$. Выходной поток устройства имеет интенсивность $\lambda_j=\sum_{k=0}^{m-1}a_k\lambda_0 2^k=\sum_{k=0}^{m-1}a_k\lambda_k$, где λ_0 — минимальное значение интенсивности потока на выходе блока датчиков первичных потоков случайных импульсов (ДПСИ); a_k — коэффициенты, принимающие значения 0 или 1 в соответствии с кодом интенсивности λ_j, поступающим от блока формирования кода параметра (БФКП).

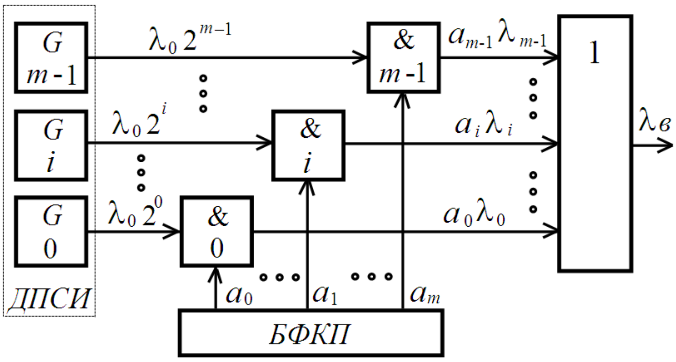

Рис. 2. Схема датчика пуассоновского потока сигналов с программным управлением параметром потока

Если $\lambda_j=\lambda_k$, то на выход устройства проходит первичный поток от G_k, и его характеристики полностью определяют характеристики выходного потока устройства. Во всех остальных случаях (при суммировании нескольких первичных потоков) "пуассоновость" выходного потока улучшается. Интенсивность пуассоновского потока, формируемого устройством, изменяется в пределах от $\lambda_{\min}=0$ до $\lambda_{\max}=\lambda_0(2^m-1)\approx 2\cdot\lambda_{m-1}$ с шагом λ_0, т.е. максимально возможное значение интенсивности этого потока в два раза выше максимального значения интенсивности первичных пуассоновских потоков. Рассмотренное устройство позволяет формировать нестационарные пуассоновские потоки.

При построении стохастических устройств на основе рассматриваемого способа управления параметрами первичных пуассоновских потоков необходимо решить задачи:

– оценки влияния значений реальных параметров сигналов первичных потоков на точность управления требуемой интенсивностью;

– минимизации числа генераторов первичных пуассоновских потоков;

– оценки допустимой нестабильности параметров первичных потоков.

Рассмотрим суть перечисленных задач.

Исследование влияния реальных параметров импульсных сигналов потока. Точность программного управления параметрами формируемых потоков в значительной мере определяется потерями сигналов из-за перекрытий во времени импульсов различных первичных потоков. Для оценки величины уменьшения параметра формируемого пуассоновского потока можно воспользоваться аппаратом теории случайных импульсных потоков [1]. Будем считать, что сигналы, совпадающие на входе дизъюнктора (рис. 2), образуют поток совпадений, при этом k совпавших импульсов воспринимаются дизъюнктором как один сигнал случайной длительности (рис. 3). Среднее значение интенсивности потока совпадений $\mu_{m,m}$ при совпадении m сигналов из m потоков, при минимальной длительности перекрытия импульсов $\delta=0$, определяется следующим образом: $\mu_{m,m} = \sum_{s=1}^{m}(1/\tau_s)\cdot\prod_{i=1}^{m}\lambda_i\tau_i$, где $\tau_i=\tau_s$ при $i=S$ — длительность импульса i-го потока с параметром λ_i. Если принять, что длительность импульса любого потока $\tau_i=\tau=\text{const}$, то

$$\mu_{m,m} = m\cdot\tau^{m-1}\cdot\prod_{i=1}^{m}\lambda_i . \tag{3}$$

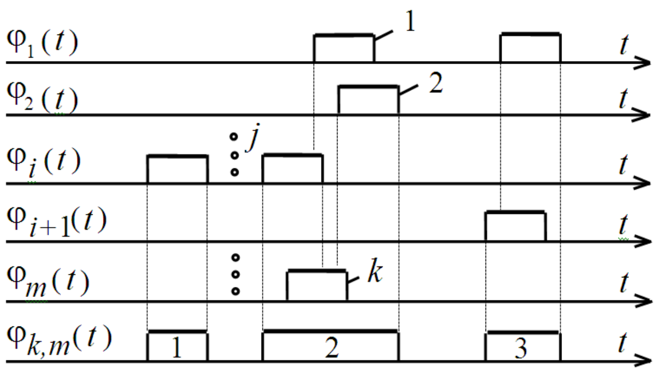

Рис. 3. Иллюстрация к процессу образования потока совпадений $\varphi_{k,m}(t)$: *1* — импульс без перекрытия; *2, 3* — импульсы, образованные в результате перекрытия сигналов первичных потоков $\varphi_1(t)\div\varphi_m(t)$

Учет воздействия всех потоков совпадений при большом m приводит к громоздким выкладкам. Поэтому при расчетах, пригодных для автоматического управления аппаратурой, можно найти оценки сверху значений параметров потоков совпадений. Всего может быть образовано $m-1$ типов потоков совпадений — потоки совпадений i импульсов из m потоков, где $i=\overline{2,m}$. Параметр формируемого ДПСИ пуассоновского потока при суммировании всех первичных потоков уменьшается на величину параметра суммарного потока совпадений, при этом (3) принимает вид

$$\mu_{m,m} = (m-1)\tau^{m-1}\prod_{i=1}^{m}\lambda_i . \tag{4}$$

Обозначим символом μ_2 параметр потока совпадений первого типа в ряду $i=\overline{2,m}$ и $\mu_2(i)$ — параметр потока совпадений от перекрытия импульсов i-го потока с сигналами каждого из последующих потоков, при этом

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^{m-1} \mu_2(i)\,, \tag{5}$$

а (4) для m=2 принимает вид

$$\mu_{2,2} = \tau\lambda_i\lambda_j\,; \tag{6}$$

поэтому

$$\mu_{2,i} = \tau\lambda_i \sum_{j=i+1}^{m} \lambda_j\,. \tag{7}$$

Учитывая (6) и (7), представим (5) в следующем виде:

$$\mu_2 = \tau\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \sum_{j=i+1}^{m} \lambda_j\,. \tag{8}$$

Если изменить обозначения потоков в схеме ДПСИ, то значения параметров первичных потоков образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем q=1/2 при наибольшем значении λ_1, т.е. $\lambda_i = \lambda_1 \cdot q^{i-1}$. Используя (7), с точностью до $2^{-(m-1)}$ получим: $\mu_2(1) = \tau\lambda_1\left[\lambda_1 2^{-1} + \lambda_1 2^{-2} + \ldots + \lambda_1 2^{-(m-1)}\right] < \tau\lambda_1^2$, $\mu_2(2) = \tau\lambda_1 2^{-1}\left[\lambda_1 2^{-2} + \lambda_1 2^{-3} + \ldots + \lambda_1 2^{-(m-1)}\right] < \tau\lambda_1^2 2^{-2}$, $\mu_2(3) = \tau\lambda_1 2^{-1}\left[\lambda_1 2^{-3} + \lambda_1 2^{-4} + \ldots + \lambda_1 2^{-(m-1)}\right] < \tau\lambda_1^2 2^{-4}$ и т.д. Используя (8) или (5), можно найти $\mu_2 \approx \tau\lambda_1^2\left[1 + 2^{-2} + 2^{-4} + \ldots + 2^{-2(m-2)}\right] \approx 1{,}33\tau\lambda_1^2$.

Если в (4) положить m=3, то $\mu_3(i,j,k) = 2\tau^2\lambda_i\lambda_j\lambda_k$ для $i<j<k$, $i \in \{\overline{1, m-2}\}$, $j \in \{\overline{2, m-1}\}$, $k \in \{\overline{3, m}\}$. По аналогии с (8) $\mu_3 = 2\tau^2 \sum_{i=1}^{m-2} \lambda_i \cdot \sum_{j=i+1}^{m-1} \lambda_j \cdot \sum_{k=j+1}^{m} \lambda_k$.

Оценка μ_3: $\mu_3 < 0{,}38\tau^2 \cdot \lambda_1^3$. Так как $\mu_3 \gg \mu_4 \gg \ldots$, то параметр общего потока совпадений можно принять равным

$$\mu \approx \mu_2 + \mu_3 = \tau\lambda_1^2(1{,}33 + 0{,}38\lambda_2)\,. \tag{9}$$

Выражение (9) позволяет оценить предельную точность управления интенсивностью при заданном значении λ_{max} и при использовании элементной базы с минимальной длительностью импульса τ_m. С другой стороны, при заданных диапазоне изменения интенсивности и точности управления могут быть сформулированы требования к элементной базе. Если считать, что для логических элементов минимальная скважность Q=2, то при выбранной элементной базе с известной величиной τ_m расчет влияния конечной разрешающей способности элементов на точность управления может быть выполнен с использованием (9) при $\tau = 2\tau_m$.

Минимизация числа первичных генераторов. Для упрощения устройств формирования пуассоновского потока сигналов с программно-управляемой интенсивностью и для повышения точности воспроизведения геометрической прогрессии числовых значений интенсивностей λ_i первичных потоков может быть использован [2–4] способ формирования m непересекающихся первичных пуассоновских потоков с использованием единственного генератора G первичного пуассоновского потока — рис. 4 и 5.

Пуассоновский импульсный поток от генератора G с параметром λ_m^* поступает на входы равновероятностных элементов (РВЭ) с импульсными выходами. Каждый сигнал вызывает срабатывание всех РВЭ, но проходит только через i-й элемент при условии, что все РВЭ от первого до (i–1)-го находятся в нулевом состоянии; на все РВЭ с номерами от (i+1)-го до m поступает запрет от i-го РВЭ. Вероятность такого события при r=2 и p=q=0,5 равна $p_i = 2^{-i}$.

В этом случае интенсивность пуассоновского потока на выходе i-го РВЭ $\lambda_i = \lambda_m^* \cdot 2^{-i} = \lambda_m^* \cdot p_i$. Структурный элемент, образованный всеми РВЭ на рис. 3, назовем вероятностным $(1, m)$-полюсником.

На рис. 5 представлена функциональная схема устройства для формирования пуассоновского потока с программно-управляемой интенсивностью. В качестве многоканального генератора первичных пуассоновских потоков использован вероятностный $(1, m)$-полюсник, показанный на рис. 4. Код требуемого параметра $\lambda_в$ выходного потока является двоичной дробью $0, a_1a_2\ldots a_m$, разрядные цифры которой $a_i \in \{0, 1\}$ определяются при переводе в двоичную систему счисления нормированного значения параметра выходного потока $\lambda_н = \lambda_в / \lambda_m^*$, при этом по аналогии с (1) $\lambda_в = \sum_{i=1}^{m} a_i\lambda_i = \lambda_m^* \sum_{i=1}^{m} a_i 2^{-i}$. Однако рассматриваемое устройство имеет и определенный недостаток по сравнению со схемой, приведенной на рис. 2: в данном случае нельзя получить интенсивность выходного пуассоновского потока большую, чем интенсивность формируемого генератором G первичного случайного потока.

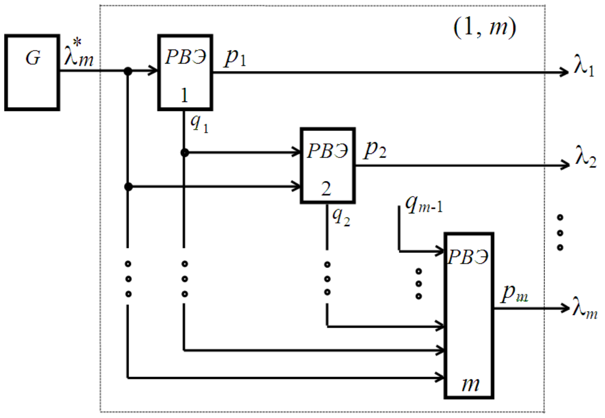

Рис. 4. Функциональная схема многоканального генератора непересекающихся пуассоновских потоков

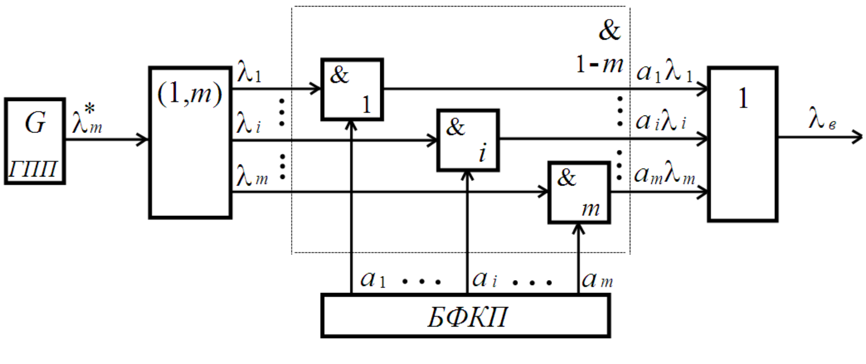

Рис. 5 Функциональная схема модифицированного генератора пуассоновского потока случайных импульсов с цифровым управлением параметром потока (ГПП – генератор пуассоновского потока)

Оценка допустимой нестабильности первичных потоков. При решении этой задачи необходимо учесть особенности нестабильности и нестационарности параметра потока [2, 3]. Влияние нестабильности на точность управления воспроизводимыми функциями распределения можно оценить величиной приведенного относительного отклонения $\delta_m = \Delta\lambda_{\max} / \lambda_{\max}$. Потребуем, чтобы величина δ_{1m} нестабильности первичных потоков не превышала заданного значения $\delta_{1m} \le \alpha\delta_{2m}$ при $\Delta\lambda_{\max} = \sum_{i=0}^{m-1} \Delta\lambda_i$ для случая появления у всех первичных источников отклонений одного знака. Пусть δ_{2m} представляет собой приведенную относительную погрешность квантования непрерывных значений интенсивности $\lambda_н$ при округлении в связи с использованием конечной разрядной сетки [4, 5]: $\delta_{2m} = \lambda_0 / 2\lambda_{\max} \approx 2^{-(m-1)}$. Без потери общности можно допустить, что отклонения $\Delta\lambda_i$ связаны со значением $\Delta\lambda_0$ соотношением $\Delta\lambda_i = \Delta\lambda_0 2^i$, при этом $\delta_{\lambda i} = \delta_{\lambda j},\ i \neq j,\ i, j \in \{\overline{0, m-1}\}$. Тогда $\delta_{1m} = \sum_{i=0}^{m-1} \Delta\lambda_0 2^i / \lambda_{\max} \leq \alpha\lambda_0 / 2\lambda_{\max}$, откуда

$$\Delta\lambda_0 \leq \alpha\lambda_0 / \sum_{i=0}^{m-1} 2^{i+1} \approx \alpha\lambda_0 2^{-(m-1)}, \text{ и} \tag{10}$$

$$\delta_{\lambda i} \leq \alpha 2^{-(m+1)} < \alpha 2^{(6-m)} (\%). \tag{11}$$

При $\alpha \to 0$ максимальная приведенная относительная погрешность не превышает величины погрешности округления – типичной погрешности цифровых устройств. При α=1 максимальная относительная приведенная погрешность может быть представлена так: $\delta_m = \delta_{1m} + \delta_{2m} \approx 2\delta_{2m}$.

Анализ (10) и (11) показывает, что при увеличении разрядности m кода управления быстро растут требования к стабильности первичных потоков. Эти выражения позволяют по известным значениям $\delta\lambda_i$ найти оценки предельных разрядностей m, дальнейшее увеличение которых оказывается нецелесообразным, так как при этом уже не повышается точность воспроизведения управляемых параметров потока.

PROGRAMMED CONTROL FOR STOCHASTIC MODELING EQUIPMENT

E.A. BAKANOVICH, T.M. KRIVONOSOVA

Abstract

The paper dwells on the approach of constructing Poison streams generating equipment with program-driven intensities. The approach is based on the invariant property of this-type of streams to probabilistic decimation and summarizing. The paper presents general-circuit solutions for Poison stream generator, intended for use in the systems containing stochastic components. This enables to minimize the number of primary Poison stream generators and provide the required parameter accuracy for the generated Poison streams.

Литература

1. *Седякин Н.М.* Элементы теории случайных импульсных потоков. М., 1965.
2. *Четвериков В.Н., Баканович Э.А., Меньков А.В.* Вычислительная техника для статистического моделирования. М., 1978.
3. *Четвериков В.Н., Баканович Э.А.* Стохастические вычислительные устройства систем моделирования. М., 1989.
4. *Алексеев Г.И.* Воспроизведение функций средствами цифро-аналоговой вычислительной техники. Минск, 1976.
5. *Соренков Э.И., Телига А.И., Шаталов А.С.* Точность вычислительных устройств и алгоритмов. М., 1976.