Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра программного обеспечения информационных технологий

Н. С. Петюкевич, И. В. Тузик

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА: ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ И ОТНОШЕНИЙ

Рекомендовано УМО по образованию в области информатики и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия для специальностей 1-39 03 02 «Программируемые мобильные системы», 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий», 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)», 1-58 01 01 «Инженерно-психологическое обеспечение информационных технологий», направления специальности 1-40 05 01-10 «Информационные системы и технологии (в бизнес-менеджменте)»

Минск БГУИР 2019

УДК 519.854(076)
ББК 22.17я73
П31

Рецензенты:

кафедра дискретной математики и алгоритмики
Белорусского государственного университета
(протокол №3 от 10.10.2018);

директор филиала ИООО «ЭПАМ Системз» (г. Брест)
кандидат физико-математических наук, доцент С. А. Тузик

Петюкевич, Н. С.

П31 Дискретная математика: теория множеств и отношений : учеб.-метод. пособие / Н. С. Петюкевич, И. В. Тузик. – Минск : БГУИР, 2019. – 72 с. : ил.
ISBN 978-985-543-472-7.

Содержит теоретический материал по первому и второму разделам дисциплины «Дискретная математика» в рамках действующей программы.

Будет полезно студентам различных специальностей, а также всем интересующимся дискретной математикой.

УДК 519.854(076)
ББК 22.17я73

ISBN 978-985-543-472-7

Содержание

Введение

Дискретная математика (ДМ), или дискретный анализ, – область математики, которая занимается исследованиями структур и задач на конечных множествах (иногда используется термин «конечная математика»). Если считать общепринятым деление математики на континуальную (непрерывную) и дискретную, то последняя представляет собой важное направление, имеющее характерные для него предмет исследований, методы и задачи. Специфика задач ДМ в первую очередь предполагает отказ от основных понятий классической математики – предела и непрерывности, поэтому для задач ДМ обычные средства классического анализа являются вспомогательными. Дискретная и непрерывная математика взаимно дополняют друг друга. Понятия и методы одной часто используются в другой. Один и тот же объект может рассматриваться с двух точек зрения: в зависимости от того, непрерывная или дискретная модель выбирается. Умение проводить анализ, композицию и декомпозицию информационных комплексов и информационных процессов – обязательное квалификационное требование к специалистам в сфере информационных технологий, что обуславливает роль ДМ в процессе подготовки специалистов.

Знание дискретной математики необходимо для создания и эксплуатации интегрированных систем обработки информации и их компонентов (математического обеспечения, пакетов прикладных программ, распределенных банков данных, сетей передачи данных, систем с разделением ресурсов и распределенной обработкой информации).

В узком смысле ДМ ограничивается только новыми разделами, к которым относятся: теория функциональных систем, теория графов, теория автоматов, теория кодирования, теория алгоритмов и др.

В широком смысле ДМ включает в себя такие сложившиеся математические разделы, как теория множеств и отношений, математическая логика, комбинаторный анализ, а также ряд других, которые стали развиваться наиболее интенсивно в связи с внедрением вычислительной техники.

В данном учебно-методическом пособии рассматриваются элементы раздела дискретной математики теории множеств и отношений.

Методы теории множеств широко используются во всех областях современной математики и математической логики. Понятие «отношения» является очень важным не только с математической точки зрения, оно фактически лежит в основе всей реляционной теории баз данных. Знание теории множеств в совокупности со знанием алгебры, математической логики и теории графов совершенно необходимо для четкой формулировки понятий и постановок различных прикладных задач, их формализации и компьютеризации, а также для усвоения основ современных информационных технологий и разработки практических приложений в этой области.

Теоретический материал учебно-методического пособия изложен в доступной форме, сопровождается большим количеством примеров и решением типовых задач. Также приведены упражнения для самостоятельной работы. Для каждого задания для самостоятельной работы предлагается по 20 вариантов, а также подробно разобранный пример решения. Также приводятся вводные понятия теории нечетких множеств и нечетких отношений, носящие ознакомительный характер.

В учебно-методическом пособии используются следующие обозначения:

– $\forall$ (квантор общности) – «для любого», «для каждого», «для всех»;

– $\exists$ (квантор существования) – «найдется», «существует», «хотя бы для одного»;

– $\Rightarrow$ (знак логического следования, импликация) – «если…, то…», «следует»;

– $\Leftrightarrow$ (знак логической равносильности, эквиваленция) – «тогда и только тогда».

Обозначения множеств:

– $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;

– $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;

– $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел;

– $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел.

Знаком «*» отмечены разделы, носящие ознакомительный характер, и дополнительные задания.

1 Основные понятия теории множеств

1.1 Вводные определения

В основе современной теории множеств лежат работы немецкого математика Георга Кантора, который говорил: «Множество есть многое, мыслимое нами как единое целое».

Понятию множества невозможно дать точное определение, поскольку оно является первичным, предельно широким по содержанию. Его можно лишь пояснить. Под *множеством* обычно понимают совокупность или набор каких-то объектов, имеющих что-то общее, при этом каждый их них чем-то отличается от другого, т. е. уникален. Объекты, из которых состоит множество, называются его *элементами*. Элементами множества могут быть другие множества, тогда говорят о *семействе множеств*.

Общее обозначение множества – эта пара фигурных скобок $\{\}$, внутри которых перечисляются или описываются элементы множества. Элементы множества обозначают строчными буквами без индексов a, b, … или с индексами a_1, a_2, …, а сами множества обозначаются прописными буквами A, S, X, … или X_1, X_2, … . Если множество A состоит из элементов a, b, c, то пишут $A = \{a, b, c\}$. Порядок элементов в множестве не важен, т. е. $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$. Для обозначения принадлежности элемента множеству используют знак принадлежности $\in$, например:

$x \in A$ – элемент *принадлежит* множеству A;

$x \notin A$ – элемент *не принадлежит* множеству A.

Множества делятся на *конечные* и *бесконечные*. Множество называется конечным, если оно состоит из конечного числа элементов, бесконечное множество содержит бесконечное число элементов.

Множество, содержащее один элемент, называется *синглетоном*. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$ без фигурных скобок. Заметим, что $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

Приведем примеры множеств:

1) множество студентов некоторой группы университета;
2) множество домов некоторого района города;
3) множество букв русского алфавита;
4) множество натуральных чисел $\mathbb{N}$;
5) множество действительных чисел $\mathbb{R}$;
6) множество нечетных чисел, нацело делящихся на 2.

Множества 1–3 являются конечными, множества 4 и 5 являются бесконечными, а 6 – пустое множество.

Параметром, характеризующим размер множества, является *мощность* множества или *кардинальное число*. Мощность конечного множества A равна количеству его элементов и обозначается $|A|$.

Если множества A и B *равномощны,* т. е. $|A| = |B|$, то между ними можно установить *взаимно однозначное соответствие.* В этом случае каждому элементу множества A ставится в соответствие элемент множества B и наоборот.

Множества, равномощные с множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$, называются *счетными*. Например, множество четных чисел, обозначим его K, является счетным, т. к. каждому четному числу можно поставить в соответствие натуральное число, т. е. пронумеровать:

K	2	4	6	.	.	.
$\mathbb{N}$	1	2	3	.	.	.

Множество A является *подмножеством* множества B, если всякий элемент из A принадлежит B, и это обозначается $A \subseteq B$. Запись $A \subset B$ равносильна тому, что A является подмножеством B и $A \neq B$ (разница между знаком строгого включения $\subset$ и знаком включения $\subseteq$ равносильна разнице между $<$ и $\leq$).

Множество A равно множеству B ($A = B$), если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Равные множества состоят из одних и тех же элементов.

Отметим, что отношение принадлежности связывает объекты двух разных типов:

$$\textit{элемент} \in \textit{множество},$$

а отношение включения связывает объекты одного и того же типа:

$$\textit{множество} \subseteq \textit{множество}.$$

Пример 1. Определим, какие из утверждений истинны:

1) $0 \in \{0,1\}$ – верно, т. к. элемент 0 есть среди элементов множества $\{0, 1\}$;

2) $\{2,0\} \subset \{\{0, 1\}, 2\}$ – не верно, т. к. элемента 0 из $\{2, 0\}$ нет в двухэлементном множестве $\{\{0, 1\}, 2\}$, т. е. $\{2, 0\}$ не является подмножеством $\{\{0, 1\}, 2\}$;

3) $\varnothing \subseteq \varnothing$ – верно, т. к. пустое множество является подмножеством любого множества;

4) $\{2\} \subseteq \{\{0, 1\}, 2\}$ – верно, т. к. единственный элемент 2 из множества $\{2\}$ есть в множестве $\{\{0, 1\}, 2\}$;

5) $\{0, 1\} \in \{\{0, 1\}, 2\}$ – верно, т. к. элемент $\{0, 1\}$ есть в множестве $\{\{0, 1\}, 2\}$;

6) $0 \in \{\{\{0, 1\}, 2\}, \varnothing\}$ – не верно, т. к. элемента 0 нет в двухэлементном множестве $\{\{\{0, 1\}, 2\}, \varnothing\}$;

7) $2 - 1^0 \in \{0, 1\}$. Если элемент, для которого проверяется принадлежность множеству, представляет собой выражение, то вначале вычисляется значение этого выражения, а затем проверяется справедливость отношения. $2 - 1^0 = 1$, значит, утверждение верно, т. к. в множестве $\{0, 1\}$ есть элемент 1;

8) $\varnothing \notin \varnothing$ – не верно, т. к. в пустом множестве нет никаких элементов, в том числе и элемента $\varnothing$;

9) $\{0, 1\} \subseteq \{0, 1\}$ – верно, т. к. любое множество всегда является своим собственным подмножеством;

10) $\varnothing \subseteq \{\{0, 1\}, 2\}$ – верно, т. к. пустое множество является подмножеством любого множества.

У каждого множества A мощности $|A|$ существует $2^{|A|}$ подмножеств, причем пустое множество является подмножеством любого множества.

Само множество A и пустое множество называются *несобственными* подмножествами множества A, а остальные – *собственными*. Множество всех подмножеств некоторого множества A называется его *булеаном* (обозначается 2^A, $P(A)$ или $B(A)$).

Пример 2. Дано множество $A = \{0, 1, 2\}$. Записать все его подмножества.

Решение. Найдем количество подмножеств множества A: $2^{|A|} = 2^3 = 8$, $2^A =$ $= \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$.

Для конечных множеств вводится понятие *универсального множества*, или *универсума*, которое обозначается U (либо I). Множество U – это множество всех тех элементов, которые участвуют в рассуждении. Например, для множества студентов первого курса в качестве универсума можно выбрать множество всех студентов данного университета.

1.2 Задание множеств

Множества могут быть заданы следующими способами:

1. Путем прямого перечисления элементов множества. При этом перечисляемые элементы, как было рассмотрено выше, заключаются в фигурные скобки и отделяются один от другого запятыми, например, $A = \{a, b, c, d\}$.

2. При помощи правила или свойства (характеристического предиката), которому должны удовлетворять элементы множества. Задание множества $A = \{x \mid P(x)\}$ означает, что элемент x множества A обладает свойством $P(x)$. Например, $A = \{x \mid 1 \le x \le 10, x \in \mathbb{N}\}$ – множество натуральных чисел от 1 до 10.

3. С помощью порождающей процедуры, которая определяет способ получения элементов множества. Например, для бесконечного множества $A = \{3, 9, 27, 81, \ldots\}$ такой порождающей процедурой является следующая:

1) $3 \in A$;

2) если $a \in A$, то $3a \in A$.

4. В виде формулы (алгебраический способ). Множество можно получить из других множеств с помощью алгебраических операций над ними.

5. При представлении множеств на плоскости в виде фигур, называемых диаграммами Эйлера – Венна.

6. При представлении в виде булева вектора. Для конечного множества A, являющегося подмножеством универсума U, число компонент булева вектора равно $|U|$. Компонента булева вектора будет равна единице, если соответствующий элемент из универсума принадлежит множеству A, и равна нулю – в противном случае. Например, множество $A = \{1, 3, 7\}$, являющееся подмножеством универсума $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, представимо вектором 1010001.

Задание множеств способами 4 и 5 будет рассмотрено ниже.

Пример 1. Дан универсум $U = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ 0 \le x \le 9\}$ и его подмножества $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{x \in U \mid x$ – нечетное$\}$, $C = \{3, 6, 8, 9\}$, $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \le x \le 9\}$, $E = \{x \in U \mid x < 5\}$, $G = \{0, 9\}$. Задать множества U, B, D, E путем прямого перечисления элементов, множества A, C, G задать в виде булева вектора.

Решение

Множество U состоит из целых чисел от 0 до 9, значит, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Множество B состоит из нечетных чисел множества U, т. е. $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

$D = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Универсум U состоит из 10 элементов, значит, булевы векторы, представляющие подмножества универсума, будут содержать 10 компонент.

A = 0111010101.

C = 0001001011.

G = 1000000001.

Пример 2. Даны множества A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T:

$A = \{3, 5, 7, 1, 0\}$; $B = \{\{1\}, \{\varnothing\}, 0, 8\}$; $C = \{\{1, 3\}, 1 - \lg 10, 1\}$;

$D = \{\{\{0, 1\}, \{2\}, 3\}, \{5, 2\}, 4, \{3\}\}$; $E = \{\varnothing, |-1|\}$; $F = \{\{0\}, \{1\}\}$;

$G = \{1, \{0\}, \{\varnothing\}\}$; $H = \varnothing$; $I = \{1\}$; $J = \{\varnothing, \{1, 2\}, 0\}$; $K = \{-\cos\pi, 0\}$;

$L = \{0, \{1\}, \{1, 2\}\}$; $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \ln(z - 1),\ z \in \mathbb{Z}\}$;

$N = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 1/(2-k), k \in \mathbb{Z}\}$; $O = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$; $P = \{x \in \mathbb{N} \mid (x^2 - 1)(x - 2) = 0\}$;

$R = \{x \mid x = \sin\frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{N}\}$; $S = \{-1, 2, -4, 8, -16\}$; $T = \{\varnothing, 0\}$.

а) Среди множеств *E, F, G, H, I, J, K, L* указать множества, в которые входят элементы, равные единице.

б) Среди множеств *A, I, H, G, F, M, N, O* выделить конечные, бесконечные и пустые.

в) Определить, верны ли следующие отношения принадлежности: $\varnothing \in E$, $\varnothing \in B$, $\{1\} \in C$, $0 \in A$, $0 \in C$, $\{0\} \in H$, $I \in B$, $\{0\} \in J$, $\{0, 1\} \in D$, $\{2, 5\} \in D$, $I \in F$, $I \in G$.

г) Вычислить мощность каждого из четырех указанных множеств: *A*, *I*, *H*, *N*.

д) Перечислить элементы множеств *P* и *R*, заданных описанием.

е) Задать описанием три множества: *H*, *I*, *S*.

ж) Выписать все подмножества множества *E*.

з) Определить, верны ли заданные отношения включения: $T \subseteq J$, $H \subseteq F$, $T \subseteq E$.

Решение

а) Множества, в которые входят элементы, равные единице:

– *E*, т. к. в *E* есть элемент $|-1| = 1$;
– *G*, т. к. в *G* есть элемент 1;
– *I*, т. к. в *I* есть элемент 1;
– *K*, т. к. в *K* есть элемент $-\cos\pi = 1$.

б) Конечные множества: *A*, *I*, *G*, *F*, *N*.

Бесконечное множество: *O* (множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, имеющихся на промежутке от –1 до 1, бесконечно).

Пустые множества: *H* (задано как пустое), *M* (не сдержит ни одного элемента, т. к. функция логарифма не определена для отрицательных аргументов, а по условию *z* является целым отрицательным числом, значит, $z - 1 < 0$ для любого такого *z*).

в) $\varnothing \in E$, т. к. в $\mathrm{E} = \{\boldsymbol{\varnothing}, |-1|\}$ среди двух имеющихся элементов есть $\varnothing$ (выделен жирным шрифтом).

$\varnothing \notin B$, т. к. в $B = \{\{1\}, \{\varnothing\}, 0, 8\}$ нет элемента $\varnothing$, $\{\varnothing\} \neq \varnothing$.

$\{1\} \notin C$, т. к. в $C = \{\{1, 3\}, 1 - \lg 10, 1\}$ нет такого элемента.

$0 \in A$, т. к. в $A = \{3, 5, 7, 1, 0\}$ есть такой элемент.

$0 \in C$, т. к. в $C = \{\{1, 3\}, 1 - \lg 10, 1\}$ есть элемент, равный нулю: $1 - \lg 10 = 0$.

$\{0\} \notin H$, т. к. $H = \varnothing$, а пустое множество вообще никаких элементов не содержит, в том числе и $\{0\}$.

$I \in B$, т. к. $I = \{1\}$, а в $B = \{\{1\}, \{\varnothing\}, 0, 8\}$ есть элемент $\{1\}$.

$\{0\} \notin J$, т. к. в $J = \{\varnothing, \{1, 2\}, 0\}$ нет элемента $\{0\}, \{0\} \neq 0$.

$\{0, 1\} \notin D$, т. к. в $D = \{\{\{0, 1\}, \{2\}, 3\}, \{5, 2\}, 4, \{3\}\}$ среди четырех имеющихся элементов ни один не совпадает с элементом $\{0, 1\}$: $\{\{0, 1\}, \{2\}, 3\} \neq \{0, 1\}$, $\{5, 2\} \neq \{0, 1\}$, $4 \neq \{0, 1\}$, $\{3\} \neq \{0, 1\}$.

$\{2, 5\} \in D$, т. к. в $D = \{\{\{0,1\}, \{2\}, 3\}, \{5, 2\}, 4,\{3\}\}$ есть элемент $\{5, 2\}$, равный $\{2, 5\}$.

$I \in F$, т. к. $I = \{1\}$, а в $F = \{\{0\}, \{1\}\}$ есть элемент $\{1\}$.

$I \notin G$, т. к. $I = \{1\}$, а в $G = \{1, \{0\}, \{\varnothing\}\}$ нет такого элемента ($1 \neq \{1\}$).

г) $|A| = 5$, т. к. множество $A = \{3, 5, 7, 1, 0\}$ состоит из пяти различных элементов.

$|I| = 1$, т. к. множество $I = \{1\}$ состоит из одного элемента.

$|H| = 0$, т. к. в пустом множестве нет ни одного элемента.

$|N| = 1$, т. к. подставляя указанные целые значения k в выражение $1/(2 - k)$, имеем, что при $k \leq 0$ и при $k > 2$ выражение $1/(2 - k)$ принимает дробные значения и не удовлетворяет условию $x \in \mathbb{N}$; при $k = 2$ возникает деление на 0, и только при $k = 1$ получаем единственный элемент множества N: $x = 1/(2 - 1) = 1$.

д) $P = \{x \in \mathbb{N} \mid (x^2 - 1)(x - 2) = 0\} = \{1, 2\}$, $R = \{x \mid x = \sin\frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{N}\} = \{-\sqrt{3}/2, 0, \sqrt{3}/2\}$.

е) Пустое множество $H = \varnothing$ следует задавать уравнением или неравенством, которое не будет иметь решений в заданной области. Например, $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$. Уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решений при действительных x, значит, в множестве H нет ни одного элемента, оно пусто.

Множество $I = \{1\}$ можно задать описанием так: $I = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2\}$. Так как множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, то единственный элемент $x \in \mathbb{N}$, удовлетворяющий условию $x < 2$, это 1.

Для задания описанием множества $S = \{-1, 2, -4, 8, -16\}$ надо записать выражение, которому подчиняется предложенная последовательность чисел. Например: $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = (-1)^{k+1}2^k, k = 0, 1, 2, 3, 4\}$.

ж) Так как $E = \{\varnothing, |-1|\}$ – двухэлементное, то имеется всего $2^2 = 4$ различных его подмножеств: $\varnothing$ (является подмножеством любого множества), $\{\varnothing\}$, $\{|-1|\}$ (все одноэлементные подмножества множества E), $\{\varnothing, |-1|\}$ (единственное двухэлементное подмножество множества E).

з) $T \subseteq J$, или $\{\varnothing, 0\} \subseteq \{\varnothing, \{1, 2\}, 0\}$, т. к. и элемент $\varnothing$, и элемент 0 из множества T имеются среди элементов множества J.

$H \subseteq F$, или $\varnothing \subseteq \{\{0\},\ \{1\}\}$, т. к. пустое множество является подмножеством любого множества.

$T \not\subset E$, или $\{\varnothing,\ 0\} \not\subset \{\varnothing,\ |-1|\}$, т. к. элемент 0 из множества $\{\varnothing,\ 0\}$ отсутствует в множестве E.

Упражнения к подразделам 1.1 и 1.2

1. Сколько элементов в каждом из множеств:

а) $\{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$; в) $\{\varnothing\}$;

б) $\{1, \{1\}, 2, \{1, \{2, 3\}\}, \varnothing\}$; г) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

2. Какие из следующих утверждений верны?

а) $b \subset \{a, b\}$; е) $\{b\} \subset \{a, \{b\}\}$;

б) $\{b\} \subset \{a, b\}$; ж) $b \in \{a, b\}$;

в) $b \in \{a, \{b\}\}$; з) $\{b\} \in \{a, \{b\}\}$;

г) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$; и) $\{0, 1\} \in \{\{\{0, 1\}, 2\}\}$;

д) $\{0, 1\} \in \{\{0, 1\}\}$; к) $\{2, 0\} \in \{0, 1, 2\}$.

3. Некоторое множество имеет 62 собственных подмножества. Найдите мощность этого множества.

4. Дано множество $S = \{a, b, 1, 2, 3, 4\}$. Сколько существует подмножеств этого множества, не содержащих букв? Сколько существует подмножеств, не содержащих цифр? Сколько существует подмножеств, не содержащих ни букв, ни цифр?

5. Некоторое множество содержит пять одноэлементных подмножеств. Найдите мощность булеана этого множества.

6. Булеан множества M имеет 16 элементов. В множество M добавили несколько элементов. Получилось новое множество A, для которого $2^{|A|} = 1024$. Сколько элементов добавили?

7. Дано множество P. Когда из него удалили три элемента, получилось множество, булеан которого содержит 64 элемента. Найдите $2^{|P|}$.

8. Задайте множества путем перечисления их элементов и с помощью правила:

а) множество натуральных двузначных чисел, кратных 2;

б) множество корней уравнения $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$, $x \in R$.

9. Укажите элементы множеств и задайте множества в виде булева вектора, если $P \subseteq U, U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$:

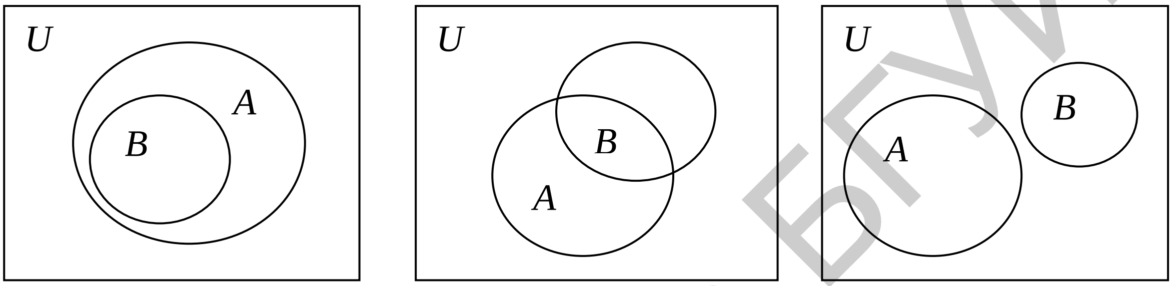
а) $P = \{x \mid x > 4$ и $x \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}\}$;

б) $P = \{x \mid x$ – натуральное и $x \leq 3\}$.

1.3 Операции над множествами

Для наглядности представления множеств и отношений между ними используют диаграммы Эйлера – Венна. На диаграммах Эйлера – Венна универсальные множества изображаются обычно в виде прямоугольников, внутри которых размещаются круги либо другие замкнутые фигуры, обозначающие подмножества соответствующих универсальных множеств.

На рисунке 1.1 изображены множества A и B, являющиеся подмножествами универсума U: *а* – $B \subset A$; *б* – A и B имеют общие элементы, т. е. пересекаются; *в* – A и B не имеют общих элементов, т. е. не пересекаются.



а *б* *в*

Рисунок 1.1 – Представление множеств

Рассмотрим операции над множествами, в результате которых получаются новые множества:

1. *Объединением* множеств A и B является множество, состоящее из элементов, входящих хотя бы в одно из этих множеств:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

2. *Пересечением* множеств A и B является множество, состоящее только из тех элементов, которые входят в оба эти множества:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Заметим, что знак пересечения в формуле (по аналогии с арифметическим умножением) можно опускать: $A \cap B = AB$.

3. *Разностью* множеств A и B является множество, состоящее из элементов множества A, которые не принадлежат множеству B:

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Разность множеств может обозначаться как $A - B$.

4. *Симметрической разностью* множеств A и B является множество, состоящее из элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, и элементов множества B, которые не принадлежат множеству A:

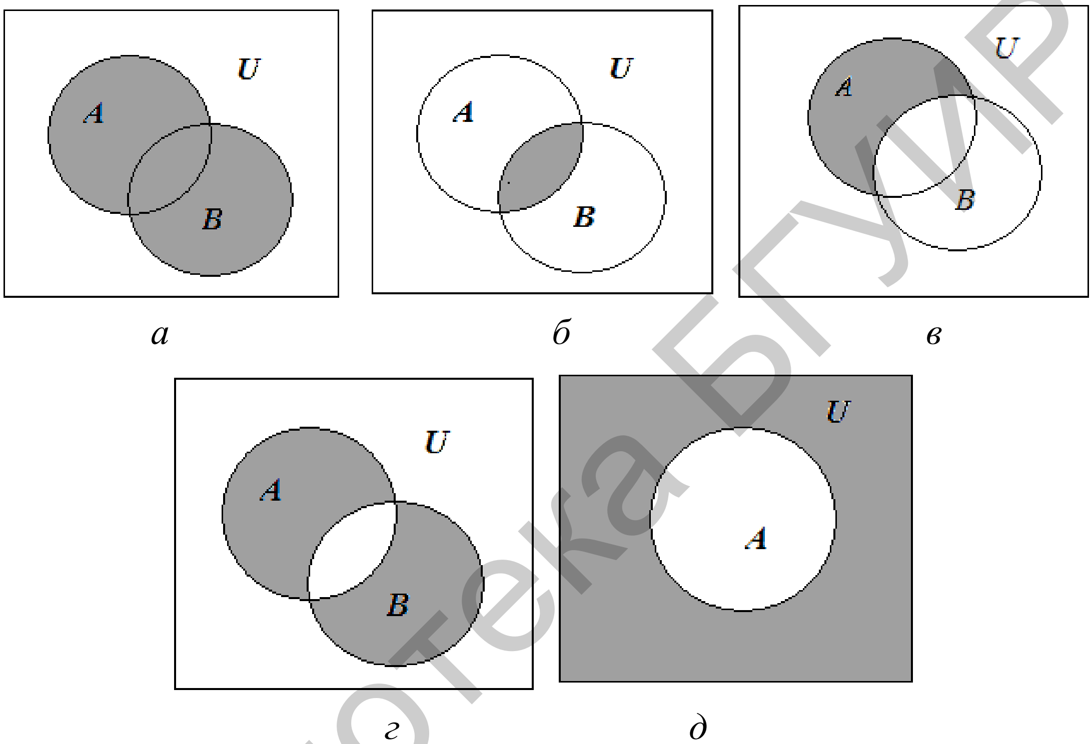
$$A \otimes B = \{x \mid (x \in A \text{ и } x \notin B) \text{ и } (x \in B \text{ и } x \notin A)\}.$$

Другой вариант обозначения симметрической разности: $A \Delta B$.

5. *Дополнением* множества A является множество, состоящее из элементов универсума U, которые не принадлежат множеству A:

$$\bar{A} = \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin A\}.$$

На рисунке 1.2 темным цветом показано множество, являющееся результатом операций над множествами.



а – $A \cup B$; *б* – $A \cap B$; *в* – $A \setminus B$; *г* – $A \otimes B$; *д* – $\bar{A}$

Рисунок 1.2 – Операции над множествами

Из определений операций и рисунка 1.2 нетрудно видеть, что

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|;$$

$$|A \otimes B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|.$$

Дополнение является одноместной (унарной) операцией; объединение, пересечение, разность и симметрическая разность являются двухместными (бинарными) операциями.

Пример. Пусть задан универсум U и его подмножества A и B: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 5, 6, 7\}$. Найти объединение, пересечение, разность, симметрическую разность множеств A и B, дополнение множества A.

Решение

$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$ – все элементы из A и B.

$A \cap B = \{2, 4, 5\}$ – элементы, общие для A и B.

$A \backslash B = \{1\}$ – элементы из A, но лишь те, которых нет в B.

$A \otimes B = \{1, 6, 7\}$ – объединение A и B без их пересечения.

$\bar{A} = \{3, 6, 7, 8, 9\}$ – все элементы универсума без A.

Операции объединения, пересечения и дополнения составляют *булеву алгебру множеств*.

Выразим некоторые операции через другие:

$$\bar{A} = U \backslash A;$$

$$A \backslash B = A \cap \bar{B};$$

$$A \otimes B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

1.4 Свойства операций над множествами

Рассмотрим свойства операций над множествами:

1. Коммутативные законы:

$A \cup B = B \cup A$; $\quad$ $A \cap B = B \cap A$.

2. Ассоциативные законы:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $\quad$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

3. Дистрибутивные законы:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $\quad$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4. Свойства констант (нуля и единицы):

$A \cup \varnothing = A$; $\quad$ $A \cap \varnothing = \varnothing$;

$A \cup U = U$; $\quad$ $A \cap U = A$;

$A \cup \bar{A} = U$; $\quad$ $A \cap \bar{A} = \varnothing$.

5. Закон идемпотентности:

$A \cup A = A$; $\quad$ $A \cap A = A$.

6. Закон двойного дополнения:

$\bar{\bar{A}} = A$.

7. Законы де Моргана:

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\quad$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

8. Законы поглощения:

$A \cup A \cap B = A$; $\quad$ $A \cap (A \cup B) = A$.

9. Законы склеивания:

$(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$; $\quad$ $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$.

$A \cup \bar{A} \cap B = A \cup B$; $\quad$ $A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$.

10. Законы обобщенного склеивания:

$A \cap B \cup A \cap C \cup B \cap \overline{C} = A \cap C \cup B \cap \overline{C}$;

$(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup \overline{C}) = (A \cup C) \cap (B \cup \overline{C})$.

Остановимся подробнее на свойстве дистрибутивности в общем случае.

Дистрибутивность – свойство согласованности двух бинарных операций, определенных на одном и том же множестве. Обозначим одну из операций знаком $\bullet$, а вторую – знаком $\circ$. Различают дистрибутивность *справа* и дистрибутивность *слева*. Операция $\bullet$ дистрибутивна справа относительно операции $\circ$, если для каждой тройки элементов x, y, z из заданного множества выполняется тождество

$$(y \circ z) \bullet x = (y \bullet x) \circ (z \bullet x).$$

Операция $\bullet$ дистрибутивна слева относительно операции $\circ$, если для каждой тройки элементов x, y, z из заданного множества выполняется тождество

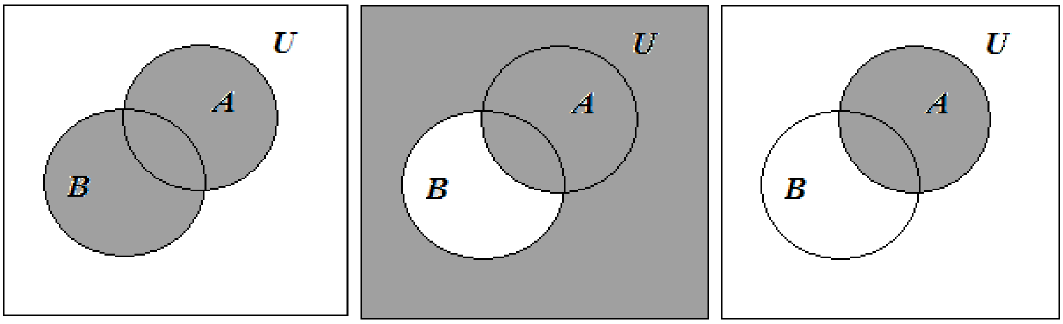
$$x \bullet (y \circ z) = (x \bullet y) \circ (x \bullet z).$$

В дистрибутивных законах, описанных выше, приводится дистрибутивность слева операции пересечения относительно операции объединения, а также дистрибутивность слева операции объединения относительно операции пересечения. Применив к обоим законам свойство коммутативности, можно показать, что в обоих случаях также справедлива соответствующая дистрибутивность справа.

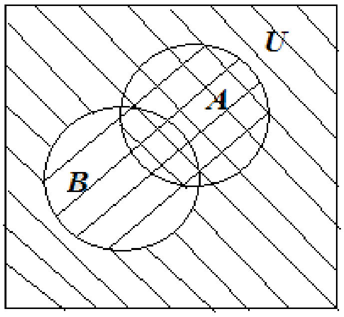
В теории множеств и ее приложениях весьма важную роль играет *принцип двойственности.* Справедливо следующее предложение: если верна теорема о подмножествах некоторого универсального множества U, которая формулируется лишь в терминах операций объединения, пересечения и дополнения, то верна также и теорема, получающаяся из данной путем замены операции объединения на операцию пересечения, операции пересечения на операцию объединения, пустого множества $\varnothing$ – множеством U, а множества U – пустым множеством $\varnothing$. При этом должен быть сохранен порядок действий.

Для доказательства равенств в теории множеств можно либо воспользоваться диаграммами Эйлера – Венна, либо провести формальное рассуждение, либо вывести формулу путем равносильных преобразований, используя другие формулы.

Пример 1. Проиллюстрируем при помощи диаграмм Эйлера – Венна доказательство закона склеивания $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$ (рисунок 1.3).



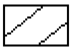
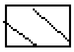
а *б* *в*



г

а – $A\cup B$; *б* – $A\cup\overline{B}$; *в* – $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})$; *г* – $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B}) = A$

Рисунок 1.3 – Доказательство закона склеивания

На рисунке 1.3, *в* закрашена область, являющаяся результатом пересечения множеств, закрашенных на рисунке 1.3, *а* и *б*. Для большей наглядности можно использовать штриховку на одном рисунке (см. рисунок 1.3, *г*), где штриховка  показывает результат выполнения операции $A\cup B$, штриховка  показывает результат выполнения операции $A\cup\overline{B}$, а двойная штриховка показывает конечный результат, совпадающий с множеством A.

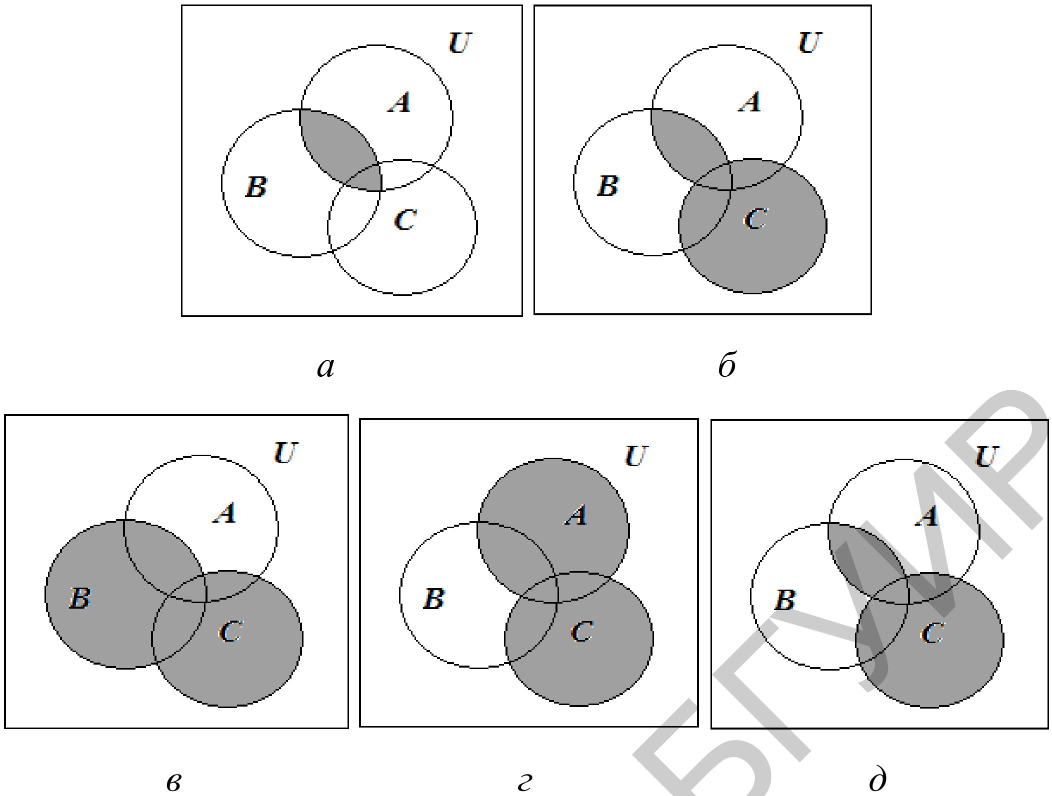
Пример 2. Воспользовавшись диаграммами Эйлера – Венна, докажем дистрибутивность справа операции объединения относительно операции пересечения.

Решение. В нашем случае дистрибутивность справа операции объединения относительно операции пересечения справедлива, если для каждой тройки множеств A, B, C из универсума U выполняется тождество

$$(B\cap A)\cup C = (B\cup C)\cap(A\cup C).$$

Построим множества общего положения A, B, C, являющиеся подмножествами универсального множества U, и последовательно закрасим области, соответствующие операциям из рассматриваемого тождества (рисунок 1.4).

Диаграммы для левой части тождества изображены на рисунке 1.4, *а* и *б*. Диаграммы для правой части тождества изображены на рисунке 1.4, *в*, *г*, *д*.



а – (*B*∩*A*); *б* – (*B*∩*A*)∪*C*; *в* – (*B*∪*C*); *г* – (*A*∪*C*); *д* – (*B*∪*C*)∩(*A*∪*C*)

Рисунок 1.4 – Доказательство тождества

Видно, что на результирующих диаграммах рисунка 1.4, *б* и *д* закрашены одинаковые области, значит, тождество выполняется, и, следовательно, операция объединения дистрибутивна справа относительно операции пересечения.

Пример 3. На рисунке 1.5 эллипсами представлены четыре множества. Требуется сформировать выражение, соответствующее закрашенной области на диаграмме.

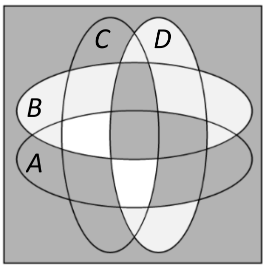


Рисунок 1.5 – Диаграмма

Решение. Сначала сформируем выражение, соответствующее закрашенной области. При этом пока не будем стремиться к тому, чтобы получить сразу максимально простое выражение, главное, чтобы оно действительно представляло только закрашенные участки области.

Разобьем закрашенную область на части (они могут пересекаться между собой) и для каждой части запишем соответствующее выражение. Затем найденные выражения объединим – это и будет искомое выражение. Сразу отметим, что искомое выражение можно получить очень многими способами. Рассмотрим один из них. Для удобства занумеруем закрашенные фрагменты, ограниченные контурами эллипсов и прямоугольника, как показано на рисунке 1.6.

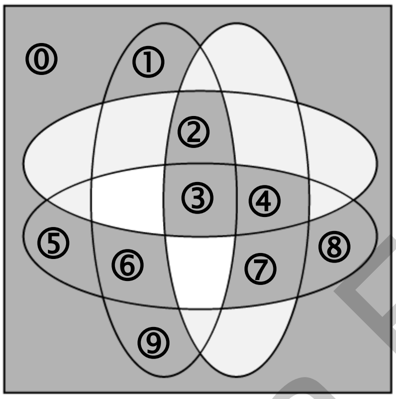
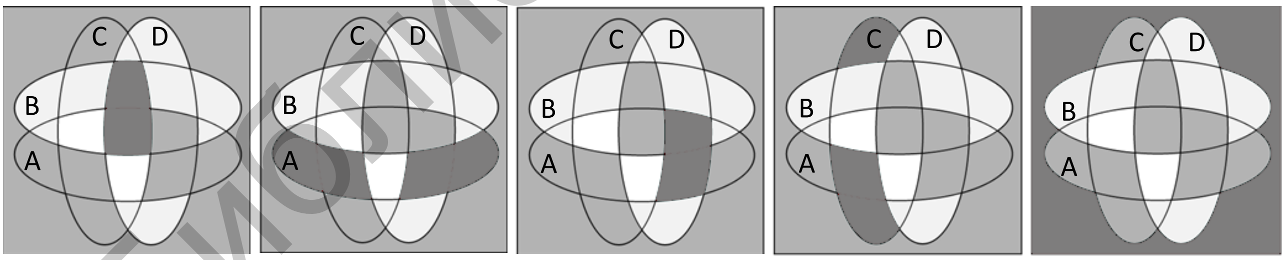


Рисунок 1.6 – Разбиение закрашенной области диаграммы на части

Начнем с одной из закрашенных частей (рисунок 1.7, *а*, фрагменты 2 и 3, выделены темно-серым цветом). Видим, что она может быть получена как $C \cap D \cap B$.



а *б* *в* *г* *д*

Рисунок 1.7 – Поэтапное формирование выражения

Выберем вторую часть (рисунок 1.7, *б*, фрагменты 5, 6, 7, 8) и найдем выражение для нее: $A \setminus B \setminus (C \cap D)$.

Третья часть (рисунок 1.7, *в*, фрагменты 4, 7) и соответствующее ей выражение: $(D \cap A) \setminus C$.

Четвертая часть (рисунок 1.7, *г*, фрагменты 1, 6, 9) и соответствующее ей выражение: $C \setminus D \setminus B$.

Последняя, пятая часть (рисунок 1.7, *д*, фрагмент 0) и соответствующее ей выражение: $\overline{A \cup B \cup C \cup D}$.

Искомое выражение, соответствующее всей закрашенной области, имеет вид

$$C \cap D \cap B \cup A \backslash B \backslash (C \cap D) \cup (D \cap A) \backslash C \cup C \backslash D \backslash B \cup \overline{A \cup B \cup C \cup D}.$$

Далее полученное выражение можно упростить с помощью операций над множествами и законов, рассмотренных выше.

Примечание – Если при формировании выражения получится разбить закрашенную область на части так, чтобы они не пересекались между собой и каждая из них была бы максимально большого размера, то в этом случае минимальное выражение может получиться сразу.

Упражнения к подразделам 1.3 и 1.4

1. Докажите, что всегда $A \cap B \subseteq A \cup B$.

2. В каком случае $A \cap B = A \cup B$? Опишите все такие случаи.

3. Докажите, что выполняется $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$.

4. Докажите, что для любых множеств A и B выполняется $B \backslash (B \backslash A) = B \cap A$.

5. Известно, что $x \in A$. Следует ли отсюда, что:

а) $x \in A \cup B$; б) $x \in A \cap B$; в) $x \in A \backslash B$?

6. Даны множества:

$A = \{2, 20, 120, 16, 52, 502\}$;
$B = \{10, 2, 5\}$;
$C = \{2,20,16\}$;
$D = \{20, 16, 52\}$;
$E = \{120, 502\}$;
$F = \{12, 16, 25\}$;
$K = \{20,120,502,52,16\}$;
$M = \{502\}$.

а) Перечислите множества, являющиеся подмножествами множества A.

б) Определите, истинно или ложно высказывание:

1) $B \subset A$; 5) $F \subset E$;
2) $C \subset A$; 6) $M \subset A$;
3) $D \subset A$; 7) $\{512\} \subset A$;
4) $E \subset M$; 8) $\{121, 502\} \subset M$.

7. Известно, что $A \subseteq B \subseteq C$, $a \in B$ и $a \notin A$. Какие из следующих утверждений верны?

а) $a \in A \otimes B$; д) $\{a\} \subseteq B \cup (C - A)$;

б) $a \in A - B$; е) $\{a\} \subseteq A \cap C$;

в) $a \in A \cup C$; ж) $\{a\} \subseteq A \cap (B \cup C)$.

г) $\{a\} \subseteq B \otimes (A - C)$;

При решении используйте диаграммы Эйлера – Венна.

8. Изобразите с помощью кругов Эйлера – Венна, в каком отношении находятся множества: U – множество всех четырехугольников плоскости, A – трапеций, B – параллелограммов, C – ромбов, D – прямоугольников, E – квадратов.

9. Дан универсум $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и его подмножества $A = \{x | x$ – четно$\}$, $B = \{x | x$ – кратно четырем$\}$, $C = \{x | x$ – простое$\}$, $D = \{1, 3, 5\}$. Найдите множества $A \cup B$, CD, $A \otimes B$, $2^A \cap 2^B$, $2^D - 2^C$.

10. Даны множества $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, 4\}$, $C = \{4, 2, c\}$, $D = \{a, b, 3\}$, $E = \{1, b\}$, причем $B \subseteq A$, $C \subseteq A$, $D \subseteq A$, $E \subseteq B$. Найдите элементы a, b, c, d.

11. Пусть множества M_2, M_3, M_5, состоящие соответственно из всех чисел, кратных 2, 3, 5, являются подмножествами универсума ℕ (где ℕ – множество натуральных чисел). С помощью данных множеств и операций над множествами запишите формулы для множеств, состоящих из чисел:

1) делящихся на 6;

2) делящихся на 30;

3) взаимно простых с 30;

4) делящихся на 10, но не делящихся на 3.

1.5 Формула включений и исключений

Для двух произвольных множеств A и B справедлива формула, называемая *формулой включений и исключений*:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Пример. Каждый из 63 студентов третьего курса, изучающих экономику в университете, может посещать и дополнительные занятия. Если 16 из них слушают курс бухгалтерии, 37 – курс коммерческой деятельности и 5 посещают оба этих курса, то сколько студентов вообще не посещают дополнительных занятий?

Решение. Введем обозначения: U – множество всех студентов, изучающих экономику, множество A включает студентов, изучающих дополнительно бухгалтерию, множество B состоит из студентов, дополнительно изучающих коммерческую деятельность. Тогда $|A| = 16$, $|B| = 37$, $|A \cap B| = 5$, $|U| = 63$.

На рисунке 1.8 заштрихована область, соответствующая множеству, мощность которого необходимо найти.

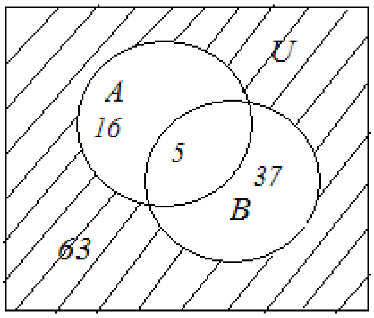


Рисунок 1.8 – Взаимное расположение множеств

По формуле включений и исключений находим количество студентов, изучающих хотя бы один дополнительный курс: $|A \cup B| = 16 + 37 - 5 = 48$. Значит, $63 - 48 = 15$ студентов не посещают дополнительные занятия.

Формула включений и исключений справедлива и для большего числа множеств. Запишем вывод формулы для трех множеств A, B и C, используя формулу для двух множеств:

$$|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| = |(A \cup B)| + |C| - |(A \cup B) \cap C| =$$
$$= [\text{применим формулу для } |(A \cup B)|] =$$
$$= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| =$$
$$= [\text{применим закон дистрибутивности для } (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$\text{и формулу для двух множеств}] =$$
$$= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| - |(A \cap C)| - |(B \cap C)| +$$
$$+ |(A \cap C) \cap (B \cap C)|.$$

В итоге получаем формулу включений и исключений для трех множеств:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Упражнения к подразделу 1.5

1. Из 100 студентов факультета 42 посещают спортивные секции, 30 – занятия научного студенческого общества (НСО), 28 – кружки художественной самодеятельности. На занятия НСО и спортом успевают ходить 5 студентов, спортом и художественной самодеятельностью занимаются 10, посещают НСО и занимаются художественной самодеятельностью – 8, а сразу все 3 увлечения имеют 3 студента. Сколько студентов:

1) не посещают ни одно из этих объединений по интересам;

2) занимаются только спортом;

3) занимаются либо в НСО, либо художественной самодеятельностью;

4) занимаются либо спортом, либо художественной самодеятельностью, но не в НСО;

5) занимаются или в НСО, или художественной самодеятельностью, но не спортом?

2. На одной из кафедр университета работают S человек, среди которых T человек не знают ни одного иностранного языка. A человек знают английский, N – немецкий, F – французский. AN знают английский и немецкий, AF – английский и французский, NF – немецкий и французский, ANF знают все три языка. По заданным в таблице условиям восстановите недостающую информацию.

Номер варианта	**Условия задачи**								
	S	***A***	***N***	***F***	***AN***	***AF***	***NF***	***ANF***	***T***
1	17	11	6	5	4	3	2	1	
2	16		9	7	4	4	5	2	3
3	17	8	10		6	4	4	3	5
4	20	11	8	5	7	3	4		7
5		10	7	4	5	4	3	3	5

Найти:

а) сколько человек знают все три языка;

б) сколько человек знают ровно два языка;

в) сколько человек знают только английский язык.

1.6 Теоретико-множественные преобразования

Обычно под теоретико-множественными преобразованиями понимают выполнение таких операций над множествами, в результате которых получается новое выражение, тождественно равное исходному, но внешне отличающееся от него набором символов, их числом, порядком записи и др. Часто целью преобразований является упрощение формул, сводящееся к уменьшению числа входящих в них знаков. Все подобные преобразования осуществляются на основе свойств операций объединения, пересечения и дополнения с применением формул поглощения и склеивания, а также законов де Моргана. При этом сначала выполняется операция дополнения, затем пересечения, разности, симметрической разности, и последней – объединения; операции с одинаковым приоритетом выполняются слева направо. Для изменения этого порядка используют скобки.

Упрощенные выражения могут подвергаться дальнейшим преобразованиям с учетом каких-либо дополнительных условий. Такими условиями могут быть: учет отношений между множествами, замена одного множества другим, удаление того или иного множества и др.

Пример 1. Упростить формулу для множества P, выраженного через множества A, B, C, D, с учетом дополнительных условий: $C \subset D, B = \varnothing$:

$$P = A \cap B \cup A \cap \bar{B} \cap B \cap D \cup C \cap D.$$

Решение. Расставим для наглядности скобки согласно приоритету выполнения операций и для первых двух скобок применим закон склеивания:

$$P = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D) = A \cup (B \cap D) \cup (C \cap D).$$

С учетом дополнительных условий $B \cap D = \varnothing \cap D = \varnothing, C \cap D = C,$ получим $P = A \cup \varnothing \cup C = A \cup C.$

Пример 2. Даны множества $U = \{0, 1, 4, 5, 6\}$, $A = \{0, 1, 6\}$, $B = \{5, 6\}$, $C = \{1\}$. Найти элементы множества P:

$$P = A \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cup \bar{B} \cap C.$$

Решение. Применим закон дистрибутивности для $A \cup \bar{A} \cap \bar{B}$:

$$P = (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup \bar{B}) \cup \bar{B} \cap C = U \cap (A \cup \bar{B}) \cup \bar{B} \cap C = A \cup \bar{B} \cup \bar{B} \cap C.$$

Далее, применив закон поглощения для $\bar{B} \cup \bar{B} \cap C,$ получим

$$P = A \cup \bar{B}.$$

С учетом того, что $\bar{B} = \{0, 1, 4\}$, множество $P = \{0, 1, 4, 6\}$.

Упражнения к подразделу 1.6

1. Упростите выражения, используя закон склеивания:

а) $A \cap B \cap C \cup A \cap B \cap \bar{C}$;

б) $\bar{A} \cap B \cup \bar{A} \cap B \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap \bar{B}$;

в) $A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cup A \cap \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B}$.

2. Расставьте вместо точек знаки «=» или «≠»:

а) $A \cup B \cap C \cup \bar{B} \cap C \ \dots \ A \cup C$;

б) $A \cap B \cup A \cap \bar{B} \ \dots \ A \cap \bar{B} \cup A \cap B$;

в) $\bar{B} \cap \bar{C} \cup \bar{B} \cap C \cup B \ \dots \ B$;

г) $A \cap B \cup B \cap C \cup \bar{A} \cap B \ \dots \ B \cap C$;

д) $(A \cap B \cup C) \cap (\overline{A \cap B} \cup C) \ \dots \ C$;

е) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C \cup A \cap \bar{B} \cap C \ \dots \ B \cup C$;

ж) $(\bar{A} \cap B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) \ \dots \ \varnothing$;

з) $A \cap B \cup A \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap B \cup \bar{A} \cap \bar{B}\ \ldots\ \varnothing$.

3. Упростите путем тождественных преобразований:

а) $\overline{(A \otimes B) \setminus (A \cap B)}$; в) $\overline{A \cap B} \otimes \overline{A \setminus B}$;

б) $\overline{A \otimes B} \cup (A \cap B\ )$; г) $A \setminus \overline{A \cap B}$.

1.7 Покрытия и разбиения

Пусть E есть некоторое семейство подмножеств множества A мощностью n, т. е. $E = \{A_1, A_2\ , \ldots, A_n\}$, $|E| = n$, $A_i \subseteq A$, $\forall i = \overline{1, n}$.

Семейство E называется *покрытием* множества A, если каждый элемент множества A принадлежит хотя бы одному множеству семейства E:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A.$$

Покрытие множества A называется его *разбиением*, если каждый элемент множества A принадлежит в точности одному множеству семейства E, т. е. $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$, где $i, j = \overline{1, n}$.

Пример. $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\ ,k\}$. Выяснить, какие из следующих семейств являются покрытиями множества A, а какие из покрытий являются разбиениями:

а) $E_1 = \{\{a\}, \{c, d\}, \{f, g, h\}, \{i, j, k\}\}$;

б) $E_2 = \{\{i, j, k\}, \{e, f, g, h\}, \{a, b, c, d\}\}$;

в) $E_3 = \{\{a, f, i, k, d\}, \{b, c, g, h\}, \{d\}, \{e, j\}\}$;

г) $E_4 = \{\{c, d, e, f\}, \{a, b, c\}, \{i, j, k\}, \{g, k\}\}$.

Решение

а) При объединении семейств множества E_1 получаем множество $\{a, c, d, f, g, h, i, j, k\} \neq A$, E_1 не является покрытием A.

б) При объединении семейств множества E_2 получаем множество $\{i, j, k, e, f, g, h, a, b, c, d\} = A$, E_2 является покрытием A. Семейство E_2 также является разбиением A, т. к. все подмножества семейства E_2 попарно не пересекаются.

в) При объединении семейств множества E_3 получаем множество $\{a, f, i, k, d, b, c, g, h, e, j\} = A$, E_3 является покрытием A. Семейство E_2 не является разбиением A, т. к. в первом и третьем подмножествах есть элемент d.

г) При объединении семейств множества E_4 получаем множество $\{c, d, e, f, a, b, i, j, k, g\} \neq A$, E_4 не является покрытием A.

1.8 Принцип Дирихле

Принцип Дирихле – одна из форм логического метода рассуждения «от противного», который используется при решении многих задач. Этот принцип утверждает, что если множество из N элементов разбито на n ($n < N$) непересекающихся подмножеств, то по крайней мере в одном подмножестве будет более одного элемента.

Чаще всего на практике применяют формулировку этого принципа в терминах «зайцев» и «клеток»: «*если в n клетках сидят не менее n + 1 зайцев, то в какой-то из клеток сидят не менее двух зайцев*». При решении конкретной задачи самым трудным оказывается определить, что в ней – «клетки», а что – «зайцы».

Пример 1. Доказать, что если в n клетках сидят не более $n - 1$ зайцев, то есть пустая клетка.

Решение. Проведем доказательство от противного. Если пустой клетки нет, то в каждой клетке сидит хотя бы один заяц. Тогда зайцев не меньше, чем клеток, что противоречит условию. Значит, пустая клетка есть.

Пример 2. Доказать, что если прямая l расположена в плоскости треугольника ABC и не проходит ни через одну из его вершин, то она не может пересечь все три стороны треугольника (рисунок 1.9).

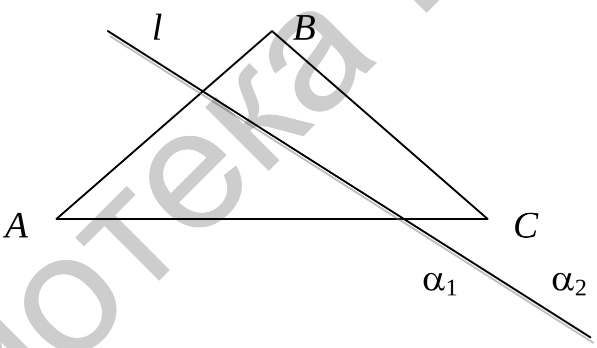


Рисунок 1.9 – Расположение прямой в плоскости треугольника

Решение

Обозначим α_1 и α_2 как полуплоскости, на которые прямая l разбивает плоскость треугольника ABC. Вершины рассматриваемого треугольника A, B, C будут «зайцами», а полуплоскости α_1 и α_2 – «клетками». Каждый «заяц» попадает в какую-нибудь «клетку», т. к. прямая l не проходит ни через одну из точек A, B, C. По принципу Дирихле найдутся два «зайца», которые попадут в одну «клетку» (т. к. «зайцев» больше, чем «клеток») . Применительно к нашей задаче: найдутся две точки (вершины треугольника), которые окажутся в одной полуплоскости . На рисунке 1.9 точки B и C лежат в полуплоскости α_2 и отрезок BC не пересекается с l, т. е. прямая l не пересекает все три стороны треугольника.

Существуют различные усиления и обобщения принципа Дирихле. Сформулируем одно из обобщений: «*если в n клетках размещены nk + 1 зай-*

цев, то найдутся k + 1 зайцев, которые посажены в одну клетку (*n*, *k – натуральные числа*)».

Пример 3. В группе 25 студентов. Известно, что среди любых трех из них есть двое друзей. Доказать, что найдется студент, у которого не менее 12 друзей.

Решение. Выберем двух студентов, которые не дружат между собой (если таких не найдется, тогда все дружат между собой и каждый имеет 24 друга, задача решена). Из оставшихся 23 человек каждый дружит с одним из выбранных студентов (согласно условию). По второй формулировке принципа Дирихле 23 «зайца» (студенты) будут рассажены в две «клетки» (дружат с одним из двух студентов). Тогда у одного из студентов будет более 12 друзей.

1.9* Нечеткие множества

Теория нечетких множеств была предложена в 1965 г. американским ученым, профессором Калифорнийского университета Лотфи А. Заде. Необходимость на практике постоянно принимать решения в условиях неопределенности и нечеткой информации показывает, что теория нечетких множеств является стратегическим инструментом управления сложными системами. Основная идея данной теории состоит в расширении классического понятия множества.

Традиционно под множеством понимается совокупность объектов, обладающая некоторым общим свойством и мыслимая как единое целое. Содержательным обоснованием теории нечетких множеств является обстоятельство, учитывающее, в какой степени объект обладает этим общим свойством, т. е. в какой степени объект принадлежит множеству.

Например, пусть A – множество высотных домов. Принадлежит ли 10-этажный дом множеству A? Согласно теории нечетких множеств можно сказать, что 10-этажный дом является элементом множества высотных домов со степенью принадлежности к высотным домам, равной 0,1, если в городе много домов, насчитывающих 50 и более этажей. Но если, например, 11-этажные дома в городе являются самыми высокими, то степень принадлежности к высотным домам 10-этажного дома может быть равной и 0,9.

Нечеткое множество определяется в виде совокупности упорядоченных пар, составленных из элементов x универсума (или базового множества) X ($x \in X$), и соответствующих значений $\mu_A(x)$ так называемой *функции принадлежности* нечеткого множества A, областью значений которой является интервал [0, 1]:

$$A = \{(x/\mu_A(x)) \mid x \in X\}.$$

Значение функции принадлежности выбирается либо на основе статистических сведений, либо интуитивно в зависимости от обстоятельств. На практике удобно использовать функции принадлежности, которые допускают аналитическое представление в виде некоторой простой математической функции. Треугольные функции принадлежности (рисунок 1.10) используются для задания неопределенностей типа «приблизительно равно», «среднее значение», «расположен в интервале», «подобен объекту», «похож на предмет». *Z*-образные функции принадлежности используются для задания неопределенностей типа «малое количество», «небольшое значение», «незначительная величина», «низкий уровень». *S*-образные функции принадлежности используются для задания неопределенностей типа «большое количество», «большое значение», «значительная величина», «высокий уровень». Наряду с вышеперечисленными используются и другие функции.

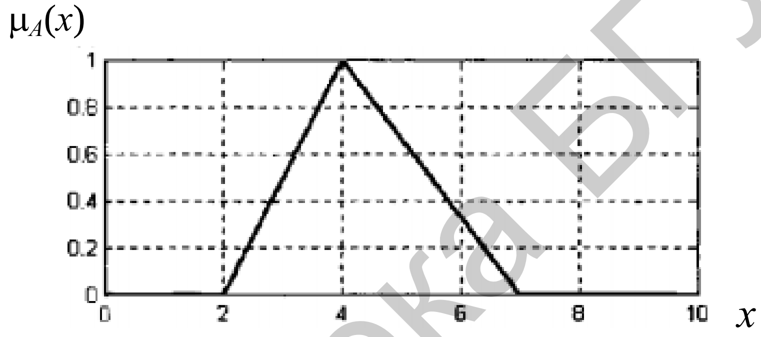


Рисунок 1.10 – Треугольная функция принадлежности

Если значения функции принадлежности выбираются из множества {0, 1}, то получаем обычное четкое множество.

Нечеткое множество может обозначаться как обычное множество либо с использованием «тильды»: $\tilde{A}$.

Носителем *Supp*(*A*) нечеткого множества *A* называется множество элементов универсума, для которых функция принадлежности является положительной, т. е.

$$Supp(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}.$$

Ядром *Core*(*A*) нечеткого множества *A* называется множество таких элементов универсума *X*, для которых имеет место

$$Core(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}.$$

Пример 1. Пусть дано множество $X = \{x \mid x$ – число выловленных рыб$\}$, $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 25\}$. *X* – это обычное четкое множество. Построим на его основе нечеткое множество «очень маленький улов», обозначив его буквой *K*:

K = {(1/1), (2/0,95), (3/0,9), (4/0,8), (5/0,7), (0,6/6), (12/0,1), (25/0)}.

Для нечеткого множества K найдем носитель и ядро:

$$Supp(K) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12\},$$

$$Core(K) = \{1\}.$$

Множеством *уровня* α , именуемым также α-*уровнем*, или α-*срезом*, нечеткого множества A, называется обычное подмножество универсума X, определяемое выражением

$$A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\},$$

где $\alpha \in [0,\ 1]$, а множество *строгого уровня* α, или *строгий* α-*срез*, нечеткого множества A, в свою очередь, определяется выражением

$$A_\alpha^s = \{x \in X | \mu_A(x) > \alpha\}.$$

Пусть заданы два нечетких множества A, B и универсум X, что

$$A = \{(x/\mu_A(x)) | x \in X\},\ B = \{(x/\mu_B(x)) | x \in X\}.$$

Рассмотрим операции над нечеткими множествами:

1. Объединение нечетких множеств. В объединение множеств $A \cup B$ входят элементы множества A и элементы множества B, при этом элемент, входящий в оба множества, в объединение множеств включается только один раз с наибольшей степенью принадлежности.

2. Пересечение нечетких множеств. В пересечение множеств $A \cap B$ входят общие элементы множества A и B с наименьшей степенью принадлежности.

3. Дополнение нечеткого множества. Чтобы найти дополнение $\bar{A}$ нечеткого множества A, предварительно в множество A включаем с нулевой степенью принадлежности те элементы из X, которые не вошли в A. Далее заменяем в каждом элементе множества A функцию принадлежности $\mu_A(x)$ на $1 - \mu_A(x)$ и получаем $\bar{A}$.

4. Разность нечетких множеств находится по формуле

$$A \backslash B = A \cap \bar{B}.$$

5. Симметрическая разность нечетких множеств находится по формуле

$$A \otimes B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

Пример 2. Даны универсум X и нечеткие множества A и B: X = {1, 2, 3, 4, 5}, A = {(1/0,1), (3/0,5), (4/0,7)}, B = {(2/0,1), (3/0,8), (5/0,3)}. Найти $A \cup B$, $A \cap B$ и $\bar{A}$.

Решение

Согласно определению операций над нечеткими множествами получим:

1) $A \cup B$ = {(1/0,1), (2/0,1), (3/0,8), (4/0,7) (5/0,3)}, для общего элемента 3 выбираем степень принадлежности max(0,5; 0,8) = 0,8;

2) $A \cap B$ = {(3/0,5)}, множества имеют один общий элемент 3, для которого выбираем степень принадлежности min(0,5; 0,8) = 0,5;

3) для нахождения $\bar{A}$ перепишем нечеткое множество A, дополнив его отсутствующими элементами из универсума X с нулевыми степенями принадлежности:

$$A = \{(1/0{,}1), (2/0), (3/0{,}5), (4/0{,}7), (5/0)\}.$$

Далее заменим для каждого элемента $\mu_A(x)$ на $1 - \mu_A(x)$ и получим

$$\bar{A} = \{(1/0{,}9), (2/1), (3/0{,}5), (4/0{,}3), (5/1)\}.$$

2 Отношения

2.1 Декартово произведение множеств

Пусть заданы два множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Множество всех *упорядоченных* пар (a_i, b_j), таких, что $a_i \in A$, $b_j \in B$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, называется *декартовым*, или *прямым*, произведением двух множеств A и B (обозначается $A \times B$). То есть декартово произведение множеств A на B можно определить следующим образом:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ и } b \in B\}.$$

Декартово произведение множеств $B \times A$ определяется аналогично:

$$B \times A = \{(b, a) \mid b \in B \text{ и } a \in A\}.$$

Заметим, что операция декартова произведения не обладает свойством коммутативности: $A \times B \neq B \times A$.

Мощность декартова произведения будет равна

$$|A \times B| = |B \times A| = |A| \cdot |B|.$$

Пример 1. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$. Найти $A \times B$ и $B \times A$.

Решение. $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\}$.

$B \times A = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2), (a, 3), (b, 3), (c, 3), (a, 4), (b, 4), (c, 4)\}$.

Операция декартова произведения применима не только к двум, но и к большему числу множеств:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Элементы декартова произведения n множеств, представляющих собой упорядоченный набор длиной n, называют *кортежами*, или *векторами*, длиной n.

Декартово произведение n одинаковых множеств $A \times A \times \ldots \times A = A^n$ называется n-й степенью множества A.

Пример 2. Дано множество $A = \{a, b, c\}$. Найти его 1, 2, 3 и 4 степени.

Решение

$A^1 = \{(a), (b), (c)\}$.

$A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$.

$A^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, a, c), (a, b, a), \ldots, (c, c, c)\}$.

$A^4 = \{(a, a, a, a), (a, a, a, b), (a, a, a, c), \ldots, (c, c, c, c)\}$.

Упражнения к подразделу 2.1

1. Найдите элементы множества $(A \times B) \cap (B \times A)$, если $A = \{a, b\}$; $B = \{b, c\}$.
2. Найдите $|A \times B|$ и $|(A \times B) \cap (B \times A)|$, если $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c\}$.

3. Найдите элементы множества A и множества B, если $A \times B = \{(b, m), (c, m), (e, m), (b, n), (c, n), (e, n)\}$.

4. Известно, что $|A \times B| = 49$. Множество B увеличили на три элемента. Получили множество B'. Найдите $|A \times B'|$, если A и B содержат более одного элемента.

5. Найдите $|(A \times B) \cup (B \times C)|$, если $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$; $C = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

6. Даны множества $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Укажите номера упорядоченных пар, являющихся элементами множества $A \times B$:

1) $(a, 1)$;
2) $(3, c)$;
3) (b, c);
4) $(c, 5)$;
5) $(2, 3)$;
6) $(4, a)$;
7) $(b, 4)$.

7. Декартово произведение множеств A и B содержит 12 элементов. Известно, что $A = \{a, b, c\}$, $A \cap B = \varnothing$. Найдите число собственных подмножеств множества B.

2.2 Соответствия

Рассмотрим два множества X и Y. Элементы этих двух множеств могут каким-либо образом сопоставляться друг с другом, образуя пары (x, y).

Если способ такого сопоставления определен, т. е. для элемента $x \in X$ указан элемент $y \in Y$, с которым сопоставляется элемент x, то говорят, что между множествами X и Y установлено *соответствие*.

Чтобы задать соответствие, необходимо указать:

– множество X, чьи элементы сопоставляются с элементами другого множества;

– множество Y, с чьими элементами сопоставляются элементы первого множества;

– множество $Q \subseteq X \times Y$, определяющее закон, по которому осуществляется сопоставление, т. е. перечисляющее все пары (x, y), участвующие в соответствии.

Итак, *соответствием* между множествами X и Y называется подмножество $Q \subseteq X \times Y$. Если $(x, y) \in Q$, это означает, что элемент y соответствует элементу x при соответствии Q.

Кроме трех рассмотренных множеств X, Y и Q, с каждым соответствием неразрывно связаны еще два множества:

– множество $DomQ$, называемое *областью определения* соответствия, в которое входят элементы множества X, участвующие в сопоставлении;

– множество $RanQ$, называемое *областью значений* соответствия, в которое входят элементы множества Y, участвующие в сопоставлении.

Пример 1. Заданы множества $X = \{1, 2\}$ и $Y = \{3, 5\}$.

Запишем декартово произведение $X\times Y = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$.Это множество дает возможность получить 16 различных соответствий (по количеству подмножеств декартова произведения). Вот некоторые из них: $Q_1 = \{(1, 3)\}$, здесь $DomQ_1 = \{1\}$, $RanQ_1 = \{3\}$; $Q_2 = \{(1, 3), (1, 5)\}$, здесь $DomQ_1 = \{1\}$, $RanQ_2 =$ $= \{3, 5\} = Y$.

Проекция элемента (x, y) множества $X\times Y$ на множество X есть элемент x. Аналогично элемент y является проекцией элемента (x, y) множества $X\times Y$ на множество Y. Проекцией множества $M \subset X\times Y$ на X называется множество всех тех элементов из X, которые являются проекциями элементов из M на множество X. Для множеств X и Y, рассмотренных в примере 1, и $M = Q_2$ проекцией элемента (1, 3) на множество X является элемент 1, а проекцией множества $\{(1, 3),$ $(1, 5)\}$, – множество $\{1\}$.

Множество всех $y\in Y$, соответствующих элементу $x\in X$, называется *образом* x в Y при соответствии Q; множество всех $x\in X$, соответствующих элементу $y\in Y$, называется *прообразом* y в X при соответствии Q.

Для изображения соответствия между двумя различными множествами можно использовать диаграммы (*графы соответствий*). На них множества изображают с помощью кругов (овалов), внутри которых располагают точки, являющиеся элементами множеств. Элементы упорядоченной пары (x, y) из соответствия Q соединены линией, имеющей направление от точки x к точке y.

На рисунке 2.1 приведены соответствия Q_1 и Q_2. Прообраз y_2 при соответствии Q_1 – это множество $\{x_1, x_3\}$, образ x_1 при соответствии Q_2 – множество $\{y_1, y_2\}$.

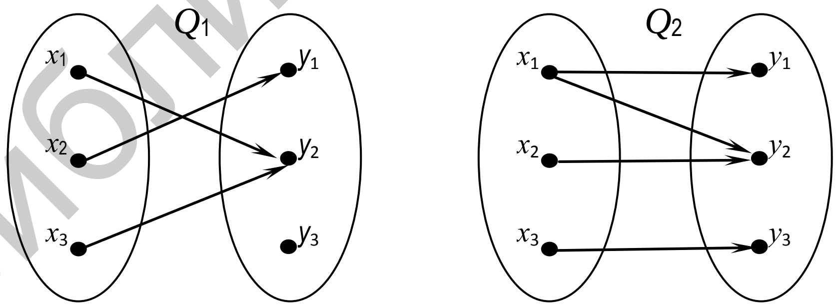


Рисунок 2.1 – Примеры соответствий

Свойства, которыми может обладать соответствие:

1) всюду определенность;

2) сюръективность;

3) инъективность;

4) функциональность;

5) взаимная однозначность.

Пусть $Q \subseteq X \times Y$ – некоторое соответствие. Определим указанные свойства:

1. Если $DomQ = X$, то соответствие называется *всюду определенным*, или полностью определенным (иначе соответствие называется *частичным*).

2. Если $RanQ = Y$, то соответствие называется *сюръективным*. Другими словами, если соответствие $Q \subseteq X \times Y$ всюду определено, то это значит, что при соответствии задействованы все элементы из X, если соответствие сюръективно, то это значит, что при сопоставлении задействованы все элементы из Y.

3. Соответствие Q называется *инъективным*, если прообразом любого элемента из $RanQ$ является единственный элемент из $DomQ$ (каждому элементу из $RanQ$ соответствует только один элемент из $DomQ$).

4. Соответствие Q называется *функциональным* (или однозначным), если образом любого элемента из $DomQ$ является единственный элемент из $RanQ$ (каждому элементу из $DomQ$ соответствует только один элемент из $RanQ$).

5. Соответствие Q между X и Y называется *взаимно однозначным* (*биективным*), если оно всюду определено, сюръективно, функционально и инъективно.

Пример 2. На рисунке 2.2 изображены графы соответствий S_1, S_2, S_3, S_4.

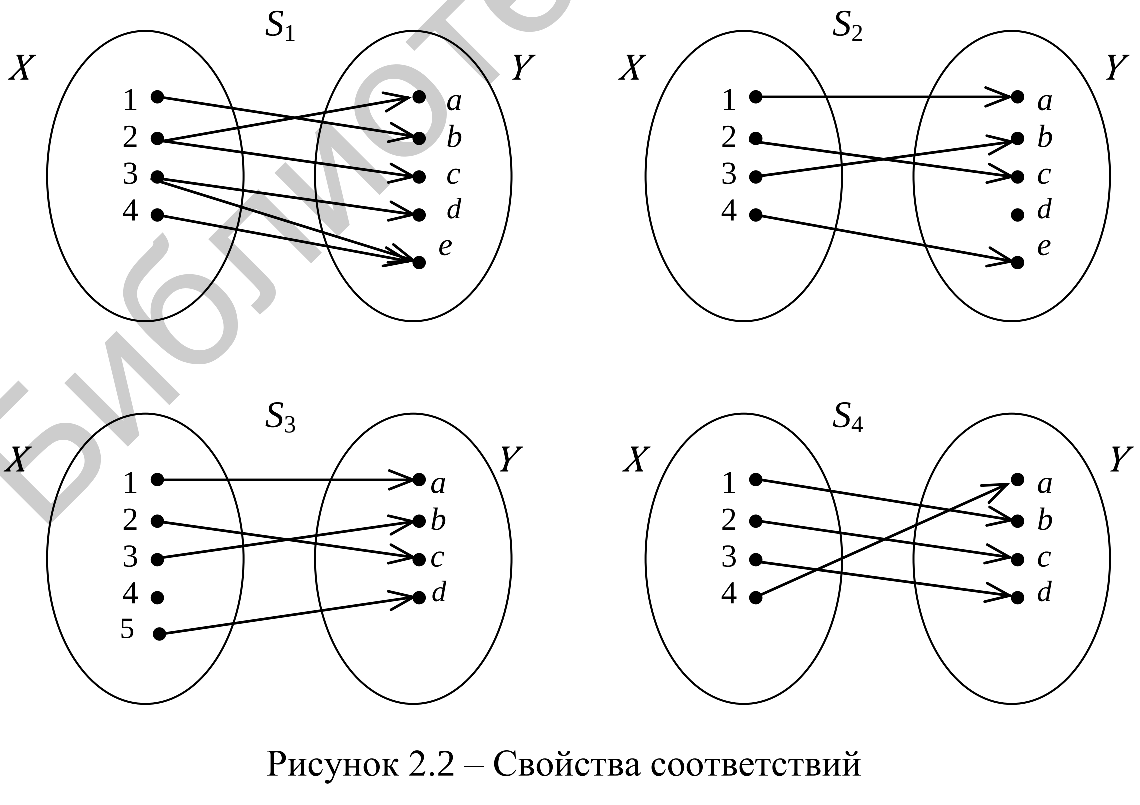


Рисунок 2.2 – Свойства соответствий

Среди данных соответствий:

1) всюду определены соответствия S_1, S_2, S_4;

2) сюръективны – S_1, S_3, S_4;

3) инъективны – S_2, S_3, S_4;

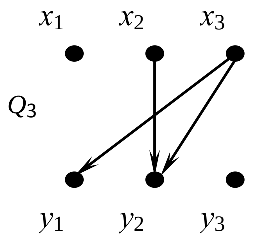
4) функциональны – S_2, S_3, S_4;

5) только S_4 является взаимно однозначным, т. е. биективным.

Пример 3. Между множествами $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ установлено соответствие $Q_3 \subseteq X \times Y$, $Q_3 = \{(x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2)\}$. Является ли оно всюду определенным и сюръективным?

Решение

Изобразим соответствие графически:



$DomQ_3 = \{x_2, x_3\} \neq X \Rightarrow Q_3$ – не всюду определено.

$RanQ_3 = \{y_2, y_1\} \neq Y \Rightarrow Q_3$ – не сюръективно.

Пример 4. Заданы соответствия Q_4, $Q_5 \subseteq X \times Y$, где $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$: $Q_4 = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_2)\}$, $Q_5 = \{(x_1, y_2), (x_2, y_3), (x_3, y_1)\}$. Определить свойства этих соответствий.

Решение

Рассмотрим соответствие Q_4: $DomQ_4 = \{x_1, x_2, x_3\} = X \Rightarrow Q_4$ – всюду определено; каждому элементу из $DomQ_4$ соответствует только один элемент из $RanQ_4 \Rightarrow Q_4$ – функционально; не является инъективным, т. к. элемент y_2 соответствует двум элементам x_2, x_3; $RanQ_4 = \{ y_1, y_2\} \neq Y \Rightarrow Q_4$ – не сюръективно, значит, не биективно.

Рассмотрим соответствие Q_5: $DomQ_5 = \{x_1, x_2, x_3\} = X \Rightarrow Q_5$ – всюду определено; каждому элементу из $DomQ_5$ соответствует только один элемент из $RanQ_5 \Rightarrow Q_5$ – функционально; каждый элемент из $RanQ_5$ соответствует только одному элементу из $DomQ_5 \Rightarrow Q_5$ – инъективно; $RanQ_5 = \{ y_2 , y_3, y_1 \} = Y \Rightarrow Q_5$ – сюръективно, значит, биективно.

Функцией называется функциональное соответствие. Запись f: $X \rightarrow Y$ означает, что функция f устанавливает соответствие между множествами X и Y.

Каждому элементу x из своей области определения функция f ставит в соответствие единственный элемент y из области значений. Это обозначается так: $f(x) = y$.

Пример 5. Рассмотрим соответствие f_1: $X \to Y$, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $f_1 = \{(x_1, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_2)\}$.

f_1 – функциональное соответствие (каждому элементу из области определения f_1 соответствует только один элемент из области значений f_1), следовательно, это функция.

Пусть f: $X \to Y$. Всюду определенная функция называется *отображением X в Y*.

Если отображение сюръективно, т. е. каждый элемент из Y имеет прообраз в X, то имеет место *отображение X на Y*.

Отображение f: $A \to A$ называется *преобразованием* множества A.

Пусть A – конечное множество. Преобразования этого множества, являющиеся биективными, называются *перестановками* (иногда – подстановками).

Пример 6. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$. Перестановку обычно записывают в виде матрицы, 1-я строка которой содержит все элементы множества A, а под каждым элементом 1-й строки (во 2-й строке) записываются значения перестановки, которые тоже являются элементами множества A.

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ означает, что $\alpha(1) = 3$, $\alpha(2) = 1$, $\alpha(3) = 2$.

2.3 Бинарные отношения

Подмножество $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ декартова произведения n множеств называется *n-арным отношением*. При $n = 1$ отношение называется *унарным*, при $n = 2$ – *бинарным*, при $n = 3$ – *тернарным*.

Бинарным отношением, или *соответствием* между элементами множеств A и B, называется любое подмножество $R \subseteq A \times B$ декартова произведения этих множеств. Если же требуется указать, что $(a, b) \in R$, т. е. между элементами $a \in A$ и $b \in B$ существует отношение R, то пишут $a\ R\ b$.

Пример. Бинарное отношение $R \subseteq A \times B$ определено следующим образом: «$a > b$, $a \in A$, $b \in B$». Записать элементы R, если $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, и найти его мощность.

Решение. Нам необходимо выделить упорядоченные пары (a, b), находящиеся в отношении R. Отношению $a > b$ соответствуют три пары: $2 > 1$; $3 > 1$; $3 > 2$. Тогда $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$, $|R| = 3$.

Заметим, что в рассмотренном примере $R \subset A \times B$. Если в примере отношение R задать как «a и b – натуральные однозначные числа, $a \in A$, $b \in B$», то получим, что $R = A \times B$.

Бинарное отношение может быть задано перечислением его элементов, в виде правила или свойства, в виде двоичной матрицы.

Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, $R \subseteq A \times B$. *Матрицей* бинарного отношения R называется матрица размером $n \times m$, элементы которой r_{ij} определяются следующим образом:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } (a_i, b_j) \in R, \\ 0, \text{если } (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

В бинарной матрице строки нумеруются элементами множества A, а столбцы – элементами множества B. Построим матрицу для бинарного отношения R, заданного в примере:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Упражения к подразделу 2.3

1. Найдите $|R|$, если R определено следующим образом:

а) «x делит y (без остатка), $x \in A$, $y \in B$»;

б) «a – нечетное число, $a \in A$, $b \in B$»;

в) «a – простое число; b – четное или простое число, $a \in A$, $b \in A \cup B$».

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

2.4 Операции над бинарными отношениями

Всякое бинарное отношение $R \subseteq A \times B$ есть множество пар (a, b), поэтому к бинарным отношениям применимы операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение, разность, симметрическая разность. Для нахождения дополнения бинарного отношения универсумом будет являться декартово произведение $A \times B$.

Пример 1. Заданы бинарные отношения $R, Q \subseteq A \times B$. Найти $R \cup Q$, $R \cap Q$, $\bar{R}$, $R \setminus Q$, $R \otimes Q$, если $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3\}$, $R = \{(2, 1), (4, 1), (6, 3)\}$, $Q = \{(2, 1), (2, 3), (6, 3)\}$.

Решение. Найдем $A \times B = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3)\}$.

$R \cup Q = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (6, 3)\}$.

$R \cap Q = \{(2, 1), (6, 3)\}$.

$\bar{R} = \{(2, 3), (4, 3), (6, 1)\}$.

$R \setminus Q = \{(4, 1)\}$.

$R \otimes Q = \{(4, 1), (2, 3)\}$.

Пусть заданы множества A, B, C и отношения R, Q такие, что $R \subseteq A \times B$, $Q \subseteq B \times C$. *Композицией* отношений R и Q называется отношение

$$R \circ Q = \{(a, c) \mid \exists b \in B: (a, b) \in R, (b, c) \in Q\}.$$

Если отношения R и Q заданы бинарными матрицами, то матрицу композиции отношений R и Q получаем путем перемножения матриц для R и Q (умножение элементов осуществляется обычным способом, а сложение – по правилам: $1 + 1 = 0 + 1 = 1 + 0 = 1$, $0 + 0 = 0$).

Пример 2. Заданы бинарные отношения $R \subseteq A \times B$, $Q \subseteq B \times C$. Найти композицию отношений R и Q, если $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{1, 6\}$, $R = \{(1, 2), (3, 2), (5, 4)\}$, $Q = \{(2, 1), (2, 6), (4, 1)\}$.

Решение

Зададим отношения R и Q матрицами и перемножим их:

$$R = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{5} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad Q = \begin{array}{c} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{6} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad R \circ Q = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{5} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{6} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Решение также можно изобразить графически (рисунок 2.3).

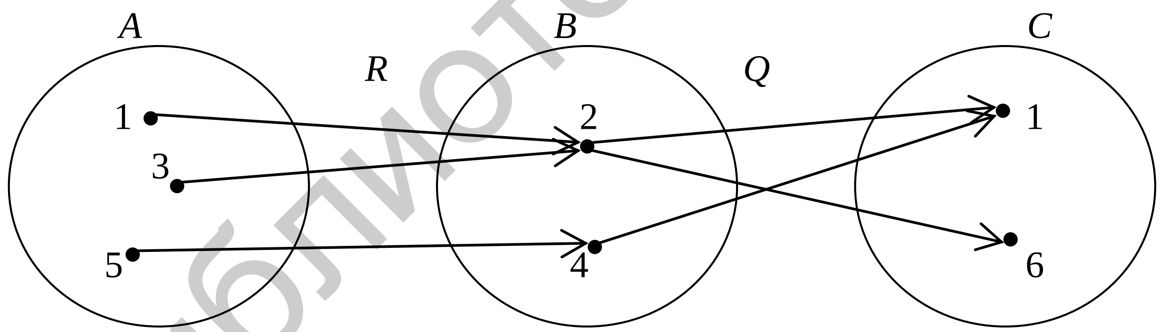


Рисунок 2.3 – Графическое решение примера 2

Композицию отношений можно найти по рисунку 2.3: $R \circ Q = \{(1, 1), (1, 6), (3, 1), (3, 6), (5, 1)\}$. Например, для элемента $(1, 6) \in R \circ Q$, $\exists$ элемент $2 \in B$, что $(1, 2) \in R$, $(2, 6) \in Q$.

Для бинарного отношения $R \subseteq A \times B$, представленного множеством пар (a, b), *обратным отношением* R^{-1} является множество, образованное теми парами $(b, a) \in B \times A$, для которых $(a, b) \in R$:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

Если отношение R задано матрицей, то матрица обратного отношения R^{-1} получается транспонированием матрицы, представляющей R. На рисунке 2.4 задано матрицами бинарное отношение $R \subseteq A \times B$ и обратное к нему отношение $R^{-1} \subseteq B \times A$:

$$R = \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{b}_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad R^{-1} = \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{b}_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Рисунок 2.4 – Пример бинарного отношения и обратного к нему

Для любых бинарных отношений выполняются следующие свойства:

1) $(R^{-1})^{-1} = R$;

2) $(R \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ R^{-1}$.

2.5 Свойства бинарных отношений

Пусть бинарное отношение $R \subseteq A \times A$, т. е. задано на декартовом квадрате $A^2 (R \subseteq A^2)$. Определим свойства для такого отношения:

1. Отношение R на множестве A называется *рефлексивным*, если для каждого элемента $a \in A$ утверждение $a\ R\ a$ является истинным. Например, отношение параллельности прямых является рефлексивным, т. к. всякая прямая параллельна самой себе. В этом случае в бинарной матрице, построенной для рефлексивного отношения, на всей главной диагонали будут стоять единицы.

2. Отношение называется *антирефлексивными* (или *иррефлексивным*), если ни один элемент $a \in A$ не находится в отношении R с самим собой. Например, отношение перпендикулярности прямых является антирефлексивными, поскольку всякая прямая не является перпендикулярной самой себе. В бинарной матрице антирефлексивного отношения вся главная диагональ заполнена нулями.

3. Отношение называется *нерефлексивным*, если свойство рефлексивности выполнено не для всех элементов множества A. Тогда на главной диагонали матрицы будут присутствовать как нули, так и единицы.

4. Отношение R на множестве A называется *симметричным*, если для всяких элементов $a, b \in A$ утверждения $a\ R\ b$ и $b\ R\ a$ являются истинными. Примером может служить отношение «быть братом» на множестве сыновей одних родителей {Андрей, Саша}: если Андрей брат Саши, то и Саша – брат Андрея. Матрица симметричного отношения симметрична относительно главной диагонали.

5. Отношение называется *антисимметричным*, если оно имеет место между элементами $a, b \in A$, но отсутствует между элементами b и a, т. е. для любых неравных элементов множества A из выполнения отношения $a\ R\ b$ следует невыполнение отношения $b\ R\ a$. Пример антисимметричного отношения: «a находится в b». Если «ручка находится в пенале» – верное утверждение, то «пенал находится в ручке» – утверждение ложное.

6. Отношение называется *несимметричным*, если имеет место отношение $a\ R\ b$, а отношение $b\ R\ a$ может быть как истинным, так и ложным. Пример – отношение «a увидел b»: если Коля увидел Толю, то возможно, что и Толя увидел Колю, но мог и не увидеть.

7. Отношение R называется *транзитивным* на множестве A, если для всяких $a, b, c \in A$ из $a\ R\ b$ и $b\ R\ c$ следует $a\ R\ c$. Например, отношение «меньше или равно» на множестве положительных чисел является транзитивным, поскольку если $a \le b$ и $b \le c$, то $a \le c$. Если отношение R транзитивно, то $R \circ R \subseteq R$, т. е. $\forall i, j$, $r'_{ij} \le r_{ij}$ (r'_{ij} – элемент матрицы композиции отношений, r_{ij} – элемент матрицы отношения R).

Транзитивным замыканием $\hat{R}$ бинарного отношения $R \subseteq A^2$ называют объединение степеней этого бинарного отношения: $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$. Для нахождения транзитивного замыкания будем умножать матрицу отношения R саму на себя, получая $R^2, R^3, \ldots, R^n$ до тех пор, пока не выполнится равенство $R^{n-1} = R^n$. Дальнейшее умножение не будет приводить к изменению матриц.

8. Отношение называется *нетранзитивным*, если имеют место отношения $a\ R\ b$ и $b\ R\ c$, а утверждение $a\ R\ c$ может быть как истинным, так и ложным. Например, пусть «A знаком с B» и «B знаком с C», тогда относительно истинности утверждения «A знаком с C» ничего определенного сказать нельзя.

9. Отношение обладает свойством *дихотомии*, если для любых неравных элементов $a, b \in A$ обязательно выполняется отношение $a\ R\ b$ или $b\ R\ a$. В бинарной матрице такого отношения каждая пара элементов, симметричных относительно главной диагонали, будет иметь противоположные значения.

Рассмотренные свойства приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1– Свойства бинарного отношения $R \subseteq A^2$

Свойство отношения	Утверждения, истинные для элементов $a,b,c \in A$
1 Рефлексивность	$\forall\, a \in A$: $a\ R\ a$
2 Антирефлексивность	$\forall\, a \in A$: $(a, a) \notin R$
3 Нерефлексивность	$(\exists\, a \in A$: $a\ R\ a)$ и $(\exists\, a \in A$: $(a, a) \notin R)$
4 Симметричность	$\forall\, a, b \in A$: если $a\ R\ b$, то $b\ R\ a$
5 Антисимметричность	$\forall\, a, b \in A$: если $a \neq b$ и $a\ R\ b$, то $(b, a) \notin R$
6 Несимметричность	$(\exists\, a, b \in A$: $a\ R\ b$ и $b\ R\ a)$ и $(\exists\, a, b \in A$: $a\ R\ b$ и $(b, a) \notin R)$
7 Транзитивность	$\forall\, a, b, c \in A$: если $a\ R\ b$ и $b\ R\ c$, то $a\ R\ c$
8 Нетранзитивность	$(\exists\, a, b, c \in A$: $a\ R\ b$, $b\ R\ c$ и $a\ R\ c)$ и $(\exists\, a, b, c \in A$: $a\ R\ b$, $b\ R\ c$, но $(a, c) \notin R)$
9 Дихотомия	$\forall\, a, b \in A$: если $a \neq b$, то либо $a\ R\ b$, либо $b\ R\ a$

Примеры свойств бинарных отношений, заданных матрицами, представлены на рисунках 2.5–2.7.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{a_4} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{a_4} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{a_4} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

а *б* *в*

а – рефлексивность; *б* – антирефлексивность; *в* – нерефлексивность

Рисунок 2.5 – Примеры свойств 1–3

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{a_4} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{a_4} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{a_4} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

а *б* *в*

а – симметричность; *б* – антисимметричность; *в* – несимметричность

Рисунок 2.6 – Примеры свойств 4–6

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{a_4} \end{array} \\
\begin{array}{c} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{array} &
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Рисунок 2.7 – Пример свойства дихотомии

Любое бинарное отношение R на конечном множестве A можно представить ориентированным графом, в котором вершины обозначают элементы множества A, а направленные линии или ребра, их соединяющие, – наличие отношения между элементами (для пары (a, b) стрелка направлена от элемента a к элементу b). Если отношение содержит элементы (a, b) и (b, a), то между элементами a и b будут два противоположно направленных ребра, а элемент (a, a) отношения R представлен петлей на вершине a.

Пример. На множестве $A = \{a, b, c, d, e\}$ задано отношение $S = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, e), (b, c), (c, c), (d, b)\}$. Задать отношение S бинарной матрицей и ориентированным графом. Определить, какими свойствами обладает отношение S.

Решение. Для данного примера зададим отношение S бинарной матрицей

$$
S = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} \end{array} \\
\begin{array}{c} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{e} \end{array} &
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

В полученной матрице на главной диагонали присутствуют нули и единицы (свойство нерефлексивности), нет ни одной пары единиц, симметрично расположенных относительно главной диагонали (свойство антисимметричности).

Найдем $S \circ S$, перемножив матрицу саму на себя:

$$
S \circ S = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} \end{array} \\
\begin{array}{c} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{e} \end{array} &
\begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Операцию умножения матриц можно не доводить до конца, если элемент матрицы композиции отношений s'_{ij} больше соответствующего элемента s_{ij} в матрице для отношения *S*, как и получилось в примере (элемент $s'_{12} > s_{12}$). Рассматриваемое отношение *S* не обладает свойством транзитивности.

Построим граф отношения *S* (рисунок 2.8).

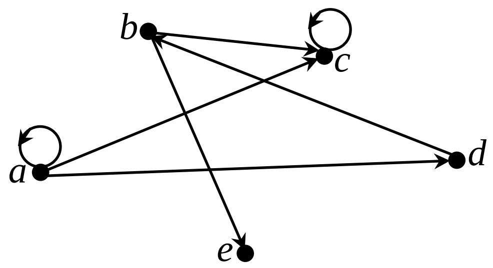


Рисунок 2.8 – Задание бинарного отношения *S* в виде графа

На рисунке 2.8 представлено отношение, являющееся нерефлексивным (петли не на всех вершинах), антисимметричным (свойство симметрии не представлено ни для одной пары вершин), нетранзитивным (свойство транзитивности выполняется не для всех элементов).

2.6 Типы бинарных отношений

Некоторые типы бинарных отношений характеризуются набором свойств.

Отношение *эквивалентности* обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Пусть *A* – множество студентов одного университета. Тогда отношение $a\ R\ b$, где a, $b \in A$, а *R* обозначает «быть однокурсником», является отношением эквивалентности, поскольку оно рефлексивно (студент является однокурсником по отношению к себе), симметрично (если a – однокурсник по отношению к b, то и b – однокурсник по отношению к a), транзитивно (если a – однокурсник по отношению к b, b – однокурсник по отношению к c, то a – однокурсник по отношению к c).

Отношение эквивалентности разбивает множество *A* на непересекающиеся классы эквивалентности. В рассмотренном примере отношение «быть однокурсником» разбивает все множество студентов на четыре непересекающихся класса (при четырехлетней системе обучения), где *i*-й класс образуют все студенты *i*-го курса. Множество всех классов эквивалентности образует *фактор-множество* *A/R* множества *A* (в рассмотренном примере *A* – множество студентов всех курсов). Очевидно, что классы фактор-множества являются непересекающимися.

Пример 1. На множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ задано фактор-множество $A/R = \{\{1, 2, 3\}, \{5\}, \{4, 6\}\}$. Построить соответствующее этому фактор-множеству отношение эквивалентности R.

Решение. Так как фактор-множество состоит из классов эквивалентности (в данном примере их три), то должны выполняться свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности отношения R для каждого класса, тогда получаем

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (5, 5), (4, 4), (6, 6), (4, 6), (6, 4)\}$.

Отношением *толерантности* на множестве называется бинарное отношение, удовлетворяющее свойствам рефлексивности и симметричности, но не обязательно являющееся транзитивным. Таким образом, отношение эквивалентности является частным случаем толерантности.

Если отношение R на множестве A является транзитивным и антисимметричным и не является рефлексивным, то оно называется отношением *строгого порядка.* Например, отношение «следовать за»: a следует за b. Отношение следования обладает свойством транзитивности (если a следует за b, а b следует за c, то a следует за c), является антисимметричным (если a следует за b, то b не может следовать за a) и не является рефлексивным (элемент a не может следовать за самим собой). Еще одним примером может служить отношение «а больше b» на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$: $R = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$.

Если отношение R на множестве A рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, то оно называется отношением *нестрогого порядка* (используются также термины «отношение частичного порядка», «отношение неполного порядка»). Например, отношение «не больше» на множестве натуральных чисел является отношением нестрогого порядка, т. к. оно рефлексивно ($a \leq a$), антисимметрично (если $a \leq b$, то $b \leq a$ не выполняется) и транзитивно (если $a \leq b$, а $b \leq c$, то $a \leq c$).

Множество A называется *линейно упорядоченным* (или *полностью упорядоченным*), если любые два его элемента находятся в отношении R, т. е. для любых двух его элементов a и b имеет место либо только $a\ R\ b$, либо только $b\ R\ a$. Тогда говорят, что элементы a и b сравнимы.

Если же отношение $a\ R\ b$ (либо $b\ R\ a$) справедливо не для любых элементов $a, b \in A$, то множество A называется *частично упорядоченным*.

Порядок букв в алфавите является полным порядком. *Лексикографический порядок* – отношение линейного порядка на множестве слов над некоторым упорядоченным алфавитом, используемый в словарях. Обозначим отношение лексикографического порядка символом $\prec$. Пусть имеются слова w и v, заданные следующим образом: $w = a_1a_2a_3{\dots}a_m$ и $v = b_1b_2b_3{\dots}b_n$. Тогда $w \prec v$, если и только если либо $w = pa_iq$, $v = pb_ir$ и буквы $a_i \prec b_i$, где p, q и r – некоторые слова, возможно, пустые, либо $v = wp$, где p – непустое слово. Например, семестр $\prec$ сессия. Здесь p = се, a_i = м, b_i = с, q = естр, r = сия, и в алфавите буква «м» стоит раньше буквы «с». Сравним еще два слова: пар $\prec$ паровоз. Здесь w = пар и p = овоз. То есть согласно лексикографическому порядку слово «семестр» в словаре идет перед словом «сессия», а слово «пар» стоит перед словом «паровоз».

Рассмотренные типы бинарных отношений приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Типы бинарных отношений

Тип отношения	Рефлексивность	Анти-рефлексивность	Симметричность	Анти-симметричность	Транзитивность	Дихотомия
Эквивалентность	+		+		+	
Толерантность	+		+			
Строгий порядок		+		+	+	
Нестрогий порядок	+			+	+	
Полный порядок				+	+	+

Пример 2. Пусть $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Рассмотрим отношение $a\ R\ b$, где R обозначает «больше»:

$R = \{(10, 2), (10, 4), (10, 6), (10, 8), (8, 2), (8, 4), (8, 6), (6, 2), (6, 4), (4, 2)\}$.

Для каждого элемента (a, b) множества R справедливо $a > b$, следовательно, отношение $a > b$ в множестве A есть отношение линейного порядка. Говорят, что отношение $a > b$ множество A упорядочивает линейно.

Пример 3. Задано множество $A = \{c, d, e, f\}$. На булеане множества A определено бинарное отношение R: «$B \subset C$», где B и C – подмножества множества A. Определить, является ли R отношением порядка.

Решение. $2^A = \{\varnothing, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{c, f\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}, \{c, d, e\}, \{c, d, f\}, \{c, e, f\}, \{d, e, f\}, \{c, d, e, f\}\}$.

$\varnothing$ – является подмножеством любого множества.

$\{c\}$ – является подмножеством для множеств: $\{c, d\}$, $\{c, e\}$, $\{c, f\}$, $\{c, d, e\}$, $\{c, d, f\}$, $\{c, e, f\}$, $\{c, d, e, f\}$.

Но $\{c\}$ не является подмножеством, например, для множества $\{d, e\}$.

То есть отношение порядка выполняется не для всех элементов булеана, следовательно, отношение включения упорядочивает булеан множества частично.

Пример 4. Даны множества $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и соответствия $Q_i \subseteq X \times Y$, $i = 1, \ldots, 4$:

$Q_1 = \{(2, 2), (1, 2), (3, 2), (4, 5), (5, 4)\}$;

$Q_2 = \{(2, 2), (3, 2), (4, 2), (1, 3), (2, 3)\}$;

$Q_3 = \{(2, 3), (3, 2), (1, 4), (3, 1), (4, 5)\}$;

$Q_4 = \{(5, 2), (1, 3), (2, 5), (4, 1), (3, 4)\}$.

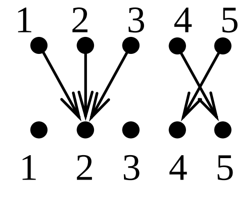
Определить, каким является каждое из соответствий Q_i ($i = 1, \ldots, 4$) (всюду определенное, сюръективное, функциональное, инъективное, биективное). Затем для каждого из соответствий Q_i с учетом его свойств выполнить следующее:

1. Если соответствие Q_i всюду определено, функционально, но не инъективно, то построить разбиение области определения соответствия на классы эквивалентности по отношению P: «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат прообразу одного и того же элемента».

2. Если соответствие Q_i сюръективно, инъективно, но не функционально, то построить разбиение области значений соответствия на классы эквивалентности по отношению R: «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат образу одного и того же элемента».

Решение. Определим, обладают ли соответствия Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 свойствами всюду определенности, сюръективности, функциональности, инъективности, биективности. В зависимости от свойств соответствия выполним для него один из пунктов (1 или 2) задания примера 4.

Изобразим каждое из соответствий графически. Здесь верхняя строка соответствует элементам множества X, а нижняя – элементам множества Y. Рассмотрим соответствие Q_1.



Свойства соответствия Q_1:

а) *всюду определено*, т. к. область определения соответствия Q_1 (проекция множества Q_1 = {(2, 2), (1, 2), (3, 2), (4, 5), (5, 4)} на первую ось) совпадает с X: $DomQ_1 = \{2, 1, 3, 4, 5\} = X$;

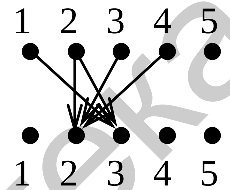
б) *не сюръективно*, т. к. область значений соответствия Q_1 (проекция множества Q_1 = {(2, 2), (1, 2), (3, 2), (4, 5), (5, 4)} на вторую ось) не равна множеству Y: $RanQ_1 = \{2, 5, 4\} \neq Y$;

в) *функционально*, поскольку образ любого элемента из области определения соответствия содержит только один элемент из области значений соответствия (образ элементов 1, 2, и 3 – это множество {2} с единственным элементом, образом элемента 4 является множество {5}, образом элемента 5 является множество{4});

г) *не инъективно*, т. к. для элемента 2 из области значений соответствия Q_1 его прообраз {1, 2, 3} состоит более чем из одного элемента;

д) *не биективно*, поскольку соответствие Q_1 не является, например, сюръективным.

Рассмотрим соответствие Q_2.



Свойства соответствия Q_2:

а) *не является всюду определенным*, поскольку область определения соответствия Q_2 не равна множеству X: $DomQ_2 = \{1, 2, 3, 4\} \neq X$;

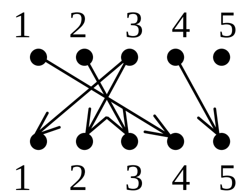
б) *не сюръективно*, т. к. область значений Q_2 не совпадает с Y: $RanQ_2 =$ $= \{2, 3\} \neq Y$;

в) *не функционально*, поскольку образ элемента 2 из области определения соответствия состоит более чем из одного элемента: $\{2, 3\} \subseteq RanQ_2$;

г) *не инъективно*, поскольку, например, для элемента 2 из области значений соответствия прообраз состоит более чем из одного элемента: {2, 3, 4};

д) *не биективно*, т. к. соответствие Q_2, например, не всюду определено.

Рассмотрим соответствие Q_3.



Свойства соответствия Q_3:

а) *не всюду определенно*, т. к. область определения соответствия не равна множеству X: $DomQ_3 = \{1, 2, 3, 4\} \neq X$;

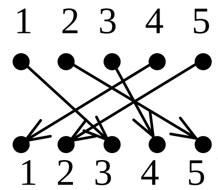
б) *сюръективно*, т. к. область значений Q_3 совпадает с Y: $RanQ_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\} = Y$;

в) *не функционально*, поскольку образ элемента 3 из области определения соответствия Q_3 состоит более чем из одного элемента: $\{1, 2\} \subseteq RanQ_3$;

г) *инъективно*, поскольку прообраз каждого элемента из области значений соответствия Q_3 состоит в точности из одного элемента;

д) *не биективно*, т. к. соответствие не всюду определено и не функционально.

Рассмотрим соответствие Q_4.



Свойства соответствия Q_4:

а) *всюду определено*, т. к. область определения Q_4 совпадает с X: $DomQ_4 = \{1, 2, 3, 4, 5\} = X$;

б) *сюръективно*, поскольку область значений Q_4 совпадает с Y: $Ran\mathrm{Q}_4 = \{1, 2, 3, 4, 5\} = Y$;

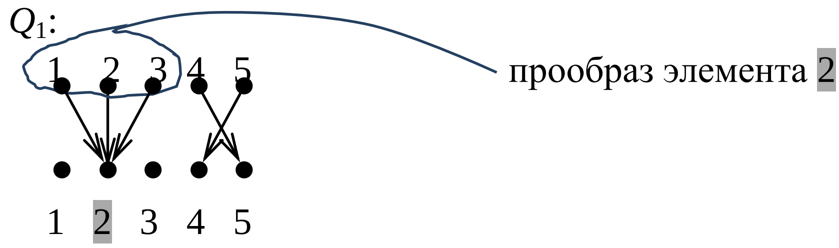
в) *функционально*, поскольку образом любого элемента из области определения соответствия является единственный элемент из области значений соответствия;

г) *инъективно*, поскольку прообразом любого элемента из области значений соответствия является единственный элемент из области определения соответствия;

д) *биективно*, т. к. соответствие Q_4 всюду определено, сюръективно и функционально.

Так как соответствие Q_1 всюду определено и функционально, но не инъективно, выполним для него задание 1, т. е. построим разбиение области определения соответствия Q_1 на классы эквивалентности по отношению P: «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат прообразу одного и того же элемента».

Имеем множество – область определения соответствия Q_1: $DomQ_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, и заданное на этом множестве отношение эквивалентности P: «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат прообразу одного и того же элемента». Построим разбиение множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ на классы по заданному отношению эквивалентности P. Для этого в первый класс эквивалентности C_1 поместим любой элемент из заданного множества {1, 2, 3, 4, 5}, например, элемент 1. Далее выберем любой из оставшихся элементов, например, 2, и проверим, находится ли он в заданном отношении P с уже выбранным элементом 1. Элемент 1 и элемент 2 принадлежат прообразу одного и того же элемента 2:



Значит, элементы 1 и 2 из области определения находятся в отношении P ($1\ P\ 2$ = *истина*), и, следовательно, принадлежат одному классу эквивалентности. Таким образом, элемент 2 также добавляем в первый класс эквивалентности C_1.

Выбираем следующий из оставшихся элементов, например, 3. Проверим, находится ли он в отношении P с уже рассмотренными элементами 1 и 2. Видим, что элемент 3 также принадлежит прообразу элемента 2 из области значений ($1\ P\ 3$ = *истина*, $2\ P\ 3$ = *истина*). Поэтому элемент 3 также добавляем в первый класс эквивалентности C_1.

Выбираем следующий из оставшихся элементов, например, 4. Проверим, находится ли он в отношении P с уже рассмотренными элементами 1, 2 и 3. Видим, что элемент 4 не принадлежит прообразу элемента 2, которому принадлежат помещенные в один класс элементы 1, 2 и 3 (элемент 4 принадлежит прообразу элемента 5). Элементы 1, 2, 3 и элемент 4 принадлежат прообразам разных элементов ($2 \neq 5$), значит, элемент 4 не находится в отношении P ни с каким из элементов 1, 2, 3. Поэтому элемент 4 мы относим в новый класс эквивалентности C_2.

Рассмотрим оставшийся элемент 5. Он принадлежит прообразу элемента 4. $4 \neq 2$, $4 \neq 5$, т. е. элемент 4, прообразу которого принадлежит элемент 5, отличен от элементов, прообразам которых принадлежат элементы 1, 2, 3, 4. А значит, элемент 5 не находится в отношении P ни с 1, 2, 3, ни с 4. Поэтому для элемента 5 заводим отдельный класс эквивалентности C_3.

Больше не осталось нерассмотренных элементов из множества {1, 2, 3, 4, 5}, все они распределены по следующим непересекающимся классам эквивалентности:

$$C_1 = \{1, 2, 3\},\ C_2 = \{4\},\ C_3 = \{5\}.$$

Таким образом, получено разбиение области определения соответствия Q_1 на классы эквивалентности по заданному отношению P:

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3\} \cup \{4\} \cup \{5\}.$$

1-й класс: прообраз элемента 2 из области значений соответствия – $\{1, 2, 3\}$.

2-й класс: прообраз элемента 5 из области значений соответствия – $\{4\}$.

3-й класс: прообраз элемента 4 из области значений соответствия – $\{5\}$.

Отметим, что отношение эквивалентности P, заданное на Q_1, состоит из следующих пар:

$$P = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3),(3, 2)\}.$$

Так как соответствие Q_3 сюръективно и инъективно, но не функционально, то выполним для него задание 2, т. е. построим разбиение области значений соответствия на классы эквивалентности по отношению R: «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат образу одного и того же элемента».

Построим разбиение области значений $RanQ_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ на классы эквивалентности:

1-й класс: образ элемента 1 из области определения соответствия – $\{4\}$;

2-й класс: образ элемента 2 из области определения соответствия – $\{3\}$;

3-й класс: образы элемента 3 из области определения соответствия – $\{1, 2\}$;

4-й класс: образ элемента 4 из области определения соответствия – $\{5\}$.

Отметим, что отношение эквивалентности R, заданное на Q_3, состоит из следующих пар:

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1)\}.$$

2.7* Нечеткие отношения и их свойства

Пусть имеется набор универсальных (базовых) множеств X_1, X_2, …, X_n и X – декартово произведение этих множеств: $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Тогда *нечеткое n-арное отношение* R определяется как нечеткое подмножество R на X, принимающее свои значения в [0, 1]. В случае $n = 2$ имеем бинарные нечеткие отношения.

Нечеткие бинарные отношения – это нечеткие отношения, определенные на декартовом произведении двух базовых множеств. Таким образом, нечетким бинарным отношением R между множествами X_1 и X_2 будет называться функция R: $(X_1, X_2) \to [0, 1]$, которая ставит в соответствие каждой паре элементов $(x_1, x_2) \subseteq X_1 \times X_2$ величину функции принадлежности $\mu_R(x_1, x_2) \in [0, 1]$.

Нечеткие отношения позволяют формализовать неточные утверждения типа «x почти равно y», «x значительно больше, чем y» и др.

Пусть заданы множества $X = \{3, 4, 5\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$. Рассмотрим утверждение «x почти равно y» . Нечеткое отношение R: $X \times Y \to [0, 1]$ можно задать следующим образом:

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1, \text{если } x = y, \\ 0{,}8, \text{если} |x - y| = 1, \\ 0{,}6, \text{если} |x - y| = 2, \\ 0{,}4, \text{если} |x - y| = 3. \end{cases}$$

Например, паре (3, 5) ставится в соответствие функция принадлежности $\mu_R(3, 5) = 0{,}6$, $\mu_R(4, 4) = 1$ и т. д.

Это же нечеткое бинарное отношение R можно задать в виде матрицы

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 1 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Операции над нечеткими бинарными отношениями (объединение, пересечение и дополнение) определяются так же, как и операции над нечеткими множествами. При нахождении дополнения нечеткого бинарного отношения R: $X \times Y \to [0, 1]$ в качестве универсума берется $X \times Y$, а функция принадлежности дополнения будет равна $1 - \mu_R(x, y)$.

Нечеткое бинарное отношение R^{-1} называется обратным к отношению R, если его функция принадлежности определяется выражением

$$\mu_{R^{-1}}(x, y) = \mu_R(y, x).$$

Пусть R – нечеткое отношение R: $(X \times Y) \to [0, 1]$ между X и Y, и P – нечеткое отношение P: $(Y \times Z) \to [0, 1]$ между Y и Z. Нечеткое отношение между X и Z, обозначаемое $R \circ P$ и определенное через R и P выражением

$$\mu_{R \circ P}(x, z) = \vee_y(\mu_R(x, y) \wedge \mu_P(y, z)),$$

называется (*max-min*)-*композицией* отношений R и P.

Примечание – В теории нечетких множеств операция взятия минимума обозначается символом $\wedge$, а операция взятия максимума – символом $\vee$, которые используются наравне с обозначениями min и max соответственно.

Для нечетких бинарных отношений определены и другие операции, которые в рамках данного изложения рассматриваться не будут.

В случае когда для базовых множеств X_1 и X_2 выполняется условие равенства $X_1 = X_2 = X$, нечеткое отношение R: $(X, X) \to [0, 1]$ называется нечетким отношением на множестве X.

Пусть R – произвольное нечеткое бинарное отношение, определенное на некотором универсуме X. Отметим некоторые свойства нечетких отношений:

1) рефлексивность:

$\mu_R(x_i, x_i) = 1, \forall x_i \in X$;

2) слабая рефлексивность:

$\mu_R(x_i, x_j) \le \mu_R(x_j, x_j), \forall x_i, x_j \in X$;

3) сильная рефлексивность:

$\mu_R(x_i, x_i) = 1, \mu_R(x_i, x_j) < 1, \forall x_i, x_j \in X, x_i \ne x_j$;

4) антирефлексивность:

$\mu_R(x_i, x_i) = 0, \forall x_i \in X$;

5) симметричность:

$\mu_R(x_i, x_j) = \mu_R(x_j, x_i), \forall x_i, x_j \in X$;

6) антисимметричность:

$\mu_R(x_i, x_j) \wedge \mu_R(x_j, x_i) = 0, \forall x_i, x_j \in X, i \ne j$;

7) (max-min)-транзитивность:

$\mu_R(x_i, x_k) \ge \bigvee_{x_j \in X} (\mu_R(x_i, x_j) \wedge \mu_R(x_j, x_k)), \forall x_i, x_j, x_k \in X$;

8) (min-max)-транзитивность:

$\mu_R(x_i, x_k) \le \bigwedge_{x_j \in X} (\mu_R(x_i, x_j) \vee \mu_R(x_j, x_k)), \forall x_i, x_j, x_k \in X$.

В зависимости от набора свойств, которыми обладают нечеткие отношения, они делятся на типы. Классификация нечетких отношений приведена в таблице 2.3.

Таблица 2.3 – Классификация нечетких отношений

Тип нечеткого отношения	Рефлексивность	Анти-рефлексивность	(max-min)-транзитивность	(min-max)-транзитивность	Симметричность	Антисимметричность
Подобие	+		+		+	
Различие		+		+	+	
Толерантность	+				+	
Несходство		+			+	
Предпорядок	+		+			
Слабый порядок	+					+
Нестрогий порядок	+		+			+
Строгий порядок		+	+			+

3 Задания для самостоятельной и индивидуальной работы

Задание 1. Дан универсум $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \le x \le 9\}$ и множества A, B, C, D из универсума U, заданные в таблице 3.1 описанием или перечислением своих элементов, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Требуется найти значения заданных выражений E, F.

Таблица 3.1 – Задание множеств A, B, C, D и выражений E, F

№	X	**Выражение для X**	**№**	X	**Выражение для X**
1	2	3	4	5	6
1	A	$\{3, 2, 5, 6\}$	**2**	A	$\{8, 6, 0, 2, 3\}$
	B	$\{x \in U \mid x$ – четное$\}$		B	$\{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k - 3,\ k = 2, 3, 4\}$
	C	$\{3, 6, 4, 7, 8, 9\}$		C	$\{5, 3, 6, 1, 0, 2\}$
	D	$\{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x \le 9\}$		D	$\{x \in \mathbb{N} \mid (x - 3)(x^2 - 4) = 0\}$
	E	$(A \otimes B) \cap \bar{C}$		E	$(A \setminus \bar{B}) \cap C$
	F	$2^{D \setminus A}$		F	$2^{D \cap A}$
3	A	$\{1, 0, 3, 8, 7, 5\}$	**4**	A	$\{7, 0, 4, 3, 6, 8\}$
	B	$\{x \in U \mid x$– четное$\}$		B	$\{x \in \mathbb{N} \mid x = 2(k - 2),$ $k = 2, 3, 5\}$
	C	$\{3, 6, 4, 7, 8, 9\}$		C	$\{0, 3, 4, 2, 8, 5\}$
	D	$\{x \in \mathbb{N} \mid \lvert x - 5 \rvert < 5\}$		D	$\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 = 0$ или $x^2 = 1\}$
	E	$(\bar{A} \cap B) \setminus C$		E	$(A \cup B) \otimes \bar{C}$
	F	$2^{D \setminus C}$		F	$2^{D \setminus C}$
5	A	$\{8, 1, 7, 5\}$	**6**	A	$\{6, 7, 0, 4, 1\}$
	B	$\{x \in \mathbb{N} \mid \lvert x - 3 \rvert < 4\}$		B	$\{x \in \mathbb{N} \mid (x - 5)(x - 7) = 0\}$
	C	$\{1, 8, 7, 3, 2, 6\}$		C	$\{5, 7, 3, 6, 1, 0\}$
	D	$\{x \in U \mid x < 3$ и $x \ge 6\}$		D	$\{x \in U \mid x$– четное$\}$
	E	$(A \setminus B) \cup \bar{C}$		E	$(\bar{A} \cap B) \otimes C$
	F	$2^{D \cap A}$		F	$2^{D \cap C}$
7	A	$\{2, 6, 0, 9, 8\}$	**8**	A	$\{5, 8, 2, 3\}$
	B	$\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \le x \le 6\}$		B	$\{x \in U \mid x$ – нечетное$\}$
	C	$\{6, 9, 0, 1, 2, 3\}$		C	$\{1, 6, 7, 9, 3\}$
	D	$\{x \in \mathbb{N} \mid \lvert x - 2 \rvert < 3\}$		D	$\{x \in U \mid x < 5$ и $x > 7\}$
	E	$(A \cup \bar{B}) \setminus C$		E	$(A \otimes \bar{B}) \setminus C$
	F	$2^{D \cap B}$		F	$2^{D \cap C}$
9	A	$\{5, 2, 1, 8, 3, 6\}$	**10**	A	$\{2, 1, 5, 6, 7\}$
	B	$\{x \in \mathbb{N} \mid (x - 4)(x^2 - 25) = 0\}$		B	$\{x \in U \mid x \ge 6$ и x – четное$\}$
	C	$\{5, 9, 2, 3,1\}$		C	$\{1, 5, 0, 7, 3\}$
	D	$\{x \in \mathbb{N} \mid x = 3k + 3,\ k = 0, 1, 2\}$		D	$\{x \in \mathbb{N} \mid (x^2 - 9)(x - 1)(x - 6) =$ $= 0\}$

Продолжение таблицы 3.1

1	2	3	4	5	6
	E	$\bar{A}\otimes(B\cup C)$		E	$A\setminus(\bar{B}\cap C)$
	F	$2^{D\cap C}$		F	$2^{D\otimes A}$
11	A	$\{4, 7, 3, 2\}$	**12**	A	$\{7, 1, 6, 8, 4, 5\}$
	B	$\{x\in U \mid x < 4$ и $x > 8\}$		B	$\{x\in\mathbb{N} \mid x = 3k + 1, k = 0, 1, 2\}$
	C	$\{8, 2, 6, 3, 0\}$		C	$\{0, 3, 5\}$
	D	$\{x\in U \mid x$ – нечетное$\}$		D	$\{x\in U \mid 2 < \lvert x-3\rvert < 9\}$
	E	$\bar{A}\cup(B\setminus C)$		E	$A\otimes(B\cup\bar{C})$
	F	$2^{D\otimes C}$		F	$2^{D\setminus A}$
13	A	$\{4, 0, 2, 1, 5, 8\}$	**14**	A	$\{1, 3, 6, 4, 2\}$
	B	$\{x\in\mathbb{N} \mid 0 < x < 4\}$		B	$\{x\in U \mid x = 2^k, k = 0, 1, 3\}$
	C	$\{8, 4, 5, 2, 0\}$		C	$\{7, 2, 5, 6, 1, 0\}$
	D	$\{x\in\mathbb{N} \mid \lvert x-2\rvert < 4\}$		D	$\{x\in U \mid (x^2-25)(x-2)x = 0\}$
	E	$(\bar{A}\otimes B)\setminus C$		E	$(A\cup\bar{B})\otimes C$
	F	$2^{D\cap C}$		F	$2^{C\setminus D}$
15	A	$\{9, 0, 1, 2, 3\}$	**16**	A	$\{4, 0, 6, 2, 8, 3\}$
	B	$\{x\in\mathbb{N} \mid 2 < \lvert x-4\rvert < 5\}$		B	$\{x\in\mathbb{N} \mid x = 4(k+1), k = 0, 1\}$
	C	$\{7, 6, 1, 0, 8, 5\}$		C	$\{2, 7, 3, 6\}$
	D	$\{x\in U \mid x = 3(k-2),$ $k = 2, 3, 4\}$		D	$\{x\in U \mid x$ – нечетное$\}$
	E	$A\cap(\bar{B}\otimes C)$		E	$(A\setminus\bar{B})\cap C$
	F	$2^{A\setminus D}$		F	$2^{D\cap C}$
17	A	$\{1, 5, 6\}$	**18**	A	$\{0, 7, 3, 8, 1\}$
	B	$\{x\in U \mid 2 < x \le 7\}$		B	$\{x\in U \mid x > 3, x$ – четное$\}$
	C	$\{6, 0, 7, 3, 8, 1\}$		C	$\{1, 7, 3, 0\}$
	D	$\{x\in\mathbb{N} \mid (x-7)(x-8)x = 0\}$		D	$\{x\in\mathbb{N} \mid x$ кратно трем, $< 10\}$
	E	$(\bar{A}\otimes B)\cap C$		E	$A\cap(\bar{B}\cup C)$
	F	$2^{C\setminus D}$		F	$2^{D\cap B}$
19	A	$\{7, 9, 2, 3\}$	**20**	A	$\{0, 8, 5\}$
	B	$\{x\in U \mid 3 \le x \le 7\}$		B	$\{x\in\mathbb{N} \mid 2 \le \lvert x-3\rvert < 7\}$
	C	$\{4, 5, 0, 1, 3, 9\}$		C	$\{4, 1, 6, 3, 5, 2\}$
	D	$\{x\in U \mid x < 5$ и $x > 7\}$		D	$\{x\in U \mid x^2 - 9x + 20 = 0\}$
	E	$\bar{A}\otimes(B\cap C)$		E	$(A\cap\bar{B})\setminus C$
	F	$2^{D\cap A}$		F	$2^{D\otimes A}$

Задание 2. Дан универсум $U = \{x \mid x$ – целое, $0 \le x \le 9\}$. Определить, из каких элементов состоит множество $M \subseteq U$, заданное так, как указано в таблице 3.2. Здесь множества *A, B, C, D* взять из таблицы 3.1.

Таблица 3.2 – Условия формирования множества *M*

№	Условия
1	$D\subseteq\overline{M}$, $C\cap M=\varnothing$, $0\notin M$, $\lvert M\rvert=2$, $M\setminus B=\{5\}$
2	$A\cap B\subseteq M$, $\lvert M\rvert=3$, $M\setminus C=\varnothing$, $0\in M$, $(D\otimes B)\setminus M=\{2, 5\}$
3	$(B\setminus A)\cap M\neq\varnothing$, $M\cap(D\setminus C)=\varnothing$, $M\subseteq B$, $\lvert M\rvert=2$, $6\notin M$, $A\cap B\cap D\subseteq M$
4	$\lvert M\rvert=2$, $M\subseteq \mathrm{A}$, $\overline{B\cup C\cup D}\cap M\neq\varnothing$, $4\in M$
5	$M\subseteq D$, $\lvert M\rvert=3$, $7\in M$, $(B\setminus A)\cap M=\varnothing$, $M\cap\overline{C\cap D}=\varnothing$
6	$0\in M$, $M\setminus\bar{B}=\varnothing$, $\lvert M\rvert=2$, $\lvert(A\cap C)\setminus M\rvert=2$, $M\subseteq C\setminus B$, $6\notin M$
7	$(A\cap B)\setminus M=\{6\}$, $\lvert M\rvert=3$, $M\subseteq C$, $\{7, 8, 9\}\subseteq\overline{M}$, $1\notin M$, $(D\setminus\{2\})\cap M\neq\varnothing$
8	$B\setminus \mathrm{C}\subseteq M$, $M\cap C=\varnothing$, $\lvert M\rvert=2$, $M\subseteq A$, $2\notin M$
9	$\lvert M\rvert=3$, $M\subseteq\bar{D}$, $B\setminus M=\{5\}$, $0\notin M$, $M\cap C=\varnothing$
10	$M\cap\bar{A}\neq\varnothing$, $\lvert M\rvert=2$, $C\setminus M=\{1, 0, 7, 3\}$, $4\notin M$, $B\cap\bar{D}\subseteq M$
11	$M\subseteq\bar{A}$, $B\cap C\cap M\neq\varnothing$, $\lvert M\rvert=2$, $6\notin M$, $\lvert M\cap C\rvert=2$
12	$\lvert M\rvert=2$, $(D\setminus A)\cap M\neq\varnothing$, $M\subseteq\bar{A}$, $0\notin M$, $\overline{B\cup C\cup D}\cap M\neq\varnothing$
13	$M\subseteq A\cap \mathrm{C}$, $\lvert M\rvert=2$, $M\cap B=\varnothing$, $8\notin M$, $M\setminus D\neq\varnothing$, $\lvert M\setminus\{2, 4, 6, 8\}\rvert=1$
14	$\lvert M\rvert=3$, $M\subseteq C$, $D\cap B\cap M\neq\varnothing$, $\bar{M}\cap A=\{3, 6, 4\}$, $0\in M$
15	$C\setminus(M\cup D)=\{7, 8, 5\}$, $M\subseteq B\cup D$, $6\notin M$, $\lvert M\rvert=3$, $(A\setminus B)\cap M\neq\varnothing$
16	$M\subseteq A$, $B\cap M=\varnothing$, $\lvert M\rvert=2$, $(C\setminus D)\cap M=\{2\}$, $0\notin M$
17	$\mathrm{M}\subseteq\bar{D}$, $\lvert M\rvert=2$, $A\cap B\cap C\subseteq M$, $9\notin M$, $(C\setminus B)\cap M=\varnothing$, $\{2, 3, 4\}\subseteq\bar{M}$
18	$M\subseteq\bar{B}$, $D\setminus(C\cup B)\subseteq M$, $5\notin M$, $\lvert M\rvert=2$, $M\cap\{0, 1, 2, 3\}=\varnothing$
19	$M\cap A=\varnothing$, $\lvert M\rvert=2$, $M\subseteq D\cap C$, $0\notin M$
20	$M\subseteq\bar{D}$, $M\setminus C=\varnothing$, $\lvert M\rvert=3$, $2\in M$, $M\cap\{0, 1\}=\varnothing$, $A\cap D\not\subset M$

Задание 3. Даны множества *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *J*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P*, *R*, *S*, *T* (таблица 3.3). Выполнить:

а) среди множеств *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *J*, *K*, *L* указать множества, в которые входят элементы, равные 1;

б) среди множеств *A*, *I*, *H*, *G*, *F*, *M*, *N*, *O* выделить конечные, бесконечные и пустые;

в) определить, верны ли следующие отношения принадлежности (по таблице 3.4);

г) вычислить мощность каждого из четырех указанных множеств (таблица 3.5);

д) перечислить элементы множеств *P* и *R*, заданных описанием (см. таблицу 3.5);

е) задать описанием три множества (см. таблицу 3.5);

ж) выписать все подмножества указанного множества (см. таблицу 3.5);

з) определить, верны ли заданные отношения включения (см. таблицу 3.5).

Таблица 3.3 – Задание множеств

№	**Множества**
1	2
1	$A = \{2, 10, 12, 8, 3\}$, $B = \{1, \{1, 3\}, 2, \{\varnothing\}\}$, $C = \{\{2\}, \{7\}, 1 - 5x, e^5\}$, $D = \{\{\{6, 3, 5\}, \{7\}, 1\}, 2, \{7\}, 1\}$, $E = \{\{1\}, 0\}$, $F = \{1, 11, \{11, 0\}\}$, $G = \{\{1\}, \{0\}, -1\}$, $H = \{1\}$, $I = \varnothing$, $J = \{0, 2, 1, \varnothing\}$, $K = \{2, \{1, \{2\}\}\}$, $L = \{2^0, \{2, 0\}\}$, $M = \{x \mid x = \sin\frac{\pi k}{6}, k = 1, 2, \ldots, 100\}$, $N = \{x\in\mathbb{Z} \mid x = 1/(1 + k), k\in\mathbb{N}\}$, $O = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \pi \pm \pi k, k\in\mathbb{N}\}$, $P = \{x \mid x = \sin^2 t + \cos^2 t, t\in\mathbb{R}\}$, $R = \{x\in\mathbb{Z} \mid -3 < x < 2\}$, $S = \{1, 3, 9, 27\}$, $T = \{0, 1\}$
2	$A = \{8, 9, 3, 6, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2, 4\}, \varnothing, 2\}$, $C = \{\{8, 9\}, 2^x, \pi, \{\varnothing\}, 1, \varnothing\}$, $D = \{4, 2, \{\{4, 2\}, \{4\}, \{2\}\}, \{4, 2\}\}$, $E = \{\varnothing, \{1\}\}$, $F = \varnothing$, $G = \{1, 2, 3\}$, $H = \{\sin(\pi/2), -1\}$, $I = \{2, 3, \varnothing, \{1, \{2, 3, \varnothing\}\}\}$, $J = \{-1, 0, 1\}$, $K = \{\{1\}, \{1, 2, \{1\}\}\}$, $L = \{1\}$, $M = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \ln(10 - \mathrm{z}) + \ln(\mathrm{z} - 10), z\in\mathbb{R}\}$, $N = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \dfrac{2}{2+k}, k\in\mathbb{N}\}$, $O = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \sin(\pi k), k = -6, -5, \ldots, 5, 6\}$, $P = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \cos\pi k, k\in\mathbb{Z}\}$, $R = \{x\in\mathbb{Z} \mid \lvert x\rvert < 3\}$, $S = \{1, e, e^2, e^3, e^4, e^5\}$, $T = \{-1, 1\}$
3	$A = \{6, 1, 8, 11, 12\}$, $B = \{1, \{1\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \varnothing\}$, $C = \{a + b, 2, \{\varnothing\}, 6, \{7, 8\}, \varnothing\}$, $D = \{1, 2, \{1, \{2\}, \{11, 2, 3\}\}, 8, 11\}$, $E = \{\sin\pi, 2, \varnothing\}$, $F = \{\{\varnothing\}, \{1\}\}$, $G = \varnothing$, $H = \{-1, \{0\}, 1\}$, $I = \{0, 11, \{1, -1\}\}$, $J = \{\cos\pi\}$, $K = \{1\}$, $L = \{\varnothing, \{0\}, 1\}$, $M = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \dfrac{m}{n}, m, n\in\mathbb{N}\}$, $N = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \lvert k\rvert + k, k = -10, -9, \ldots, 9, 10\}$, $O = \{x\in\mathbb{R} \mid \mathrm{x}^2 + 1 = 0\}$, $P = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \sin(\pi k + \pi/4), k\in\mathbb{Z}\}$, $R = \{x\in\mathbb{Z} \mid \lvert x + 1\rvert < 4\}$, $S = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$, $T = \{-1, 1\}$
4	$A = \{4, 2, 10, 8, 13\}$, $B = \{\varnothing, \{1, \{3\}\}, 1, \{\varnothing\}\}$, $C = \{\{2\}, \{7\}, -6x, d - e\}$, $D = \{\{6, 8, 5\}, \{7\}, 11, \sin\pi, \{2, \{7\}, 1\}\}$, $E = \{\varnothing, 0\}$, $F = \{\{1\}, 11, \{1, 0\}\}$, $G = \{1, \{0\}, -1\}$, $H = \varnothing$, $I = \{1\}$, $J = \{-1, \lvert -1\rvert\}$, $K = \{\min(2, 1), \cos\pi, 2\}$, $L = \{7, \{7\}, \{\varnothing, 0\}\}$, $M = \{x \mid x = \sin^2 k + \cos^2 k, k = 1, 2, \ldots, 10\}$, $P = \{x \mid x = t^0, t\in\mathbb{R}\}$,

Продолжение таблицы 3.3

1	2
	$N = \{x\in\mathbb{Q} \mid x = \frac{1}{2^k}, k\in\mathbb{N}\}$, $O = \{x\in\mathbb{Z} \mid x = \pi k, k\in\mathbb{N}\}$, $R = \{x\in\mathbb{N} \mid 6 < x < 12\}$, $S = \{0, 7, 14, 21, 28\}$, $T = \{1, -1\}$
5	$A = \{5, 3, 0, 8, 10\}$, $B = \{1, \{1, 3\}, 2, \{\varnothing\}\}$, $C = \{\{4, 7\}, 2 - 5\ln(1), e^5\}$, $D = \{\{\{6, 3, 5\}, \{4\}, 1\}, 2, \{3\}, 1\}$, $E = \{\{1\}, 1, 0\}$, $F = \{11, \{1, 0\}\}$, $G = \{\{1\}, \{0\}, -1\}$, $H = \varnothing$, $I = \{1\}$, $J = \{0, 3, 1, \varnothing\}$, $K = \{2, \{1, \{1\}\}\}$, $L = \{\mathrm{tg}\pi, \{0, 3\}\}$, $M = \{x \mid x = \sin\frac{\pi k}{4}, k = 1, 2, \ldots, 10\}$, $N = \{x\in\mathbb{Z} \mid x = \frac{1}{k^2+1}, k\in\mathbb{N}\}$, $O = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \pm\pi k/2, k\in\mathbb{N}\}$, $P = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \cos\pi k, k\in\mathbb{Z}\}$, $R = \{x\in\mathbb{Z} \mid 2 < x < 3\}$, $S = \{1, 4, 16, 64\}$, $T = \{0, 1\}$
6	$A = \{5, 11, 17, 4, 8\}$, $B = \{\{\varnothing\}, \max(1, 3), \{1, 3\}, 2\}$, $C = \{\{1\}, \{7\}, 1 - 5^0, e^5\}$, $D = \{\{\{1, 3, 5\}, \{5\}, 1\}, 2, \{6, 7\}, \varnothing\}$, $E = \{0, \{1\}\}$, $F = \{0, \lvert -1 \rvert, \{11, 0\}\}$, $G = \{\{1\}, \{0\}, -1\}$, $H = \{1\}$, $I = \varnothing$, $J = \{1, 3, 0, \varnothing\}$, $K = \{3, \{1, \{3\}\}\}$, $L = \{\{2, 0\}, \sin\frac{\pi}{2}\}$, $M = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \frac{m}{n}, m, n\in\mathbb{N}\}$, $N = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \lvert k \rvert - k, k = -5, -4, \ldots, 3, 4\}$, $O = \{x\in\mathbb{R} \mid 1/x = 0\}$, $P = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \arcsin k, k\in\{-1, 0, 1\}\}$, $R = \{x\in\mathbb{Z} \mid 0 < x < 5\}$, $S = \{2, 6, 10, 14\}$, $T = \{0, 1\}$.
7	$A = \{3, 5, 15, 2, 7\}$, $B = \{\varnothing, \{3, 1\}, 2, \{\varnothing\}\}$, $C = \{\{4\}, \{2\}, 1 - \cos\pi, e^5\}$, $D = \{\{\{1, 3, 5\}, \{1\}, 1\}, 2, \{4, 1\}, 0\}$, $E = \{\{-1\}, 0\}$, $F = \{0, 1, \{11, 0\}\}$, $G = \{\{0\}, \{1\}, -1\}$, $H = \varnothing$, $I = \{1\}$, $J = \{0, 1, 3, \varnothing\}$, $K = \{3, \{1, \{2\}\}\}$, $L = \{4^0, \{4, 0\}\}$, $M = \{x\in\mathbb{Z} \mid x = \ln(-m), m\in\mathbb{N}\}$, $N = \{x\in\mathbb{R} \mid x = k - \lvert k \rvert, k = -5, -4, \ldots, 3, 4\}$, $O = \{x\in\mathbb{Z} \mid 1 - \lvert x \rvert = 0, x\in\{-3, -2, \ldots, 2, 3\}\}$, $P = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \mathrm{arctg} k, k\in\{-1, 0, 1\}\}$, $R = \{x\in\mathbb{N} \mid \lvert x - 6 \rvert < 4\}$, $S = \{3, 9, 15, 21\}$, $T = \{0, 1\}$
8	$A = \{3, 5, 10, 2, 0\}$, $B = \{1, \{\varnothing, 3\}, 2, \varnothing\}$, $C = \{\{1\}, \{3\}, 1 + \sin(\pi/2), e^2\}$, $D = \{\{\{2, 3, 5\}, \{5\}, 1\}, 2, \{7, \sqrt{25}, \varnothing\}$, $E = \{1, 0\}$, $F = \{3^0, 11, \{11, 0\}\}$, $G = \{\{1\}, \{0\}, -1\}$, $H = \{1\}$, $I = \varnothing$, $J = \{0, 2, 1\}$, $K = \{4, \{1, \{2\}\}\}$, $L = \{\mathrm{tg}(5\pi/4), \{1, 0\}\}$, $M = \{x \mid x = \sin(\pi k/2), k = 1, 2, \ldots, 10\}$, $P = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \cos^2\pi k, k\in\mathbb{Z}\}$, $R = \{x\in\mathbb{Z} \mid -3 < x < 1\}$, $S = \{0, 5, 10, 15\}$,

Продолжение таблицы 3.3

1	2
	$N = \{x\in\mathbb{Z} \mid x = \dfrac{2}{k^2+1}, k\in\mathbb{N}\}$, $O = \{x\in\mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$, $T = \{0, 1\}$
9	$A = \{5, 2, 8, 10, 9\}$, $B = \{\varnothing, \{1, 3\}, 2, \{\varnothing\}\}$, $C = \{\{3\}, \{7\}, 2 + 2\ln 1, 1\}$, $D = \{\{\{1, 3, 5\}, \{3\}, 1\}, 2, \{7, 1\}, 3\}$, $E = \{\lvert -1\rvert, 0\}$, $F = \{\{1\}, 11, \{11, 0\}\}$, $G = \{\{-1\}, \{0\}, 1\}$, $H = \varnothing$, $I = \{1\}$, $J = \{0, 2, 1, \varnothing\}$, $K = \{4, \{1, \{2\}\}\}$, $L = \{\{2, 0\}, \ln e\}$, $M = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \ln(-z), z\in\mathbb{N}\}$, $N = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \dfrac{5}{6+k}, k\in\mathbb{N}\}$, $O = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \cos\pi k$, $k = -3, -2, \ldots, 2, 3\}$, $P = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \sin^2\dfrac{\pi}{2}k, k\in\mathbb{Z}\}$, $R = \{x\in\mathbb{Z} \mid \lvert x - 5\rvert < 3\}$, $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $T = \{0, 1\}$
10	$A = \{8, 6, 11, 3, 4\}$, $B = \{3, \{1, 3\}, -2, \{\varnothing\}\}$, $C = \{\{4\}, \{0\}, \sin\pi, 2\}$, $D = \{\{\{2, 3, 7\}, \{1\}, 4\}, 2, \{3\}, 1\}$, $E = \{\{1\}, 0\}$, $F = \{1, 11, \{1, 0\}\}$, $G = \{\{1\}, \{0\}, -1\}$, $H = \{1\}$, $\mathrm{I} = \varnothing$, $J = \{3, 2, 1, \varnothing\}$, $K = \{2, \{1, \{-2\}\}\}$, $L = \{\mathrm{ctg}(\pi/4), \{3, 0\}\}$, $M = \{x \mid x = \cos(\pi k/3), k = 1, 2, \ldots, 5\}$, $N = \{x\in\mathbb{R} \mid x = k^2 + k, k\in\mathbb{N}\}$, $O = \{x\in\mathbb{R} \mid x^2 + 4 = 0\}$, $P = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \mathrm{ctg}(\pi k/2),$ $k\in\mathbb{Z}\}$, $R = \{x\in\mathbb{Z} \mid \lvert x - 6\rvert < 3\}$, $S = \{1, 4, 7, 10\}$, $T = \{0, -1\}$
11	$A = \{7, 6, 9, 3, 2\}$, $B = \{-3, \{1, 7\}, 1, \{\varnothing\}\}$, $C = \{\{2\}, \{0, 5\}, \cos(\pi/3), 2\}$, $D = \{1, \{\{2, 3, 1\}, \{5\}, 4\}, 2, \{3\}\}$, $E = \{\{1\}, 1\}$, $F = \{\{1\}, 11, \{1, 0\}\}$, $G = \{1, \{0\}, -1\}$, $H = \varnothing$, $I = \{1\}$, $J = \{-3, -2, -1, \varnothing\}$, $K = \{0, \{1, \{-2\}\}\}$, $L = \{\mathrm{tg}(\pi/4), \{1, 0\}\}$, $M=\{x\in\mathbb{R} \mid x = \dfrac{m}{n+1} + 2, m, n\in\mathbb{N}\}$, $N = \{x\in\mathbb{R} \mid x = k^2 - k, k\in\mathbb{N}\}$, $O = \{x\in\mathbb{R} \mid x^2 + 3 = 1\}$, $P = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \mathrm{tg}\pi k, k\in\mathbb{Z}\}$, $R = \{x\in\mathbb{Z} \mid \lvert x - 5\rvert < 8\}$, $S = \{1, -4, 7, -10\}$, $T = \{0, 1\}$
12	$A = \{5, 7, 10, 1, 4\}$, $B = \{\varnothing, \{1, \{3\}\}, 2, \{2\}\}$, $C = \{\{1\}, \{7\}, -6, d - e\}$, $D = \{\{6, 3, 5\}, \{2\}, 11, \mathrm{tg}\pi, \{2, \{7\}, 1\}\}$, $E = \{\varnothing, 1\}$, $F = \{\{1\}, 11, \{1, 0\}\}$, $G = \{1, \{0\}, -1\}$, $H = \varnothing$, $I = \{1\}$, $J = \{-1, \lvert -1\rvert\}$, $K = \{\min(1, 3), \{0, \{2\}\}\}$, $L = \{7, \{7\}, \{\varnothing, 0\}\}$, $M = \{x \mid x = \sin(\pi k/4), k = 1, 2, \ldots, 12\}$, $N = \{x\in\mathbb{Q} \mid x = \dfrac{1}{2^k+3}, k\in\mathbb{N}\}$, $O = \{x\in\mathbb{Z} \mid x = (\pi + 1)k, k\in\mathbb{N}\}$, $P = \{x \mid x = t^0+1, t\in\mathbb{R}\}$, $R = \{x\in\mathbb{N} \mid 2 < x < 10\}$, $S = \{0, 7, -14, 21, -28\}$, $T = \{1, -1\}$

Продолжение таблицы 3.3

1	2
13	$A = \{5, 4, 11, 1, 10\}$, $B = \{\varnothing, \{3, 1\}, 7, \{\varnothing\}\}$, $C = \{\{3\}, \{2\}, 1 + \cos\pi, e^5\}$, $D = \{\{\{1, 3, 5\}, \{1\}, 1\}, 2, \{8, 1\}, 0\}$, $E = \{\{1\}, 0\}$, $F = \{0, 1, \{11, 0\}\}$, $G = \{\{0\}, \{-1\}, 1\}$, $H = \varnothing$, $I = \{1\}$, $J = \{0, 1, 3, \varnothing\}$, $K = \{3, \{1, \{2\}\}\}$, $L = \{4^0, \{4, 0\}\}$, $M = \{x \mid x = \cos(\pi k/3),\ k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \lvert k\rvert - k,\ k = -5, -4, \ldots, 4, 5\}$, $O = \{x\in\mathbb{R} \mid 1 - x = 5,\ x\in\{-3\ldots3\}\}$, $P = \{x\in\mathbb{N} \mid x = \mathrm{arctg}\,k,\ k\in\{-1, 1\}\}$, $R = \{x\in\mathbb{N} \mid \lvert x - 6\rvert < 4\}$, $S = \{-6, 0, 3, 9\}$, $T = \{0, 1\}$
14	$A = \{1, 3, 7, 5, 4\}$, $B = \{1, \{0, 3\}, 2, \{\varnothing\}\}$, $C = \{\{2\}, \{6\}, 1 - 5x, e^5\}$, $D = \{\{\{6, 3, 5\}, \{2, 4\}, 1\}, 4, \{7\}, 1\}$, $E = \{\{1\}, 0\}$, $F = \{1, 11, \{1, 0\}\}$, $G = \{\{1\}, \{0\}, -1\}$, $H = \{1\}$, $I = \varnothing$, $J = \{0, 2, 1, \varnothing\}$, $K = \{2, \{1, \{2\}\}\}$, $L = \{3^0, \{2, 0\}\}$, $M = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \ln(10 + z) + \ln(z - 10),\ z\in\mathbb{R}\}$, $N = \{x\in\mathbb{Z} \mid x = \dfrac{-2}{3+k},\ k\in\mathbb{N}\}$, $O = \{x\in\mathbb{R} \mid x = 2\pi \pm \pi k,\ k\in\mathbb{N}\}$, $P = \{x \mid x = \dfrac{1}{2}(\sin^2 t + \cos^2 t),\ t\in\mathbb{R}\}$, $R = \{x\in\mathbb{Z} \mid -6 < x < 2\}$, $S = \{1, -3, 9, -27\}$, $T = \{0, 1\}$
15	$A = \{2, 7, 8, 3, 9\}$, $B = \{\varnothing, \{1, 3\}, 2, \{\varnothing\}\}$, $C = \{\{3\}, \{7\}, 2 - 2\ln 1, 1\}$, $D = \{\{\{1, 3, 5\}, \{2\}, 1\}, 2, \{7, 1\}, 3\}$, $E = \{\lvert -1\rvert, 0\}$, $F = \{\{1\}, 1^2, \{11, 0\}\}$, $G = \{\{-1\}, \{0\}, (-1)^3\}$, $H = \varnothing$, $I = \{1\}$, $J = \{0, 2, 1, \varnothing\}$, $K = \{4, \{1, \{2\}\}\}$, $L = \{\{2, 0\}, \lg 10\}$, $M = \{x \mid x = \sin(\pi k/6),\ k = 1, \ldots, 15\}$, $N = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \dfrac{2}{6+k},\ k\in\mathbb{N}\}$, $O = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \sin\pi k,\ k = -3, -1, 1, 3\}$, $P = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \sin^2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}$, $R = \{x\in\mathbb{Z} \mid \lvert x - 2\rvert < 3\}$, $S = \{-2, 1, 0, -1\}$, $T = \{0, 1\}$
16	$A = \{5, 1, 10, 3, 7\}$, $B = \{1, \{\varnothing, 3\}, 3, \varnothing\}$, $C = \{\{1\}, \{3\}, 1 - \sin(\pi/2), e^2\}$, $D = \{\{\{2, 3, 5\}, \{7\}, 1\}, 2, \{7, \sqrt{9}\}, \varnothing\}$, $E = \{1, 0\}$, $F = \{4^0, 11, \{11, 0\}\}$, $G = \{\{1\}, \{0\}, -1\}$, $H = \{1\}$, $I = \varnothing$, $J = \{0, 2, 1\}$, $K = \{4, \{1, \{2\}\}\}$, $L = \{\mathrm{tg}\,\dfrac{3\pi}{4}, \{1, 0\}\}$, $M = \{x \mid x = \cos^2 k + \sin^2 k,\ k = 1, 2, \ldots, 25\}$, $N = \{x\in\mathbb{Z} \mid x = \dfrac{2}{k+3},\ k\in\mathbb{N}\}$, $O = \{x\in\mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 5\}$, $P = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \cos\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}$, $R = \{x\in\mathbb{Z} \mid -3 < x < 5\}$, $S = \{-10, -5, 0, 5, 10\}$, $T = \{0, 1\}$
17	$A = \{11, 5, 9, 0, 4\}$, $B = \{1, \{1, 3\}, 2, \{\varnothing\}\}$, $C = \{\{2\}, \{7\}, 3 - 5\ln 1, e^5\}$, $D = \{\{\{6, 3, 5\}, \{4, 7\}, 1\}, 2, \{3\}, 1\}$, $E = \{\{1\}, 1, 0\}$, $F = \{0, \{1, 0\}\}$, $G = \{\{1\}, \{0\}, -1\}$, $H = \varnothing$, $I = \{1\}$, $J = \{0, 3, 1, \varnothing\}$, $K = \{2, \{1, \{1\}\}\}$, $L = \{\mathrm{ctg}(\pi/4), \{0, 3\}\}$, $M = \{x\in\mathbb{R} \mid x = \ln(m^2+1),\ m\in\mathbb{N}\}$,

Продолжение таблицы 3.3

1	2
	$N = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = \dfrac{1}{k} - 1,\ k \in \mathbb{N}\}$, $O = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{N}\}$, $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \cos^2 \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $R = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x < 3\}$, $S = \{-1, 4, -16, 64\}$, $T = \{0, 1\}$
18	$A = \{4, 6, 0, 5, 1\}$, $B = \{\{1\}, \{2, 4\}, \varnothing, 2\}$, $C = \{\{8, 9\}, 2^{-1}, \pi, \{\varnothing\}, 1, \varnothing\}$, $D = \{4, 2, \{\{3, 4\}, \{4\}, \{2\}\}, \{3, 2\}\}$, $E = \{\varnothing, \{1\}\}$, $F = \varnothing$, $G = \{1, 2, 3\}$, $H = \{\sin(\pi/2), -1\}$, $I = \{2, 3, \varnothing, \{1, \{2, 3, \varnothing\}\}\}$, $J = \{-1, 0, 1\}$, $K = \{\{1\}, \{1, 2, \{1\}\}\}$, $L = \{1\}$, $M = \{x \mid x = \sin(\pi k/3),\ k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = \dfrac{1}{1+k} - 2,\ k \in \mathbb{N}\}$, $O = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \cos k,\ k = -7, -5, \ldots, 5, 7\}$, $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \sin \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $R = \{x \in \mathbb{Z} \mid \lvert x \rvert < 3\}$, $S = \{1, 2e, 3e^2, 4e^3, 5e^4, 6e^5\}$, $T = \{-1, 1\}$
19	$A = \{0, 4, 8, 3, 5\}$, $B = \{1, \{1\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \varnothing\}$, $C = \{a \cdot b, 2, \{\varnothing\}, 6, \{7, 8\}, \varnothing\}$, $D = \{1, 2, \{1, \{1\}, \{11, 2, 3\}\}, 8, 11\}$, $E = \{\sin\pi, 2, \varnothing\}$, $F = \{\{\varnothing\}, \{1\}\}$, $G = \varnothing$, $H = \{-1, \{0\}, 1\}$, $I = \{0, 11, \{1, -1\}\}$, $J = \{\cos\pi\}$, $K = \{1\}$, $L = \{\varnothing, \{0\}, 1\}$, $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{m+1}{n},\ m, n \in \mathbb{N}\}$, $N = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \lvert k + 3 \rvert - k,\ k = -9, -8, \ldots, 8, 9\}$, $O = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4 = 0\}$, $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \cos \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $R = \{x \in \mathbb{Z} \mid \lvert x \rvert < 5\}$, $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $T = \{-1, 1\}$
20	$A = \{7, 3, 1, 10, 5\}$, $B = \{\{\varnothing\}, \max(1, 3), \{1, 3\}, 2\}$, $C = \{\{1\}, \{7\}, 1 - 5^0, e^5\}$, $D = \{\{\{1, 3, 5\}, \{2, 5\}, 1\}, 2, \{4, 7\}, \varnothing\}$, $E = \{0, \{1\}\}$, $F = \{0, \lvert -1 \rvert, \{11, 0\}\}$, $G = \{\{1\}, \{0\}, -1\}$, $H = \{1\}$, $I = \varnothing$, $J = \{1, 3, 0, \varnothing\}$, $K = \{3, \{1, \{3\}\}\}$, $L = \{\{2, 0\}, 1 + \cos\dfrac{\pi}{2}\}$, $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \ln\lvert -1 - z \rvert,\ z \in \mathbb{N}\}$, $N = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \lvert k + 2 \rvert - k,\ k = -4, 3, \ldots, 3, 4\}$, $O = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/x = 0\}$, $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \arccos k,\ k \in \{-1, 1\}\}$, $R = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 5\}$, $S = \{2, -6, 10, -14\}$, $T = \{0, 1\}$

Таблица 3.4 – Условие для пункта «в» задания 3

№	**Отношения принадлежности**
1	2
1	$0 \in E$, $\varnothing \in B$, $7 \in D$, $2 \in A$, $\{2\} \in C$, $0 \in I$, $I \in B$, $I \in J$, $\{7\} \in D$, $\{7\} \in C$, $H \in F$, $H \in G$
2	$\{\varnothing\} \in E$, $\varnothing \in B$, $\{4\} \in D$, $3 \in A$, $\varnothing \in C$, $\{1\} \in L$, $L \in B$, $L \in K$, $\{4\} \in D$, $3 \in I$, $G \in I$, $2 \in K$

Продолжение таблицы 3.4

1	2
3	$\{\varnothing\}\in E$, $\varnothing\in F$, $\{1\}\in K$, $\varnothing\in G$, $1\in B$, $0\in L$, $K\in F$, $K\in L$, $\{2\}\in D$, $2\in E$, $G\in L$, $K\in H$
4	$\{0\}\in E$, $\varnothing\in B$, $0\in D$, $2\in A$, $\{7\}\in C$, $0\in H$, $I\in B$, $H\in B$, $\{7\}\in D$, $\{2\}\in C$, $1\in K$, $I\in G$
5	$\{0\}\in E$, $\varnothing\in B$, $2\in D$, $2^3\in A$, $2\in C$, $0\in H$, $I\in B$, $I\in J$, $\{4\}\in D$, $\{4\}\in C$, $H\in B$, $I\in G$
6	$0\in E$, $0\in E$, $\{2\}\in D$, $0\in C$, $\{0\}\in I$, $I\in B$, $I\in J$, $\{5\}\in D$, $\{7\}\in C$, $H\in F$, $4\in A$, $H\in G$
7	$0\in F$, $\{\varnothing\}\in B$, $4\in C$, $\{7\}\in A$, $\{2\}\in D$, $0\in H$, $I\in B$, $I\in J$, $\{1\}\in D$, $2\in C$, $I\in G$, $H\in B$
8	$0\in E$, $\varnothing\in B$, $7\in D$, $\{5\}\in A$, $2\in C$, $0\in I$, $I\in B$, $H\in J$, $\{5\}\in D$, $3\in C$, $H\in F$, $H\in G$
9	$0\in E$, $1\in B$, $7\in C$, $3^2\in A$, $\{2\}\in D$, $0\in H$, $H\in B$, $I\in J$,$\{3\}\in D$, $2\in C$, $I\in F$, $H\in J$
10	$0\in E$, $\varnothing\in B$, $3\in D$, $6\in A$, $\{0\}\in I$, $I\in B$, $I\in J$, $\{1\}\in D$, $\{0\}\in C$, $H\in F$, $H\in G$
11	$0\in G$, $\{\varnothing\}\in B$, $3\in D$, $\{6\}\in A$, $2\in C$, $\{0\}\in H$, $I\in E$, $H\in J$, $\{5\}\in D$, $0\in C$, $I\in F$, $H\in B$
12	$\{\varnothing\}\in E$, $2\in B$, $0\in D$, $2\in A$, $\{7\}\in C$, $\varnothing\in H$, $I\in B$, $H\in B$, $\{7\}\in D$, $1\in C$, $1\in K$, $I\in G$
13	$0\in E$, $\{\varnothing\}\in B$, $\{2\}\in D$, $1\in A$, $2\in C$, $\varnothing\in H$, $I\in B$, $I\in E$, $\{1\}\in D$, $0\in C$, $I\in G$, $H\in B$
14	$1\in E$, $\varnothing\in B$, $7\in D$, $3\in A$, $\{2\}\in C$, $0\in I$, $I\in B$, $I\in J$, $\{2, 4\}\in D$, $\{6, 2\}\in C$, $H\in F$, $H\in G$
15	$0\in E$, $\{\varnothing\}\in B$, $\{7\}\in C$, $8\in A$, $\{2\}\in D$, $\varnothing\in H$, $H\in B$, $I\in J$, $\{2\}\in D$, $2\in C$, $I\in F$, $H\in J$
16	$0\in E$, $\{\varnothing\}\in B$, $7\in D$, $\{5\}\in A$, $0\in C$, $0\in I$, $I\in B$, $H\in J$, $\{7\}\in D$, $\{3\}\in C$, $H\in F$, $H\in G$
17	$\{0\}\in E$, $\varnothing\in B$, $2\in D$, $2^3\in A$, $\{3\}\in C$, $0\in H$, $I\in B$, $I\in J$, $\{4, 7\}\in D$, $\{2, 7\}\in C$, $H\in B$, $I\in G$
18	$\{\varnothing\}\in E$, $\varnothing\in B$, $\{4\}\in D$, $5\in A$, $\varnothing\in C$, $\{1\}\in L$, $L\in B$, $L\in H$, $\{4\}\in D$, $3\in I$, $G\in I$, $2\in D$
19	$\{\varnothing\}\in E$, $\{11\}\in D$, $\{1\}\in K$, $\varnothing\in G$, $\varnothing\in F$, $0\in L$, $K\in F$, $K\in L$, $\{1\}\in D$, $2\in E$, $G\in L$, $K\in H$
20	$0\in E$, $\varnothing\in B$, $\{7\}\in C$, $5\in A$, $0\in C$, $\{0\}\in I$, $I\in B$, $I\in J$, $\{2, 5\}\in D$, $\{7\}\in C$, $H\in F$, $H\in G$

Таблица 3.5 – Условия для пунктов «г»–«з» задания 3

№	**г**	**е**	**ж**	**з**
1	2	3	4	5
1	A, I, H, M	H, I, S	E	$T\subseteq G$,$H\subseteq B$,$\{0, 1, 2\}\subseteq J$
2	A, E, F, O	L, F, S	G	$T\subseteq J$, $\{\varnothing\}\subseteq B$, $G\subseteq I$
3	A, I, G, N	G, K, S	F	$T\subseteq H$, $\{\varnothing\}\subseteq L$, $\{1\}\subseteq F$
4	A, I, H, M	J, I, S	E	$T\subseteq G$, $H\subseteq B$, $\{-1, 2\}\subseteq K$

Продолжение таблицы 3.5

1	2	3	4	5
5	A, I, H, M	H, I, S	T	$T\subseteq S$, $H\subseteq B$, $\{0, 1, 3\}\subseteq J$
6	A, I, K, N	I, H, S	E	$T\subseteq E$, $H\subseteq B$, $\{0,1\}\subseteq J$
7	A, I, H, O	T, H, S	T	$T\subseteq F$, $H\subseteq B$, $\{0, 1, 4\}\subseteq N$
8	A, I, H, M	I, E, S	J	$T\subseteq E$, $H\subseteq B$, $\{2, \{1\}, 0\}\subseteq J$
9	A, I, H, O	S, I, H	E	$T\subseteq G$, $I\subseteq D$, $\{0, 1, 2\}\subseteq J$
10	A, I, H, M	S, I, T	E	$T\subseteq F$, $I\subseteq C$, $\{1, 2, 3\}\subseteq J$
11	A, L, H, P	I, S, H	T	$T\subseteq F$, $I\subseteq \mathrm{B}$, $\{-1, -2, -3\}\subseteq J$
12	A, K, H, M	T, H, S	E	$T\subseteq G$, $I\subseteq D$, $\{1, -1\}\subseteq J$
13	A, L, H, M	I, H, S	I	$T\subseteq J$, $I\subseteq F$, $\{1, 0, 3\}\subseteq J$
14	A, I, H, M	T, S, I	E	$T\subseteq G$, $I\subseteq B$, $\{1, 0\}\subseteq J$
15	A, I, H, M	E, H, S	T	$T\subseteq F$, $H\subseteq B$, $\{1, 2, 3\}\subseteq J$
16	A, I, H, N	E, I, S	J	$T\subseteq G$, $I\subseteq B$, $\{1, 2\}\subseteq J$
17	A, I, H, P	S, H, T	T	$T\subseteq F$, $I\subseteq B$, $\{1, 2\}\subseteq K$
18	A, I, F, M	F, L, S	G	$T\subseteq J$, $L\subseteq B$, $\{2, 1\}\subseteq G$
19	A, K, G, N	K, G, S	T	$T\subseteq H$, $K\subseteq L$, $\{-1, 1\}\subseteq I$
20	A, I, H, N	H, I, S	H	$T\subseteq J$, $E\subseteq G$, $\{1, 2, 3\}\subseteq J$

Задание 4. Проверить с помощью диаграмм Эйлера – Венна, справедливо ли свойство, указанное в таблице 3.6.

Таблица 3.6 – Свойства операций над множествами

№	**Свойство**
1	2
1	Ассоциативность операции симметрической разности
2	Дистрибутивность слева операции пересечения относительно операции разности
3	Дистрибутивность справа операции разности относительно операции пересечения
4	Дистрибутивность слева операции разности относительно операции симметрической разности
5	Дистрибутивность слева операции симметрической разности относительно операции пересечения
6	Ассоциативность операции разности
7	Дистрибутивность справа операции разности относительно операции симметрической разности
8	Дистрибутивность справа операции объединения относительно операции разности

Продолжение таблицы 3.6

1	2
9	Дистрибутивность слева операции разности относительно операции объединения
10	Дистрибутивность слева операции симметрической разности относительно операции разности
11	Дистрибутивность справа операции симметрической разности относительно операции объединения
12	Дистрибутивность справа операции объединения относительно операции симметрической разности
13	Дистрибутивность слева операции разности относительно операции пересечения
14	Дистрибутивность справа операции разности относительно операции объединения
15	Дистрибутивность справа операции симметрической разности относительно операции пересечения
16	Дистрибутивность слева операции объединения относительно операции пересечения
17	Дистрибутивность справа операции пересечения относительно операции объединения
18	Дистрибутивность слева операции симметрической разности относительно операции объединения
19	Дистрибутивность слева операции пересечения относительно операции симметрической разности
20	Дистрибутивность справа операции симметрической разности относительно операции разности

Задание 5. Упростить выражения, указанные в таблице 3.7, символьными преобразованиями (с помощью свойств операций над множествами).

Таблица 3.7 – Выражения для упрощения

№	**Выражения**
1	2
1	$(A\setminus C\cup A\cap C\cup B\setminus A\cup C\setminus B\setminus A\cup\overline{A\otimes B})\cap(\bar{C}\cap B\cup A\cap(B\cup C))$
2	$(\bar{A}\cap C\cup(C\cup A)\cap B)\cap(\overline{C\otimes B})\cup A\cap C\cup A\setminus C\cup C\setminus A\cup B\setminus A\setminus C)$
3	$(A\setminus B\setminus C\cup A\cap C\cup B\setminus C\cup C\setminus A\cup\overline{A\otimes C})\cap(\bar{A}\cap(B\cap C)\cup B\cap\bar{C})$
4	$(A\cap\bar{C}\cup B\cap(C\cup A))\cap(A\cap B\cup A\setminus B\cup\overline{A\otimes C}\cup B\setminus A\cup C\setminus B\setminus A)$
5	$(\overline{C\cup B}\cup A\cap B\cup B\setminus A\cup C\setminus B\cup A\setminus B\setminus C)\cap(B\cap(C\cup\bar{A})\cup C\cap A)$
6	$(\bar{A}\cap(B\cup\bar{C})\cup B\cap C)\cap(A\cap B\cup A\setminus B\cup B\setminus A\setminus C\cup\overline{A\cup C\cup B}\cup C\setminus A)$
7	$(C\setminus B\setminus A\cup C\cap B\cup A\setminus B\cup B\setminus C\cup\overline{A\cup B})\cap(A\cap B\cup C\cap(\bar{B}\cup A))$
8	$((\bar{A}\cup \mathrm{B})\cap\bar{C}\cup B\cap A)\cap(C\cap B\cup A\setminus C\cup C\setminus B\cup B\setminus A\setminus C\cup\overline{A\setminus B})$

Продолжение таблицы 3.7

1	2
9	$(\overline{A\setminus C}\cup C\cap B\cup B\setminus C\cup C\setminus B\cup A\setminus B\setminus C)\cap(\bar{A}\cap(C\cup B)\cup C\cap\bar{B})$
10	$(A\cap(C\cup\bar{B})\cup C\cap B)\cap(A\otimes B\cup A\cap B\cup C\setminus B\setminus A\cup\bar{B})$
11	$(A\cap C\cup B\setminus A\setminus C\cup\bar{A}\cup A\Delta C)\cap(B\cap(\bar{C}\cup\bar{A})\cup\bar{C}\cap\bar{A})$
12	$(\bar{A}\cap\bar{B}\cup C\cap(B\cup\bar{A}))\cap(C\otimes B\cup C\cap B\cup\bar{C}\cup A\setminus B\setminus C)$
13	$((C\cup B)\setminus A\cup A\cap C\cup A\setminus C\cup\overline{C\otimes B})\cap(A\cap C\cup\bar{B}\cap(\bar{C}\cup A))$
14	$(\bar{B}\cap(\bar{C}\cup A)\cup\bar{C}\cap\bar{A})\cap(\overline{B\setminus A}\cup(C\cup B)\setminus A\cup A\cap B\cup A\setminus B)$
15	$((A\cup C)\setminus B\cup C\cap B\cup B\setminus C\cup\overline{C\setminus A})\cap(\bar{A}\cap(\bar{B}\cup C)\cup\bar{B}\cap\bar{C})$
16	$((C\cup A)\cap\bar{B}\cup A\cap\bar{C})\cap(A\cap B\cup(A\cup C)\setminus B\cup\overline{B\setminus C}\cup B\setminus A)$
17	$((A\cup B)\setminus C\cup A\cap C\cup C\setminus A\cup\overline{A\otimes B}))\cap(\bar{B}\cap(\bar{C}\cup\bar{A})\cup\bar{C}\cap A)$
18	$(\bar{A}\cap(\bar{B}\cup\bar{C})\cup\bar{B}\cap C)\cap(\overline{C\otimes B})\cup(A\cup B)\setminus C\cup C\cap B\cup C\setminus B)$
19	$(B\setminus C\cup\overline{C\otimes B})\cup\overline{A\cup B}\cup(A\cap C)\setminus B)\cap((\bar{B}\cup A)\cap\bar{C}\cup A\cap B)$
20	$(\bar{B}\cap(C\cup A)\cup C\cap\bar{A})\cap((A\cap B)\setminus C\cup\overline{C\otimes A})\cup C\setminus A\cup\overline{C\cup B})$

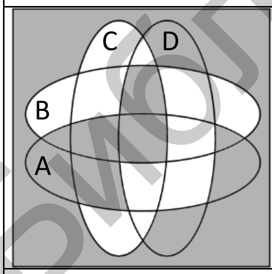
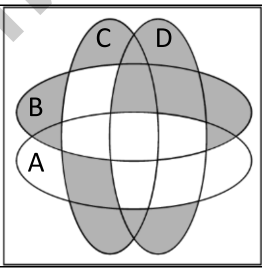
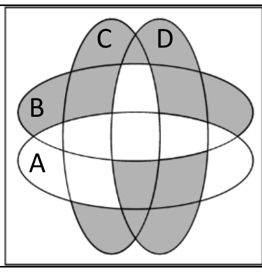
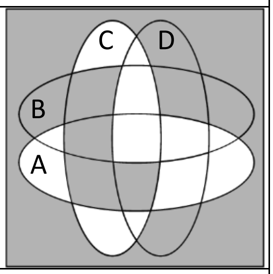
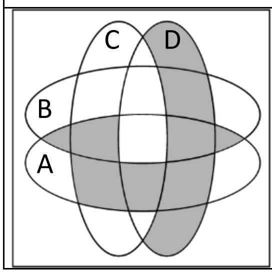
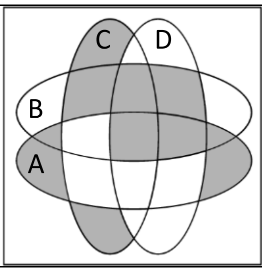
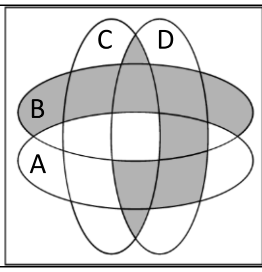
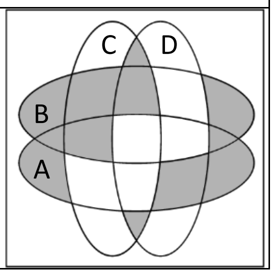
Задание 6. На диаграмме Эйлера – Венна эллипсами представлены четыре множества (таблица 3.8). Требуется:

1) записать выражение, описывающее закрашенную на диаграмме область;

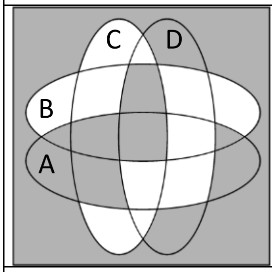
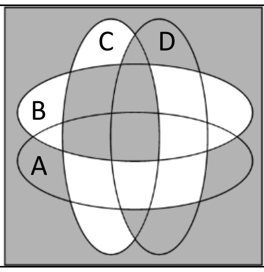
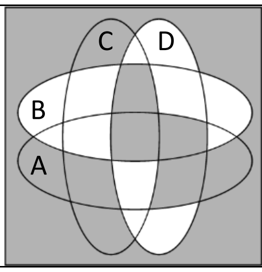
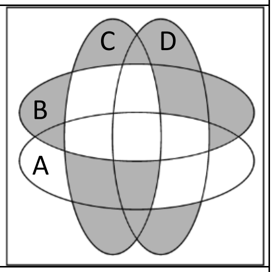
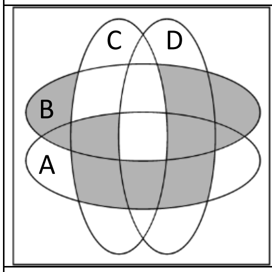
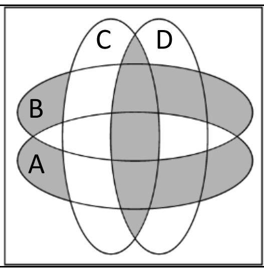
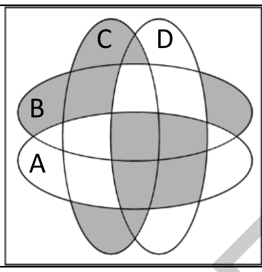
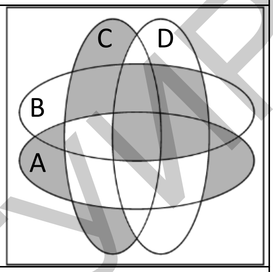
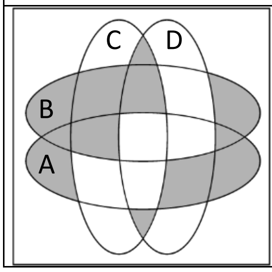
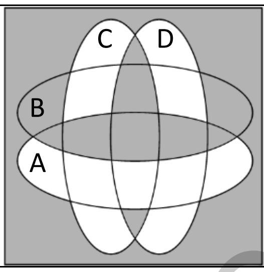
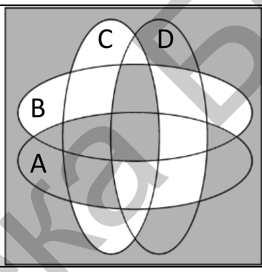
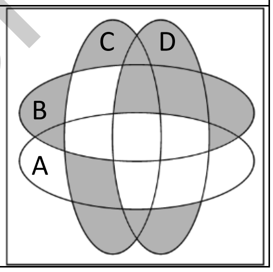
2) упростить полученное выражение;

3) проверить результат, построив диаграмму Эйлера – Венна для упрощенного выражения.

Таблица 3.8 – Диаграммы Эйлера – Венна

1	**2**	**3**	**4**
			
5	**6**	**7**	**8**
			

Продолжение таблицы 3.8

9	10	11	12
			
13	**14**	**15**	**16**
			
17	**18**	**19**	**20**
			

Задание 7. На множестве A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} задано фактор-множество A/R (таблица 3.9). Построить соответствующее этому фактор-множеству отношение эквивалентности R.

Таблица 3.9 – Фактор-множества

№	*A*/*R*	№	*A*/*R*
1	2	3	4
1	{{1, 2}, {5, 3}, {4, 6}}	**11**	{{1}, {5}, {2, 4, 3}, {6}}
2	{{1, { 2}, {5, 3}, {4, 6}}	**12**	{{4, 2, 5, 6}, {3}, {1}}
3	{{1, 2, 6}, {5, 3}, {4}}	**13**	{{1}, {2, 3, 5}, {4, 6}}
4	{{1, 2}, {5},{ 3}, {4, 6}}	**14**	{{2, 3, 6}, {1, 4, 5}}
5	{{4}, {2}, {5, 3, 1, 6}}	**15**	{{1, 3}, {4, 5}, {2, 6}}
6	{{1, 2, 5}, {3}, {4}, {6}}	**16**	{{2}, {1, 4}, { 6}, {3, 5}}
7	{{1, 3, 5}, {2, 4, 6}}	**17**	{{1, 3, 6}, {2}, {4}, {5}}

Продолжение таблицы 3.9

1	2	3	4
8	{{1, 2}, {4}, {3}, {5, 6}}	**18**	{{4, 5, 6}, {1, 2, 3}}
9	{{2, 3}, {1, 6, 4}, {5}}	**19**	{{1, 2, 3}, {4, 5}, {6}}
10	{{1, 5}, {2, 6}, {3, 4}}	**20**	{{6}, {2, 3, 4, 5}, {1}}

Задание 8. Даны множества $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и соответствия $Q_i \subseteq X \times Y$, $i = 1, 2, 3, 4$ (таблица 3.10). Определить, каким является каждое из заданных соответствий Q_i ($i = 1, \ldots, 4$): всюду определенным, сюръективным, функциональным, инъективным, биективным. Затем для каждого из соответствий Q_i ($i = 1, \ldots, 4$) с учетом его свойств выполнить следующее:

1) если соответствие Q_i всюду определено, функционально, но не инъективно, то построить разбиение области определения соответствия на классы эквивалентности по отношению P: «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат прообразу одного и того же элемента»;

2) если соответствие Q_i сюръективно, инъективно, но не функционально, то построить разбиение области значений соответствия на классы эквивалентности по отношению R: «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат образу одного и того же элемента».

Таблица 3.10 – Соответствия Q_1, Q_2, Q_3, Q_4

№	Соответствия
1	2
1	Q_1 = {(1, 2), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (2, 3)}, Q_2 = {(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2)}, Q_3 = {(1, 2), (2, 3), (4, 1), (5, 4), (3, 5)}, Q_4 = {(2, 3), (4, 5), (5, 5), (3, 2), (3, 4)}
2	Q_1 = {(3, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (5, 5)}, Q_2 = {(2, 2), (2, 5), (1, 4), (3, 4), (3, 3)}, Q_3 = {(5, 2), (3, 4), (4, 5), (2, 4), (1, 5)}, Q_4 = {(2 ,5), (5, 1), (4, 4), (3, 2), (1, 3)}
3	Q_1 = {(2, 2), (4, 3), (5, 4), (1, 1), (3, 5)}, Q_2 = {(1, 3), (3, 4), (2, 5), (5, 3), (4, 4)}, Q_3 = {(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (3, 3)}, Q_4 = {(1, 3), (2, 2), (5, 3), (4, 5), (2, 3)}
4	Q_1 = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (3, 1)}, Q_2 = {(1, 2), (4, 4), (5, 5), (2, 3), (3, 1)}, Q_3 = {(1, 2), (1, 4), (4, 3), (3, 5), (2, 2)}, Q_4 = {(1, 3), (2, 4), (5, 5), (3, 4), (4, 5)}

Продолжение таблицы 3.10

1	2
5	$Q_1 = \{(1, 2), (2, 3), (4, 4), (5, 5), (3, 5)\}$, $Q_2 = \{(5, 1), (3, 4), (1, 2), (2, 3), (4, 5)\}$, $Q_3 = \{(2, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (4, 3)\}$, $Q_4 = \{(3, 2), (2, 4), (2, 5), (3, 5), (1, 5)\}$
6	$Q_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 1), (4, 5)\}$, $Q_2 = \{(4, 2), (3, 3), (1, 4), (5, 2), (1, 3)\}$, $Q_3 = \{(1, 2), (2, 4), (1, 5), (3, 3), (3, 1)\}$, $Q_4 = \{(1, 3), (2, 4), (3, 4), (5, 5), (4, 5)\}$
7	$Q_1 = \{(2, 3), (4, 3), (2, 1), (3, 5), (1, 4)\}$, $Q_2 = \{(2, 1), (1, 2), (3, 3), (5, 4), (4, 5)\}$, $Q_3 = \{(2, 2), (1, 4), (5, 5), (3, 4), (4, 5)\}$, $Q_4 = \{(1, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 1), (4, 2)\}$
8	$Q_1 = \{(1, 2), (4, 2), (3, 1), (2, 5), (4, 4)\}$, $Q_2 = \{(1, 3), (5, 2), (5, 5), (2, 4), (3, 1)\}$, $Q_3 = \{(1, 2), (2, 4), (5, 5), (3, 5), (4, 5)\}$, $Q_4 = \{(2, 4), (1, 5), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$
9	$Q_1 = \{(5, 2), (5, 5), (4, 1), (2, 4), (1, 3)\}$, $Q_2 = \{(1, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 2), (2, 1)\}$, $Q_3 = \{(4, 3), (1, 3), (5, 4), (2, 5), (3, 3)\}$, $Q_4 = \{(1, 4), (4, 3), (3, 5), (2, 2), (2, 3)\}$
10	$Q_1 = \{(2, 4), (1, 4), (3, 2), (4, 5), (5, 4)\}$, $Q_2 = \{(2, 2), (5, 2), (4, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, $Q_3 = \{(2, 3), (3, 2), (1, 4), (3, 1), (4, 5)\}$, $Q_4 = \{(5, 2), (1, 3), (2, 5), (4, 1), (3, 4)\}$
11	$Q_1 = \{(2, 5), (5, 1), (3, 4), (4, 2), (1, 3)\}$, $Q_2 = \{(5, 4), (1, 3), (4, 2), (2, 3), (3, 3)\}$, $Q_3 = \{(1, 2), (1, 5), (3, 4), (5, 1), (2, 3)\}$, $Q_4 = \{(5, 3), (2, 3), (4, 1), (3, 1), (2, 2)\}$
12	$Q_1= \{(5, 3), (3, 5), (4, 2), (2, 1), (1, 4)\}$, $Q_2 = \{(2, 3), (5, 4), (4, 5), (1, 5), (3, 5)\}$, $Q_3= \{(1, 2), (2, 5), (3, 1), (4, 4), (4, 3)\}$, $Q_4 = \{(1, 4), (1, 2), (1, 5), (2, 5), (3, 3)\}$
13	$Q_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 5)\}$, $Q_2 = \{(5, 2), (2, 5), (4, 1), (3, 4), (1, 2)\}$, $Q_3 = \{(5, 2), (3, 3), (2, 3), (1, 4), (1, 3)\}$, $Q_4 = \{(3, 4), (2, 5), (5, 3), (1, 5), (4, 5)\}$
14	$Q_1 = \{(1, 2), (5, 3), (2, 4), (4, 4), (3, 5)\}$, $Q_2 = \{(1, 2), (1, 1), (1, 5), (3, 3), (4, 4)\}$, $Q_3 = \{(4, 2), (5, 1), (1, 4), (3, 3), (2, 5)\}$, $Q_4 = \{(2, 2), (4, 2), (1, 4), (3, 2), (4, 1)\}$
15	$Q_1 = \{(4, 3), (1, 1), (5, 4), (2, 5), (3, 2)\}$, $Q_2 = \{(4, 3), (1, 4), (3, 5), (5, 5), (2, 5)\}$, $Q_3 = \{(4, 3), (2, 4), (4, 5), (4, 1), (1, 4)\}$, $Q_4 = \{(1, 5), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2)\}$
16	$Q_1 = \{(1, 4), (4, 1), (3, 5), (2, 2), (5, 3)\}$, $Q_2 = \{(1, 2), (1, 1), (2, 3), (2, 5), (2, 4)\}$, $Q_3 = \{(2, 2), (4, 4), (5, 3), (3, 4), (1, 5)\}$, $Q_4 = \{(3, 1), (2, 4), (3, 5), (4, 2), (5, 5) \}$
17	$Q_1 = \{(1, 4), (1, 2), (1, 5), (2, 1), (3, 3)\}$, $Q_2 = \{(1, 1), (2, 4), (3, 2), (1, 5), (4, 1)\}$, $Q_3= \{(2, 3), (5, 2), (1, 4), (3, 1), (4, 5)\}$, $Q_4 = \{(3, 4), (5, 5), (4, 3), (2, 5), (1, 5)\}$

Продолжение таблицы 3.10

1	2
18	Q_1 = {(5, 2), (4, 3), (3, 4), (1, 5), (2, 5)}, Q_2 = {(2, 1), (1, 4), (3, 2), (4, 5), (5, 3)}, Q_3 = {(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 5), (4, 4)}, Q_4 = {(2, 3), (4, 1), (5, 2), (3, 4), (3, 3)}.
19	Q_1 = {(3, 5), (4, 2), (1, 5), (4, 3), (2, 2)}, Q_2 = {(4, 3), (1, 4), (2, 3), (5, 4), (3, 5)}, Q_3 = {(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 5), (3, 2)}, Q_4 = {(5, 4), (1, 3), (4, 2), (2, 5), (3, 1)}.
20	Q_1 = {(5, 2), (1, 3), (4, 4), (2, 4), (3, 5)}, Q_2 = {(2, 4), (5, 1), (4, 3), (2, 4), (5, 2)}, Q_3 = {(5, 2), (1, 5), (3, 4), (4, 1), (2, 3)}, Q_4 = {(1, 4), (1, 1), (2, 2), (2, 5), (4, 3)}.

Задание 9*. Дан универсум X = {1, 2, 3, 4, 5, 6 ,7 ,8, 9, 10} и нечеткие множества A, B, C, что $A = \{(x/\mu_A(x))|x\in X\}$, $B = \{(x/\mu_B(x))|x\in X\}$, $C = \{(x/\mu_C(x))|x\in X\}$. Требуется найти значение заданного выражения E (таблица 3.11).

Таблица 3.11 – Задание нечетких множеств

№	***X***	**Выражение для *X***	**№**	***X***	**Выражение для *X***
1	2	3	4	5	6
1	*A*	{(2/0,4), (3/0,1), (5/0,6)}	**2**	*A*	{(1/0,8), (6/0,5), (8/0,2), (9/1)}
	B	{(1/1), (3/0,8), (7/1), (10/0,9)}		*B*	{(3/0,7), (4/0,5), (9/0,7)}
	C	{(2/0,4), (9/0,1)}		*C*	{(5/0,6), (6/1), (7/0,9), (8/0)}
	E	$(A\otimes B)\cap\bar{C}$		*E*	$(A\backslash\bar{B})\cap C$
3	*A*	{(1/0,8), (3/1), (7/0,5), (6/1)}	**4**	*A*	{(2/0,7), (4/0,7), (6,0,8)}
	B	{(2/0,4), (3/0,2), (10/0,1)}		*B*	{(2/0,5), (4/0,9), (9/0,1)}
	C	{(4/0,4), (5/0), (9/0,1)}		*C*	{(3/0,3), (4/1), (7/0,2)}
	E	$(\bar{A}\cap B)\backslash C$		*E*	$(A\cup B)\otimes\bar{C}$
5	*A*	{(7/0,8), (8/0,1), (9/0,7), (10/1)}	**6**	*A*	{(2/0,6), (3/0,7), (6/0,4), (9/1)}
	B	{(5/0,6), (6/0,2), (8/1), (9/1)}		*B*	{(3/0,6), (5/0,2), (9/0,3)}
	C	{(1/0,2), (8/0,7), (9/0,7)}		*C*	{(4/1), (5/0,4), (7/0,1), (9/0,1)}
	E	$(A\backslash B)\cup\bar{C}$		*E*	$(\bar{A}\cap B)\otimes C$
7	*A*	{(2/0,8), (6/0,7), (10/0,9)}	**8**	*A*	{(1/0,5), (3/0,8), (5/1), (6/1)}
	B	{(4/0,5), (7/1), (8/0,05)}		*B*	{(2/0,5), (4/1), (6/1), (7/0,7)}
	C	{(6/1), (7/0,9), (8/0,1), (10/1)}		*C*	{(1/0,6), (6/0,5), (7/0,9), (9,1)}
	E	$(A\cup\bar{B})\backslash C$		*E*	$(A\otimes\bar{B})\backslash C$
9	*A*	{(6/0,5), (7/1), (8/0,2), (10/1)}	**10**	*A*	{(1/0,2), (4/1), (5/0,6), (7/0,9)}
	B	{(3/0,1), (4/0,2), (6/1), (8/0,5)}		*B*	{(9/0,1), (10/0,9)}
	C	{(2/0,8), (7/0,9)}		*C*	{(1/0,8), (5/0,8), (7/0,25)}
	E	$\bar{A}\otimes(B\cup C)$		*E*	$A\backslash(\bar{B}\cap C)$

Продолжение таблицы 3.11

1	2	3	4	5	6
11	*A*	{(4/1), (7/0,85), (8/0,15), (9/1)}	**12**	*A*	{(2/0,7), (5/0,5), (7/1), (8/0,1)}
	B	{(1/0,8), (2/0,01), (4/1), (9/0)}		*B*	{(1/0,3), (5/0,5), (9/1), (10/1)}
	C	{(5/0,8), (6/0,2), (8/0,6), (10/1)}		*C*	{(2/0), (4/0,7), (9/1), (10/1)}
	E	$\bar{A}\cup(B\setminus C)$		*E*	$A\otimes(B\cup\bar{C})$
13	*A*	{(4/1), (7/0,2), (9/0,5)}	**14**	*A*	{(2/0,6), (3/1), (4/1), (5/0,7)}
	B	{(3/0,4), (6/1), (7/1), (8/0,9)}		*B*	{(2/1), (3/1), (5/0,02)}
	C	{(5/0,5), (6/0,6), (7/1)}		*C*	{(6/0,8), (8/0,5), (9/0,1)}
	E	$(\bar{A}\otimes B)\setminus C$		*E*	$(A\cup\bar{B})\otimes C$
15	*A*	{(1/0,5), (5/0,9), (7/0), (8/1)}	**16**	*A*	{(4/0,5), (6/0,1), (8/1), (9/0,8)}
	B	{(6/0,2), (8/0,4), (10/1)}		*B*	{(1/1), (2/1), (3/0,5), (8/0,2)}
	C	{(2/0,7), (4/0,6), (7/0,1), (8/1)}		*C*	{(2/0,3), (3/1), (7/0), (8/0,08)}
	E	$A\cap(\bar{B}\otimes C)$		*E*	$(A\setminus\bar{B})\cap C$
17	*A*	{(1/1), (4/0,5), (6/1), (10/0,5)}	**18**	*A*	{(2/0,7), (3/0,4), (8/1), (9/0,5)}
	B	{(9/0,5), (10/0,5)}		*B*	{(2/0,5), (4/1), (5/1), (6/1)}
	C	{(3/0,6), (5/0,2), (7/1), (8/0,4)}		*C*	{(1/0,07), (7/0,5)}
	E	$(\bar{A}\otimes B)\cap C$		*E*	$A\cap(\bar{B}\cup C)$
19	*A*	{(1/0,7), (2/0,8), (9/1), (10/1)}	**20**	*A*	{(5/0,1), (7/0,9), (8/0,1), (9/1)}
	B	{(2/0,8), (6/0,5), (7/1), (8/0,9)}		*B*	{(2/0,1), (5/0,8), (6/1), (9/0,5)}
	C	{(4/0,8), (6/0,5), (7/0,1), (8/1)}		*C*	{(6/0,2), (7/0,2), (8/0,9)}
	E	$\bar{A}\otimes(B\cap C)$		*E*	$(A\cap\bar{B})\setminus C$

Задание 10. На множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ заданы бинарные отношения R, S, $Q \subseteq A^2$. Определить, какими из свойств (см. таблицу 2.1) обладает отношение R. Найти отношение S, заданное выражением (таблица 3.12), если Q: «$a \geq b$».

Таблица 3.12 – Бинарные отношения

№	***R***	***S***
1	2	3
1	$\mid a - b \mid \leq 1$	$R\cap Q$
2	$a + b$ – четное число	$R\cup Q$
3	$0 < a - b < 3$	$Q^{-1}\cap R$
4	$a \geq b^2$	$R\setminus Q^{-1}$
5	НОД$(a, b) = 1$	$Q^{-1}\setminus R$
6	$\mid 2^a - 2^b \mid < 8$	$R^{-1}\cap Q$
7	$a \leq (b/2)$	$R\circ Q$
8	$a + b$ – нечетное число	$R\setminus Q$
9	$\mid a - b \mid > 1$	$Q\setminus R$

Продолжение таблицы 3.12

1	2	3
10	НОД(a, b^2) = 1	$R \cup Q$
11	$a \le b$	$Q^{-1} \cap R$
12	$1 < a - b < 4$	$R \circ Q$
13	$a^2 + b^2 < 18$	$R \setminus Q$
14	$2a + b$ – четное число	$Q^{-1} \cap R$
15	$2^{a-b} \ge 1$	$R^{-1} \cup Q$
16	$\mid a^2 - b \mid$ – простое число	$Q^{-1} \setminus R$
17	$\mid 2a - b \mid < 3$	$R \circ Q$
18	$a + 2b$ – нечетное число	$R^{-1} \cap Q$
19	$a \le b - a$	$Q^{-1} \cap R$
20	$a + b$ – простое число	$R \cup Q$

Список использованных источников

1 Шевелёв, Ю. П. Дискретная математика. В 2 ч. Ч. 1: Теория множеств. Булева алгебра (Автоматизированная технология обучения «Символ») : учеб. пособие / Ю. П. Шевелёв. – Томск : Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2003. – 118 с.

2 Закревский, А. Д. Основы логического проектирования. В 3 кн. Кн. 1 : Комбинаторные алгоритмы дискретной математики / А. Д. Закревский, Ю. В. Поттосин, Л. Д. Черемисинова. – Минск : ОИПИ НАН Беларуси, 2004. – 226 с.

3 Алексеев, В. Е. Сборник задач по дискретной математике / В. Е. Алексеев, Л. Г. Киселёва, Е. Г. Смирнова. Электронное учеб.-метод. пособие. – Нижний Новгород : Нижегородский госуниверситет, 2012. – 80 с.

4 Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов / Р. Хаггарти. – 2-е изд., испр. – М. : Техносфера, 2012. – 400 с.

5 Новиков, Ф. А. Дискретная математика : учебник для вузов / Ф. А. Новиков. – СПб. : Питер, 2011. – 384 с.

6 Скуратович, Е. А. Дискретная математика : учеб. пособие / Е. А. Скуратович, В. А. Иванюкович. – Минск : Акад. упр. при Президенте Респ. Беларусь, 2013. – 287 с.

7 Чередникова, А. В. Дискретная математика : Теория и практика / А. В. Чередникова, О. Б. Садовская, Л. А. Каминская. – Кострома : Изд-во Костром. гос. технол. ун-та, 2001. – 74 с.

8 Ануфриенко, С. А. Введение в теорию множеств и комбинаторику : учеб. пособие / С. А. Ануфриенко. – Екатеринбург : УрГУ, 1998. – 62 с.

9 Булгакова, И. Н. Дискретная математика, элементы теории, задачи и упражнения. В 2 ч. Ч. 1 : учеб. пособие для вузов / И. Н. Булгакова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Воронеж : Изд-во ВГУ, 2008. – 64 с.

10 Конышева, Л. К. Основы теории нечетких множеств : учеб. пособие / Л. К. Конышева, Д. М. Назаров. – СПб. : Питер, 2011. – 192 с.

11 Вятченин, Д. А. Нечеткая кластеризация и нечеткая математическая морфология в задачах обработки изображений / Д. А. Вятченин, А. В. Хижняк, А. В. Шевяков. – Минск : ВА РБ, 2012. – 271 с.

12 Принцип Дирихле. Учебное издание. Сер. А: Математика. Вып. 1 / А. А. Андреев [и др.]. – Самара : Пифагор, 1997. – 22 с.

Св. план 2019, поз. 32

Учебное издание

Петюкевич Наталья Станиславовна
Тузик Ирина Владимировна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА: ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ И ОТНОШЕНИЙ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *Е. С. Юрец*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет *Е. Г. Бабичева*

Подписано в печать 20.05.2019. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс». Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 4,3. Уч.-изд. л. 4,4. Тираж 70 экз. Заказ 2.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014, №2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск