

# Особенности формирования передаточных функций для обеспечения желаемых показателей качества

Лапето А. В.

Кафедра автоматизации производственных процессов и электротехники  
Белорусский государственный технологический университет  
Минск, Республика Беларусь  
e-mail: avlapeto@gmail.com

**Аннотация**—Рассматривается синтез передаточной функции, обеспечивающей желаемые показатели качества переходного процесса системы автоматического управления.

**Ключевые слова:** передаточная функция, дифференциальное уравнение, показатели качества, перерегулирование.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Значительное место в современной теории автоматического управления занимают методы модального управления. В связи с развитием средств вычислительной техники и математических пакетов программного обеспечения эта область развивается особо активно[1].

## II. ФОРМИРОВАНИЕ ЖЕЛАЕМОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ

В настоящее время наиболее широко используются такие показатели качества систем управления как перерегулирование, показатель колебательности, степень затухания, установившаяся ошибка и др. Однако синтезировать систему управления возможно лишь задавая некоторыми из них. Использование перерегулирования в качестве требования к системе управления сопряжено с определенными трудностями.

Рассмотрим вариант синтеза желаемой передаточной функции, на основе желаемого показателя перерегулирования:

$$\sigma_{\text{жел}} = \frac{y_{\text{max,жел}} - y_{\text{уст,жел}}}{y_{\text{уст,жел}}}, \quad (1)$$

где  $y_{\text{max,жел}}$  и  $y_{\text{уст,жел}}$  – желаемые максимальное и установившееся значения переходного процесса системы.

Любая одноканальная система управления может быть описана передаточной функцией вида [2]:

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{B(p)}{A(p)}, \quad (2)$$

Где  $a_j, b_j$  – коэффициенты;  $p$  – оператор Лапласа.

Рассмотрим реакцию системы управления на единичное ступенчатое воздействие, поданное на вход системы. Согласно теореме разложения переходная характеристика будет иметь вид:

$$y(t) = y(0) + \sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)}{A'(p_i)} e^{p_i t}, \quad (3)$$

где  $p_i$  – корни характеристического уравнения системы.

На первом этапе формирования желаемой передаточной функции будем рассматривать произвольную передаточную функцию, имеющую одинаковую структуру с передаточной функцией желаемой системы управления.

Пусть система управления описывается произвольной передаточной функцией второго порядка:

$$W(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}; \quad (4)$$

Изображение реакции такой системы на единичное ступенчатое воздействие, поданное на вход системы:

$$y(p) = W(p) \frac{1}{p} = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^3 + a_1 p^2 + a_0 p}; \quad (5)$$

Очевидно, что один из корней характеристического уравнения должен равняться нулю. Чтобы система управления обладала перерегулированием также необходимо наличие комплексно сопряженных корней характеристического уравнения системы:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{\text{св}},$$

$$p_3 = 0; \quad (6)$$

Размер мнимой и действительной части этих корней выбирается либо произвольно, либо из соображения обеспечения желаемого времени регулирования и степени затухания. Коэффициенты полинома знаменателя рассчитываются исходя из заданных корней.

В этом случае теорему разложения можно представить в следующем виде:

$$y(t) = \frac{b_0}{a_0} + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{B(p_i)}{A'(p_i)} e^{p_i t} \right) =$$

$$= \frac{b_0}{a_0} + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{c_1 + j d_1}{c_2 + j d_2} e^{(-\delta + j\omega_{\text{св}}) t} \right) =$$

$$= \frac{b_0}{a_0} + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{F_1}{F_2} \cdot e^{(\alpha_1 - \alpha_2) t} \cdot e^{-\delta t} \cdot e^{j\omega_{\text{св}} t} \right) =$$

$$= \frac{b_0}{a_0} + 2 \frac{F_1}{F_2} \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{св}} t - (\alpha_1 - \alpha_2)); \quad (7)$$

$$F_1 = \sqrt{c_1^2 + d_1^2}; F_2 = \sqrt{c_2^2 + d_2^2};$$

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}(d_1 / c_1); \alpha_2 = \operatorname{arctg}(d_2 / c_2), \quad (8)$$

где  $c_1, c_2, d_1, c_2$  - результаты вычисления при подстановке одного из корней в выражение  $B(p)/A'(p)$ .

Возьмем производную по времени от (7):

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\delta 2 \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega_{св} t - (\alpha_1 - \alpha_2)) + (-\omega_{св} 2 \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega_{св} t - (\alpha_1 - \alpha_2))); \quad (9)$$

Для нахождения момента времени достижения первого локального максимума переходной характеристикой (7) приравняем (9) к нулю и найдем решение на отрезке времени  $0 < t < 3/\omega_{св}$ . Подставив найденный момент времени в выражение переходной характеристики можно определить произвольной системы управления.

$$\sigma = \frac{y_{max} - y_{уст}}{y_{уст}} = \frac{\frac{b_0}{a_0} + 2 \frac{F_1}{F_2} \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega_{св} t - (\alpha_1 - \alpha_2)) - y_{уст}}{y_{уст}}; \quad (10)$$

Можно заметить, что в (7) слагаемое  $b_0/a_0$  является выражением для установившегося режима, тогда (10) можно записать в виде:

$$\sigma = \frac{2 \frac{F_1}{F_2} \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega_{св} t - (\alpha_1 - \alpha_2))}{y_{уст}}; \quad (11)$$

Зададим желаемое перерегулирование  $\sigma_{жел}$  для искомой передаточной функции  $W_{жел}(p)$ . Найдем отношение значений перерегулирования для желаемой и рассматриваемой систем:

$$\frac{\sigma_{жел}}{\sigma} = \frac{2 \frac{F_{1,жел}}{F_{2,жел}} \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega_{св} t - (\alpha_{1,жел} - \alpha_{2,жел}))}{y_{уст,жел}} / \frac{2 \frac{F_1}{F_2} \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega_{св} t - (\alpha_1 - \alpha_2))}{y_{уст}}; \quad (12)$$

Для условия сохранения одинакового установившегося режима ( $y_{уст,жел} = y_{уст}$ ) необходимо обеспечить выполнение соотношения:

$$\frac{b_{0,жел}}{a_{0,жел}} = \frac{b_0}{a_0}; \quad (13)$$

Отсюда следует:

$$\frac{\sigma_{жел}}{\sigma} = \frac{2 \frac{F_{1,жел}}{F_{2,жел}} \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega_{св} t - (\alpha_{1,жел} - \alpha_{2,жел}))}{2 \frac{F_1}{F_2} \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega_{св} t - (\alpha_1 - \alpha_2))}; \quad (14)$$

Если для обеспечения желаемого показателя перерегулирования возможно в новой системе оставить прежний знаменатель, тогда сохраняются корни характеристического уравнения и часть выражения для расчета переходной характеристики:

$$\frac{\sigma_{жел}}{\sigma} = \frac{F_{1,жел} \cdot \cos(\omega_{св} t - (\alpha_{1,жел} - \alpha_{2,жел}))}{F_1 \cdot \cos(\omega_{св} t - (\alpha_1 - \alpha_2))}, \quad (15)$$

а при условии сохранения углов  $\alpha_{1,жел} = \alpha_1$ , имеем:

$$\frac{\sigma_{жел}}{\sigma} = \frac{F_{1,жел}}{F_1}; \quad (16)$$

Как видно из (16) желаемое перерегулирование можно обеспечить изменяя  $F_{1,жел}$ :

$$F_{1,жел} = F_1 \frac{\sigma_{жел}}{\sigma}, \quad (17)$$

который в свою очередь зависит от знаменателя передаточной функции:

$$F_{1,жел} = \sqrt{c_{1,жел}^2 + d_{1,жел}^2}; \quad (18)$$

Рассмотрим переходную характеристику в относительных координатах, а для этого примем  $b_{0,жел} = a_0$ :

$$c_{1,жел} + jd_{1,жел} = b_{1,жел}(-\delta + j\omega_{св}) + b_{0,жел} = -\delta \cdot b_{1,жел} + b_{0,жел} + j\omega_{св} b_{1,жел}; \quad (19)$$

$$c_{1,жел} = -\delta \cdot b_{1,жел} + a_0$$

$$d_{1,жел} = \omega_{св} b_{1,жел}; \quad (20)$$

Подставим полученные выражения в (18) имеем:

$$F_{1,жел} = \sqrt{(-\delta \cdot b_{1,жел} + a_0)^2 + (\omega_{св} b_{1,жел})^2}; \quad (21)$$

$$F_{1,жел}^2 = \delta^2 \cdot b_{1,жел}^2 + a_0^2 - 2\delta \cdot b_{1,жел} a_0 + \omega_{св}^2 b_{1,жел}^2 = b_{1,жел}^2 (\delta^2 + \omega_{св}^2) - b_{1,жел} 2\delta a_0; \quad (22)$$

Решив квадратное уравнение (22) можно однозначно определить коэффициент передаточной функции  $b_{1,жел}$  обеспечивающий желаемый показатель перерегулирования  $\sigma_{жел}$ .

При дальнейшем использовании рассмотренного алгоритма, можно расширить размерность желаемой передаточной функции объекта управления введением в его состав инерционных звеньев, обладающих динамиком много меньшей, чем у самого объекта управления.

Выбор корней желаемой передаточной функции объекта управления основан на одновременном обеспечении нескольких показателей качества: желаемое время регулирования – выбором необходимого размера действительной части комплексных корней знаменателя; желаемого показателя затухания – размером мнимой части комплексных корней.

### III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен алгоритм формирования передаточных функций объекта управления исходя из желаемых показателей качества. Согласно этому алгоритму можно одновременно обеспечить несколько показателей качества при формировании желаемой передаточной функции системы управления.

Полученные желаемые передаточные функции могут быть использованы для синтеза систем управления, и в частности для синтеза модальных регуляторов при использовании теории вложения систем.

- [1] Буков, В. Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем / В. Н. Буков. – Калуга: Изд-во научной лит-ры Н. Ф. Бочкаревой, 2006. – 720 с.
- [2] Кузьмицкий, И. Ф. Теория автоматического управления / И. Ф. Кузьмицкий, Г. Т. Кулаков. – Минск: БГТУ, 2010. – 574 с.