УДК 514.76

Н. П. Можей
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ПАРАМИ КИЛЛИНГА

Одной из важных проблем геометрии является задача об установлении связей между кривизной и топологической структурой многообразия. В общем случае задача исследования многообразий различных типов является достаточно сложной. Поэтому естественно рассматривать данную задачу в более узком классе многообразий, например в классе однородных многообразий. В работе приведены результаты по исследованию трехмерных однородных пространств, локально определяемых парами Киллинга. Определены основные понятия – изотропно-точная пара, редуктивное пространство, каноническое разложение, симметрическое пространство, аффинная связность, тензоры кривизны и кручения, форма Киллинга, пара Киллинга. Локальное изучение однородных пространств равносильно исследованию пар, состоящих из алгебры Ли и ее подалгебры. Для каждого однородного пространства найдены в явном виде формы Киллинга, стандартные однородные псевдоримановы метрики, связности Леви-Чивита, тензоры кривизны, алгебры голономии, скалярные кривизны, тензоры Риччи, определено, является ли пространство риччи-плоским, Эйнштейновым, риччи-параллельным, локально-симметрическим, конформно-плоским. Полученные результаты могут найти применение в математике и физике, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях сводятся к изучению инвариантных объектов на однородных пространствах.

Ключевые слова: пара Киллинга, группа преобразований, аффинная связность, форма Киллинга, тензор Риччи.

N. P. Mozhey
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

HOMOGENEOUS SPACES DETERMINED BY KILLING PAIRS

The problem of establishing links between the curvature and the topological structure of a manifold is one of the important problems of geometry. In general, the purpose of the research of manifolds of various types is rather complicated. Therefore, it is natural to consider this problem in a narrower class of manifolds, for example, in the class of homogeneous manifolds. The article presents the results of research of three-dimensional homogeneous spaces locally defined by Killing pairs. The basic notions, such as an isotropically-faithful pair, a reductive space, a canonical decomposition, a symmetric space, an affine connection, curvature and torsion tensors, Killing form, Killing pair are defined. The local study of homogeneous spaces is equivalent to the investigation of pairs consisting of Lie algebra and its subalgebra. For each homogeneous space, Killing forms, standard homogeneous pseudo-Riemannian metrics, Levi-Chevita connections, curvature tensors, holonomy algebras, scalar curvatures, Ricci tensors are found; it is determined whether the space is Ricci-flat, Einstein, Ricci-parallel, locally symmetric, conformally flat. The results can find applications in mathematics and physics, since many fundamental problems in these fields are reduced to the study of invariant objects on homogeneous spaces.

Key words: Killing pair, transformation group, affine connection, Killing form, Ricci tensor.

Введение. Форма Киллинга – симметричная билинейная форма на алгебре Ли, которая введена Э. Картаном (название «форма Киллинга» ввел А. Борель в честь Вильгельма Киллинга); имеет многочисленные приложения в математике и физике, например, в теории калибровочных полей на многообразиях отрицательная определенность формы Киллинга приводит к положительной определенности энергии калибровочного поля, также с помощью формы Киллинга вводится лагранжиан для функционала действия Янга – Миллса на базе пространства-времени. Локальное изучение однородных пространств равносильно изучению пар, составленных из алгебры Ли и ее подалгебры. Пара Киллинга – пара алгебр Ли с определенными свойствами формы Киллинга. Однородные пространства, локально определяемые парами Киллинга, являются частным случаем пространств, названных П. К. Рашевским аффинно-однородными, и естественно-редуктивны в смысле Кобаяси и Номидзу [1]. В настоящей работе исследуются пары Киллинга и однородные пространства, определяемые этими парами, в явном виде выписываются формы Киллинга, стандартные однородные псевдоримановы метрики, связности Леви-Чивита, тензоры кривизны, алгебры голономии, скалярные кривизны, тензоры Риччи, а также определяется, является ли пространство риччи-плоским, Эйнштейновым, риччи-параллельным, локально-симметрическим, конформно-плоским.

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G=\bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и фактор-пространство $\mathfrak{m}=\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Если подгруппа G связна, то однородное пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно* при существовании разложения $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}$, $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{m}=0$; $[\mathfrak{g},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$, а само разложение $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}$ называется *каноническим* [1]. Если, кроме того, $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{g}$, то пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ локально задает *симметрическое пространство* $M=\bar{G}/G$, в противном случае пространство не является симметрическим. Такое разложение определяет на однородном пространстве геодезически полную линейную связность с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения. Обратно, односвязное многообразие с полной линейной связностью, имеющей ковариантно-постоянные тензоры кривизны и кручения, является редуктивным однородным пространством относительно группы автоморфизмов этой связности ([2]).

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется отображение $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ такое, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Если пространство допускает инвариантную аффинную связность, то оно является изотропно-точным [1]. Редуктивные и симметрические пространства всегда допускают инвариантную аффинную связность. Тензор кручения $T\in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R\in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}})=\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}}-\Lambda(y)x_{\mathfrak{m}}-[x,y]_{\mathfrak{m}};$$
$$R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}})=[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])$$

для всех $x, y\in\bar{\mathfrak{g}}$.

Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли над полем $\mathbb{R}$. Обозначив через tr след эндоморфизма векторного пространства, рассмотрим билинейную форму

$$K(x,y)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,x\circ\mathrm{ad}\,y),\ x,y\in\bar{\mathfrak{g}}.$$

Форма K называется *формой Киллинга* алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Если форма Киллинга невырождена, то она отрицательно определена. Алгебра Ли является полупростой тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга K невырождена.

Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – полупростая алгебра Ли и $\mathfrak{g}$ – ее подалгебра. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *парой Киллинга*, если в $\bar{\mathfrak{g}}$ существует такое подпространство $\mathfrak{m}$, что $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}$ (прямая сумма подпространств) и $K(\mathfrak{m},\mathfrak{g})=0$, где K – форма Киллинга алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$ (т. е. $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{g}$ вполне ортогональны относительно K). В этом случае дополнительное подпространство $\mathfrak{m}$ определено однозначно и $\mathfrak{m}=\{x\in\bar{\mathfrak{g}}\mid K(x,\mathfrak{g})=0\}$. В дальнейшем проекцию вектора или подпространства из $\bar{\mathfrak{g}}$ на $\mathfrak{m}$ (соответственно, $\mathfrak{g}$) будем обозначать индексом $\mathfrak{m}$ (соответственно, $\mathfrak{g}$).

Если $\bar{\mathfrak{g}}$ – полупростая алгебра Ли, то пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ является парой Киллинга тогда и только тогда, когда ограничение формы Киллинга K алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$ на $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ невырождено.

Можно рассмотреть скалярное произведение $B(x,y)=-\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,x\circ\mathrm{ad}\,y)$ алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$ и ортогональное разложение алгебры $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{m}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ редуктивна относительно данного разложения, т. е. $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{m}$ – прямая сумма, а ограничение скалярного произведения на $\mathfrak{m}$ индуцирует $\bar{G}$-инвариантную риманову метрику на однородном пространстве $\bar{G}/G$. Связность Леви-Чивита инвариантной псевдоримановой метрики, индуцируемой ограничением формы Киллинга K на $\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}$, совпадает с естественной связностью без кручения редуктивного пространства M [3]. Любая пара Киллинга является редуктивной парой, всякая симметрическая пара с полупростой $\bar{\mathfrak{g}}$ является парой Киллинга [4].

Обозначим через Ric тензор Риччи полученного однородного риманова многообразия. Тогда [5]

$$\mathrm{Ric}(x,y)=(1/2)B(x,y)+(\lambda/4)\,\mathrm{tr}\,R(x)R(y)$$

для всех $x,y\in\mathfrak{m}$, где $R(x): z\to[z,x]_{\mathfrak{m}}$, $z\in\mathfrak{m}$. На дополнении $\mathfrak{m}$ можно определить операцию

$$x * y = [x, y]_{\mathfrak{m}}.$$

Тогда $(\mathfrak{m}, *)$ – конечномерная алгебра над полем действительных чисел с тождествами, полученными из тождеств алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ при проекции на $\mathfrak{m}$. Таким образом, редуктивное дополнение $\mathfrak{m}$ наделяется структурой неассоциативной антикоммутативной алгебры с умножением «*». Алгебра $(\mathfrak{m}, *)$ является *простой*, если $\mathfrak{m}^2 \neq 0$ и $\mathfrak{m}$ не содержит собственных идеалов. Она связана с канонической связностью без кручения на $\bar{G} / G$:

$$\Lambda(x) y = 1/2 x * y = 1/2 [x, y]_{\mathfrak{m}}$$

для всех $x, y \in \mathfrak{m}$.

Голономно_ неприводимые редуктивные пространства $\bar{G} / G$ можно характеризовать в терминах алгебры $\mathfrak{m}$, например, если $\bar{G} / G$ – односвязное псевдориманово пространство, то оно является голономно неприводимым относительно канонической связности без кручения тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{m}$ проста.

Однородные пространства, определяемые парами Киллинга. Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения $\bar{\mathfrak{g}}$ с базисом $\{e_1, ..., e_n\}$, $n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$ и полагать, что $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, ..., e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, для нумерации пар – $d.n.m$, здесь d – размерность подалгебры; n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$; m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ [6]. Будем описывать связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R – через $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T – через $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$.

Теорема. Любое трехмерное однородное пространство, локально определяемое парой Киллинга, имеет следующий вид:

Пара	Таблица умножения						
3.4.2		e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
	e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
	e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
	u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	e_2	$-e_1$
	u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	$-e_2$	0	$-e_3$
	u_3	u_3	$-u_2$	0	e_1	e_3	0
3.4.3.		e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
	e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
	e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
	u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$-e_2$	e_1
	u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	e_2	0	e_3
	u_3	u_3	$-u_2$	0	$-e_1$	$-e_3$	0
3.5.2		e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
	e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
	e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
	u_1	u_3	u_2	0	0	e_2	e_1
	u_2	0	$-u_1$	u_3	$-e_2$	0	e_3
	u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	$-e_1$	$-e_3$	0
3.5.3		e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
	e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
	e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
	u_1	u_3	u_2	0	0	$-e_2$	$-e_1$
	u_2	0	$-u_1$	u_3	e_2	0	$-e_3$
	u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	e_1	e_3	0

Действительно, выбирая из всех трехмерных изотропно-точных однородных пространств [6] те, у которых алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ полупроста, получаем, что либо $\bar{\mathfrak{g}}$ имеет вид 3.4.2, 3.4.3, 3.5.2, 3.5.3 (см. формулировку теоремы), либо радикал $\mathfrak{g}$ двумерен (т. е. $\mathfrak{g}$ не является полупростой, причем $K(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}) \neq 0$), либо $\mathfrak{g}$ является разрешимой (более того, такие пары не допускают аффинных связностей, все эти пары не являются редуктивными и $K(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}) \neq 0$). Таким образом, пара является парой Киллинга только в случаях, приведенных в теореме. Все пары, приведенные в теореме, являются редуктивными (более того, симметрическими), а $K(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}) = 0$.

Рассмотрим, например, случай 3.4.2. Тогда $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ полупросты, форма Киллинга имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а ограничение формы Киллинга на подалгебру –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что стандартная однородная псевдориманова метрика

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Риманова (псевдориманова) связность, соответствующая форме B, находится из соотношения

$$\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} = \frac{1}{2}[x,y]_{\mathfrak{m}} + u(x,y);$$
$$2B(u(x,y),z) = B(x,[z,y]_{\mathfrak{m}}) + B([z,x]_{\mathfrak{m}},y)$$

для всех $x, y, z \in \mathfrak{m}$. Существует единственная риманова связность без кручения, называемая *связностью Леви-Чивита*. В данном случае связность Леви-Чивита нулевая, а тензор кривизны $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x,y])$ –

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x,y]_{\mathfrak{m}}$$

нулевой.

Одной из важнейших характеристик связности является группа голономии. Алгебра Ли $\mathfrak{h}^*$ группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством

$$\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x,y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}.$$

В случае 3.4.2 алгебра голономии $\mathfrak{h}^*$ имеет вид

$$\left\{ \begin{pmatrix} s_2 & s_1 & 0 \\ s_3 & 0 & s_1 \\ 0 & s_3 & -s_2 \end{pmatrix} \middle| s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Тензор Риччи определяется через тензор кривизны следующим образом:

$$\mathrm{Ric}(x,y) = \mathrm{tr}\{z \to R(z,x)y\},$$

где x, y, z – произвольные касательные вектора на многообразии, в рассматриваемом случае

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С тензором Риччи связано несколько геометрических свойств многообразия. Многообразие называется *риччи-плоским*, если тензор Риччи тождественно равен нулю. Более общее условие – многообразие является *Эйнштейновым*, если $\mathrm{Ric} = \lambda B$ для некоторой константы λ. Условие *риччи-параллельности* – ковариантная производная тензора Риччи равна нулю. Если ковариантная производная тензора кривизны равна нулю, т. е. $\Lambda(R) = 0$, многообразие называется *локально симметрическим*. Тензор Коттона (тензор Схоутена – Вейля) задается как тензор 3-го ранга, определяемый с помощью метрики:

$$C(x,y,z) = \nabla_z \mathrm{Ric}(x,y) - \nabla_y \mathrm{Ric}(x,z) +$$
$$+ \frac{1}{2(n-1)}\left(\nabla_y RB(x,z) - \nabla_z RB(x,y)\right),$$

где $x, y, z \in \mathfrak{m}$, а R – скалярная кривизна. Равенство нулю тензора Коттона в размерности $n = 3$ является необходимым и достаточным условием того, что многообразие является *конформно-плоским*.

Пространство 3.4.2 не является риччи-плоским (так как тензор Риччи не равен нулю), оно является Эйнштейновым (поскольку $\mathrm{Ric} = \lambda B$ при $\lambda = 1/2$), риччи-параллельным (так как ковариантная производная тензора Риччи равна нулю), локально-симметрическим (поскольку $\Lambda(R) = 0$), конформно-плоским (так как тензор Коттона равен нулю), а скалярная кривизна $R = 3/2$.

Рассмотрим теперь случай 3.4.3. Форма Киллинга имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ полупросты, а ограничение формы Киллинга на подалгебру –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стандартная однородная псевдориманова метрика примет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда связность Леви-Чивита нулевая, а тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения нулевой. Алгебра голономии $\mathfrak{h}^*$ имеет вид

$$\left\{ \left. \begin{pmatrix} s_2 & s_1 & 0 \\ s_3 & 0 & s_1 \\ 0 & s_3 & -s_2 \end{pmatrix} \right| s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

а тензор Риччи –

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пространство не является Риччи-плоским (так как тензор Риччи не равен нулю), оно является Эйнштейновым (поскольку $\mathrm{Ric} = \lambda B$ при λ = 1/2), риччи-параллельным (так как ковариантная производная тензора Риччи равна нулю), локально-симметрическим ($\Lambda(R) = 0$), конформно-плоским (так как тензор Коттона равен нулю), а R = 3/2.

В случае 3.5.2 $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ полупросты, форма Киллинга –

$$K = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

а ограничение формы Киллинга на подалгебру –

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

стандартная однородная псевдориманова метрика имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

тогда связность Леви-Чивита нулевая, а тензор кривизны –

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения нулевой. Алгебра голономии –

$$\left\{ \left. \begin{pmatrix} 0 & s_1 & s_2 \\ -s_1 & 0 & s_3 \\ -s_2 & -s_3 & 0 \end{pmatrix} \right| s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

а тензор Риччи –

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пространство не является риччи-плоским, оно является Эйнштейновым (при λ = 1/2), риччи-параллельным, локально-симметрическим, конформно-плоским, а R = 3/2.

Для случая 3.5.3 $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ полупросты, форма Киллинга –

$$K = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

а ее ограничение на подалгебру –

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

тогда стандартная однородная псевдориманова метрика –

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

связность Леви-Чивита нулевая, тензор кривизны –

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения нулевой.

Алгебра голономии

$$\left\{ \left. \begin{pmatrix} 0 & s_1 & s_2 \\ -s_1 & 0 & s_3 \\ -s_2 & -s_3 & 0 \end{pmatrix} \right| s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Тогда тензор Риччи

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

пространство не является риччи-плоским, оно является Эйнштейновым ($\lambda = 1/2$), риччи-параллельным, локально-симметрическим, конформно-плоским ($R = 3/2$).

Заключение. Описаны трехмерные однородные пространства, локально определяемые парами Киллинга. Для каждого однородного пространства найдены в явном виде формы Киллинга, их ограничение на подалгебру, выписаны стандартные однородные псевдоримановы метрики, связности Леви-Чивита, тензоры кривизны, алгебры голономии, скалярные кривизны, тензоры Риччи, определено, является ли пространство риччи-плоским, Эйнштейновым, риччи-параллельным, локально-симметрическим, конформно-плоским. Полученные результаты могут найти применение в математике и физике, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях сводятся к изучению инвариантных объектов на однородных пространствах.

Литература

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. М.: Наука, 1981. 2 т. 415 с.

2. Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 380 с.

3. Фляйшер А. Об одном классе редуктивных пространств // Труды геометр. семинара. 1974. Т. 6. С. 267–277.

4. Фляйшер А. Алгебры инвариантных псевдоримановых связностей на однородных пространствах // Ученые зап. Тартуского ун-та. 1988. Вып. 803. С. 132–142.

5. Родионов Е. Д. Односвязные компактные стандартные однородные Эйнштейновы многообразия с группой голономии SO(n) // Известия Алтайского гос. ун-та. 1997. № 1 (3). С. 7–10.

6. Можей Н. П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. 394 с.

References

1. Kobayasi Sh., Nomidzu K. *Osnovy differentsial'noy geometrii: v 2 tomakh* [Foundations of differential geometry: in 2 vol.]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 2 vol. 415 p.

2. Kartan E. *Geometriya grupp Li i simmetricheskiye prostranstva* [Geometry of Lie groups and symmetric spaces]. Moscow, Izdatel'stvo inistrannoy literatury Publ., 1949. 380 p.

3. Flyaisher A. On a class of reductive spaces. *Trudy geometr. seminara* [Works of the Geometr. Seminar], 1974, vol. 6, pp. 267–277 (In Russian).

4. Flyaisher A. Algebras of invariant pseudo-Riemannian connections on homogeneous spaces. *Uchonyye zapiski Tartuskogo universiteta* [Scholarly notes of the University of Tartu], 1988, vol. 803, pp. 132–142 (In Russian).

5. Rodionov E. D. Compact simply connected standard homogeneous Einstein manifolds with holonomy group SO(n). *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta* [News of the Altai State University], 1997, no. 1 (3), pp. 7–10 (In Russian).

6. Mozhey N. P. *Trekhmernyye izotropno-tochnyye odnorodnyye prostranstva i svyaznosti na nikh* [Three-dimensional isotropically faithful homogeneous spaces and connections on them], Kazan, Kazanskiy universitet Publ., 2015. 394 p.

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила 29.10.2018