Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (114), 2019

*УДК 514.76*

# Ненулевые алгебры голономии тривиальных связностей на однородных пространствах с разрешимыми группами преобразований

Н.П. Можей

Целью данной работы является локальная классификация трехмерных однородных пространств, допускающих только тривиальную аффинную связность с ненулевой алгеброй голономии. Рассмотрены пространства, на которых действует разрешимая группа преобразований. Локальная классификация таких пространств эквивалентна описанию эффективных пар алгебр Ли. Описаны в явном виде все тензоры кривизны и алгебры голономии указанных связностей. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, главным образом, локальный характер.
**Ключевые слова:** алгебра голономии, однородное пространство, группа преобразований, аффинная связность, тензор кривизны.

The goal of this paper is the local classification of three-dimensional homogeneous spaces that admit only trivial affine connections with non-zero holonomy algebra. The spaces on which the soluble group of transformations acts are considered. The local classification of such spaces is equivalent to the description of effective pairs of Lie algebras. All curvature and holonomy algebras of these connections are described explicitly. The studies are based on the use of the properties of Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces, and are mainly local in nature.
**Keywords:** holonomy algebra, homogeneous space, transformation group, affine connection, curvature tensor.

**Введение.** Связность на многообразии определяет (через параллельный перенос) понятие голономии. Голономия связности также тесно связана с кривизной через теорему Амброуса-Сингера. Анализ групп голономии и их приводимости для естественно редуктивных однородных пространств и произвольных римановых однородных пространств проведен Б. Костантом (в [1] и [2] соответственно). Группы и алгебры голономии имеют приложения в различных отраслях математики и физики, например, Э. Ириг [3] показал, что связь между группой голономии пространства–времени и изотропным рекуррентным векторным полем на многообразии позволяет (при некоторых дополнительных ограничениях) решить вопрос об однозначности определения метрического тензора по заданному тензору энергии-импульса. С описанием связностей ненулевой кривизны на трехмерных нередуктивных пространствах можно ознакомиться в [4], целью же данной работы является нахождение алгебр голономии тривиальных аффинных связностей на трехмерных однородных пространствах и определение условий, при которых алгебра голономии является ненулевой. В статье рассматриваются пространства, на которых действует разрешимая группа преобразований.

**Основные определения.** Пусть $M$ – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\overline{G}$, $G=\overline{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x\in M$. Необходимое условие существования аффинной связности – представление изотропии для $G$ должно быть точным, если $\overline{G}$ эффективна на $\overline{G}/G$ [5]. Пусть $\overline{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе $G$. Пара $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\overline{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m}=\overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. *Аффинной связностью* на паре $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda:\overline{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. *Тензор кручения* $T\in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и *тензор кривизны* $R\in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ для всех $x,y\in\overline{\mathfrak{g}}$ имеют вид:

$$T(x_{\mathfrak{m}},y_{\mathfrak{m}})=\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}}-\Lambda(y)x_{\mathfrak{m}}-[x,y]_{\mathfrak{m}},\quad R(x_{\mathfrak{m}},y_{\mathfrak{m}})=[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y]).$$

*Алгебра* Ли $\mathfrak{h}^*$ группы *голономии* [6] инвариантной связности $\Lambda:\overline{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ на паре $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ вида

$$V+[\Lambda(\overline{\mathfrak{g}}),V]+[\Lambda(\overline{\mathfrak{g}}),[\Lambda(\overline{\mathfrak{g}}),V]]+\ldots,$$

где $V$ – подпространство, порожденное множеством

$$\{[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])\mid x,y\in\overline{\mathfrak{g}}\}.$$

**Основная часть.** Будем описывать пару $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$ с базисом $\{e_1,\ldots,e_n\}$ ($n=\dim\overline{\mathfrak{g}}$), причем $\{e_1,\ldots,e_{n-3}\}$ – базис $\mathfrak{g}$, а $\{u_1=e_{n-2},u_2=e_{n-1},u_3=e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, здесь $d$ – размерность подалгебры, $n$ – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, а $m$ – номер пары $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$.

Пусть группа, действующая на однородном пространстве, является разрешимой. Будем выписывать аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, а тензор кривизны $R$ – через $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$. Все указанные далее связности оказываются связностями без кручения.

**Теорема.** *Трехмерные однородные пространства, допускающие только тривиальную аффинную связность с ненулевой алгеброй голономии, такие, что* $\overline{\mathfrak{g}}$ *является разрешимой, имеют вид:*

| 2.8.6.$\lambda=-1/2$ | $e_1$ | $e_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $0$ | $-(1/2)e_1$ | $0$ | $0$ | $u_1$ |
| $e_2$ | $(1/2)e_1$ | $0$ | $0$ | $u_2$ | $-(1/2)u_3$ |
| $u_1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $u_2$ | $0$ | $-u_2$ | $0$ | $0$ | $e_1$ |
| $u_3$ | $-u_1$ | $(1/2)u_3$ | $0$ | $-e_1$ | $0$ |

| 2.9.3.$\lambda=1-2\mu$, $\mu\neq 0,1/2,1/4$ | $e_1$ | $e_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $0$ | $(1-\mu)e_2$ | $u_1$ | $(1-2\mu)u_2$ | $\mu u_3$ |
| $e_2$ | $(\mu-1)e_2$ | $0$ | $0$ | $0$ | $u_1$ |
| $u_1$ | $-u_1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $u_2$ | $(2\mu-1)u_2$ | $0$ | $0$ | $0$ | $e_2$ |
| $u_3$ | $-\mu u_3$ | $-u_1$ | $0$ | $-e_2$ | $0$ |

| 2.16.2.$\lambda=1/3$ | $e_1$ | $e_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $0$ | $-(2/3)e_1$ | $0$ | $0$ | $u_1$ |
| $e_2$ | $(2/3)e_1$ | $0$ | $u_1$ | $(1/3)u_2$ | $u_2+(1/3)u_3$ |
| $u_1$ | $0$ | $-u_1$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $u_2$ | $0$ | $-(1/3)u_2$ | $0$ | $0$ | $e_1$ |
| $u_3$ | $-u_1$ | $-u_2-(1/3)u_3$ | $0$ | $-e_1$ | $0$ |

| 3.8.9.$\lambda=-1/2,\mu=1/2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $0$ | $0$ | $(1/2)e_3$ | $u_1$ | $0$ | $(1/2)u_3$ |
| $e_2$ | $0$ | $0$ | $(1/2)e_3$ | $0$ | $u_2$ | $-(1/2)u_3$ |
| $e_3$ | $-(1/2)e_3$ | $-(1/2)e_3$ | $0$ | $0$ | $0$ | $u_1$ |
| $u_1$ | $-u_1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $u_2$ | $0$ | $-u_2$ | $0$ | $0$ | $0$ | $e_3$ |
| $u_3$ | $-(1/2)u_3$ | $(1/2)u_3$ | $-u_1$ | $0$ | $-e_3$ | $0$ |

| 3.14.2.$\mu$=1 | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | $-2e_2$ | 0 | $u_1$ | $-u_2$ | $u_3$ |
| $e_2$ | $2e_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $u_2$ |
| $e_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $u_1$ |
| $u_1$ | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $u_2$ | $u_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $e_3$ |
| $u_3$ | $-u_3$ | $-u_2$ | $-u_1$ | 0 | $-e_3$ | 0 |

| 3.19.16.$\lambda=-1/2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | $-2e_2$ | $e_3$ | 0 | $2u_2$ | $-u_3$ |
| $e_2$ | $2e_2$ | 0 | 0 | 0 | $u_1$ | 0 |
| $e_3$ | $-e_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $u_1$ |
| $u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $u_2$ | $-2u_2$ | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 | $e_3$ |
| $u_3$ | $u_3$ | 0 | $-u_1$ | 0 | $-e_3$ | 0 |

| 3.20.5.$\lambda=1-2\mu,\mu\geq 1/3$ $\mu\neq 1/2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | $2\mu e_2$ | $(1-\mu)e_3$ | $u_1$ | $(1-2\mu)u_2$ | $\mu u_3$ |
| $e_2$ | $-2\mu e_2$ | 0 | 0 | 0 | $u_1$ | 0 |
| $e_3$ | $(\mu-1)e_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $u_1$ |
| $u_1$ | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $u_2$ | $(2\mu-1)u_2$ | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 | $e_3$ |
| $u_3$ | $-\mu u_3$ | 0 | $-u_1$ | 0 | $-e_3$ | 0 |

| 3.23.2.$\lambda$=3/5 | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | $2/5e_2$ | $4/5e_3$ | $u_1$ | $3/5u_2$ | $1/5u_3$ |
| $e_2$ | $-2/5e_2$ | 0 | 0 | 0 | $u_1$ | $u_2$ |
| $e_3$ | $-4/5e_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $u_1$ |
| $u_1$ | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $u_2$ | $-3/5u_2$ | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 | $e_3$ |
| $u_3$ | $-1/5u_3$ | $-u_2$ | $-u_1$ | 0 | $-e_3$ | 0 |

| 3.27.2.$\lambda$=1/3 | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | $e_3-(2/3)e_1$ | 0 | 0 | $u_1$ | 0 |
| $e_2$ | $(2/3)e_1-e_3$ | 0 | $(2/3)e_3$ | $u_1$ | $(1/3)u_2$ | $u_2+(1/3)u_3$ |
| $e_3$ | 0 | $-(2/3)e_3$ | 0 | 0 | 0 | $u_1$ |
| $u_1$ | 0 | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $u_2$ | $-u_1$ | $-(1/3)u_2$ | 0 | 0 | 0 | $e_3$ |
| $u_3$ | 0 | $-u_2-(1/3)u_3$ | $-u_1$ | 0 | $-e_3$ | 0 |

| 4.8.10. $\lambda=-1/2, \mu=1/2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $0$ | $0$ | $(3/2)e_3$ | $(1/2)e_4$ | $u_1$ | $0$ | $-(1/2)u_3$ |
| $e_2$ | $0$ | $0$ | $-(1/2)e_3$ | $(1/2)e_4$ | $0$ | $u_2$ | $(1/2)u_3$ |
| $e_3$ | $-(3/2)e_3$ | $(1/2)e_3$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $u_1$ |
| $e_4$ | $-(1/2)e_4$ | $-(1/2)e_4$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $u_2$ |
| $u_1$ | $-u_1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $e_4$ |
| $u_2$ | $0$ | $-u_2$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $u_3$ | $(1/2)u_3$ | $-(1/2)u_3$ | $-u_1$ | $-u_2$ | $-e_4$ | $0$ | $0$ |

| 4.11.4. $\lambda=1/2, \mu=-1/2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $0$ | $0$ | $e_3$ | $(1/2)e_4$ | $u_1$ | $0$ | $(1/2)u_3$ |
| $e_2$ | $0$ | $0$ | $-e_3$ | $(1/2)e_4$ | $0$ | $u_2$ | $-(1/2)u_3$ |
| $e_3$ | $-e_3$ | $e_3$ | $0$ | $0$ | $0$ | $u_1$ | $0$ |
| $e_4$ | $-(1/2)e_4$ | $-(1/2)e_4$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $u_1$ |
| $u_1$ | $-u_1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $u_2$ | $0$ | $-u_2$ | $-u_1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $e_4$ |
| $u_3$ | $-(1/2)u_3$ | $(1/2)u_3$ | $0$ | $-u_1$ | $0$ | $-e_4$ | $0$ |

| 4.20.2. $\lambda=-1/2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $0$ | $-e_2$ | $(1/2)e_3$ | $(3/2)e_4$ | $0$ | $u_2$ | $-(1/2)u_3$ |
| $e_2$ | $e_2$ | $0$ | $0$ | $e_3$ | $0$ | $u_1$ | $0$ |
| $e_3$ | $-(1/2)e_3$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $u_1$ |
| $e_4$ | $-(3/2)e_4$ | $-e_3$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $u_2$ |
| $u_1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $u_2$ | $-u_2$ | $-u_1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $e_3$ |
| $u_3$ | $(1/2)u_3$ | $0$ | $-u_1$ | $-u_2$ | $0$ | $-e_3$ | $0$ |

| 4.21.2. $\lambda+2\mu=1$, $\lambda\neq 1$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $0$ | $(1-\lambda)e_2$ | $(3\lambda-1)/2e_3$ | $(1+\lambda)/2e_4$ | $u_1$ | $\lambda u_2$ | $(1-\lambda)/2u_3$ |
| $e_2$ | $(\lambda-1)e_2$ | $0$ | $e_4$ | $0$ | $0$ | $u_1$ | $0$ |
| $e_3$ | $(1-3\lambda)/2e_3$ | $-e_4$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $u_2$ |
| $e_4$ | $-(1+\lambda)/2e_4$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $u_1$ |
| $u_1$ | $-u_1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $u_2$ | $-\lambda u_2$ | $-u_1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $e_4$ |
| $u_3$ | $(\lambda-1)/2u_3$ | $0$ | $-u_2$ | $-u_1$ | $0$ | $-e_4$ | $0$ |

| 5.10.2. $\lambda=1/2, \mu=-1/2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | 0 | $e_3$ | $(1/2)e_4$ | $-(1/2)e_5$ | $u_1$ | 0 | $(1/2)u_3$ |
| $e_2$ | 0 | 0 | $-e_3$ | $(1/2)e_4$ | $(3/2)e_5$ | 0 | $u_2$ | $-(1/2)u_3$ |
| $e_3$ | $-e_3$ | $e_3$ | 0 | 0 | $e_4$ | 0 | $u_1$ | 0 |
| $e_4$ | $-(1/2)e_4$ | $-(1/2)e_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $u_1$ |
| $e_5$ | $(1/2)e_5$ | $-(3/2)e_5$ | $-e_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $u_2$ |
| $u_1$ | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $u_2$ | 0 | $-u_2$ | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $e_4$ |
| $u_3$ | $-(1/2)u_3$ | $(1/2)u_3$ | 0 | $-u_1$ | $-u_2$ | 0 | $-e_4$ | 0 |

*Тензоры кривизны и алгебры голономии тривиальных связностей представленны в таблицах 1 и 2.*

Таблица 1 – Тензоры кривизны разрешимых групп Ли

| Пара | Тензор кривизны |
|---|---|
| 5.10.2, 4.11.4, 4.20.2, 4.21.2($\lambda \neq 1$), 3.8.9, 3.14.2, 3.19.16, 3.20.5($\mu \neq 1/2$), 3.23.2, 3.27.2, 2.8.6, 2.9.3($\mu \neq 0, 1/2, 1/4$), 2.16.2 | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 4.8.10 | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |

Таблица 2 – Алгебры голономии разрешимых групп Ли

| Пара | Алгебра голономии |
|---|---|
| 5.10.2, 4.11.4, 4.20.2, 4.21.2($\lambda \neq 1$), 3.8.9, 3.14.2, 3.20.5($\mu \neq 1/2$), 3.19.16, 3.23.2, 3.27.2, 2.8.6, 2.9.3($\mu \neq 0, 1/2, 1/4$), 2.16.2 | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 4.8.10 | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |

здесь $p \in \mathbb{R}$. В дальнейшем, если на параметры, появляющиеся в процессе классификации, накладываются дополнительные условия, то они записываются после таблицы умножения, в противном случае предполагается, что параметры пробегают все $\mathbb{R}$. В случае 4.21.2 при $\lambda \neq 1$ связность тривиальна (при $\lambda = 0$ после замены базиса), в случае 3.20.5 при $\mu \neq 1/2$ заменой базиса получаем тривиальную связность, в случае 2.9.3 связность тривиальна при $\mu \neq 0, 1/2, 1/4$.

*Доказательство.* Подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ описаны, например, в [7]. Для каждой подалгебры $\mathfrak{g}$ находим изотропно-точные пары с разрешимой $\overline{\mathfrak{g}}$, аффинные связности на них и определяем пары, допускающие только тривиальную аффинную связность с ненулевой алгеброй голономии.

Рассмотрим, например, случай 3.23, где $\mathfrak{g}$ имеет вид

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ & \lambda x & y \\ & & (2\lambda-1)x \end{pmatrix} \middle| \lambda \neq 1, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Нильпотентная подалгебра $\mathfrak{h}$ порождена вектором $e_1$ (базис подалгебры выбираем, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту). Имеем

$$\mathfrak{g}^{(1-\lambda)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}e_2, \mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}e_1, \mathfrak{g}^{(2-2\lambda)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}e_3,\ U^{(1)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}u_1,\ U^{(\lambda)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}u_2,\ U^{(2\lambda-1)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}u_3.$$

1° $\lambda\notin\{0,2/3,3/4\}$ Тогда $\overline{\mathfrak{g}}^{(1-\lambda)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}e_2$, $\overline{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}e_1$, $\overline{\mathfrak{g}}^{(2-2\lambda)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}e_3$, $\overline{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}u_1$, $\overline{\mathfrak{g}}^{(\lambda)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}u_2$, $\overline{\mathfrak{g}}^{(2\lambda-1)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}u_3$, $[u_1,u_2]\in\overline{\mathfrak{g}}^{(1+\lambda)}(\mathfrak{h}),[u_1,u_3]\in\overline{\mathfrak{g}}^{(2\lambda)}(\mathfrak{h}),[u_2,u_3]\in\overline{\mathfrak{g}}^{(3\lambda-1)}(\mathfrak{h})$; с учетом тождества Якоби получим, что $[u_1,u_2]=0,[u_1,u_3]=0,[u_2,u_3]=c_3e_3$, где $c_3(\lambda-3/5)=0$, или $[u_1,u_2]=0,[u_1,u_3]=\beta_1u_1,[u_2,u_3]=c_2e_2+\beta_1u_2$.

1.1° $\lambda\neq1/2$. При $c_3=0$ пара $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ тривиальна (т.е. существует коммутативный идеал $\mathfrak{m}$ алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$, такой, что $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{m}=\overline{\mathfrak{g}}$). Прямыми вычислениями получаем, что пара допускает только тривиальную аффинную связность с нулевой кривизной, нулевой алгеброй голономии и не входит в рассматриваемый в работе класс. При $\lambda=3/5,c_3\neq0$ пары $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и $(\overline{\mathfrak{g}}_2,\mathfrak{g}_2)$, т. е. 3.23.2, эквивалентны при помощи $\pi:\overline{\mathfrak{g}}_2\to\overline{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_1)=e_1$, $\pi(e_2)=c_3^{-1/3}e_2$, $\pi(e_3)=c_3^{-2/3}e_3$, $\pi(u_1)=c_3^{-4/3}u_1$, $\pi(u_2)=(1/c_3)u_2$, $\pi(u_3)=c_3^{-2/3}u_3$. Связность на этой паре и ее тензор кручения нулевые, тензор кривизны и алгебра голономии выписаны в таблицах 1 и 2.

1.2° $\lambda=1/2$. При $\beta_1=c_2=0$ пара тривиальна. При $\beta_1\neq0$ эквивалентность пар $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и $(\overline{\mathfrak{g}}_5,\mathfrak{g}_5)$ устанавливается при помощи $\pi:\overline{\mathfrak{g}}_5\to\overline{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i)=e_i$, $i=\overline{1,3}$, $\pi(u_j)=(1/\beta_1)u_j$, $j=\overline{1,3}$. В этом случае связность не является нулевой, а пара не входит в рассматриваемый в работе класс. При $\beta_1=0,c_2\neq0$ пара $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\overline{\mathfrak{g}}_i,\mathfrak{g}_i)$, $i=3$ или $i=4$, посредством $\pi:\overline{\mathfrak{g}}_i\to\overline{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_j)=e_j$, $j=\overline{1,3}$, $\pi(u_k)=|c_2|^{-1/2}u_k$, $k=\overline{1,3}$ (если $c_2>0$, то $i=3$, если $c_2<0$, то $i=4$).

В случае $i=3$ (3.23.3) отображение $\Lambda:\overline{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ является $\mathfrak{g}$-инвариантным $\Rightarrow$ $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_3,u_1])\Rightarrow[\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)]=0$, $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_2,u_1])\Rightarrow[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)]=0$, $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)]=\Lambda(u_1)$, $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_2)]=0$, $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_2)]=\Lambda(u_1)$, $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_2)]=(1/2)\Lambda(u_2)$, $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_1)$, $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_2)$, $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_3)]=0$. Получим, что

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&p_{1,3}\\0&0&0\end{pmatrix},\Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}r_{1,1}&0&0\\0&r_{1,1}&0\\0&0&r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix},\ r_{1,1},\ p_{1,3}\in\mathbb{R}.$$

Таким образом, связность не является нулевой при отличных от нуля значениях параметров, а пара не входит в рассматриваемый в работе класс. В случае $i=4$ (3.23.4) аналогично.

2° $\lambda=3/4$. Тогда $\overline{\mathfrak{g}}^{(1/4)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_2$, $\overline{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_1$, $\overline{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}u_1$, $\overline{\mathfrak{g}}^{(3/4)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}u_2$, $\overline{\mathfrak{g}}^{(1/2)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}u_3\oplus\mathbb{R}e_3$, $[u_1,u_2]\in\overline{\mathfrak{g}}^{(7/4)}(\mathfrak{h})\Rightarrow[u_1,u_2]=0$, $[u_1,u_3]\in\overline{\mathfrak{g}}^{(3/2)}(\mathfrak{h})\Rightarrow[u_1,u_3]=0$, $[u_2,u_3]\in\overline{\mathfrak{g}}^{(5/4)}(\mathfrak{h})\Rightarrow[u_2,u_3]=0$. В силу тождества Якоби $[e_1,u_3]=(1/2)u_3+pe_3$ (остальная часть таблицы умножения полностью определяется изотропным представлением). При $p=0$ пара $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ тривиальна. При $p\neq0$ пара $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\overline{\mathfrak{g}}_6,\mathfrak{g}_6)$ при помощи $\pi:\overline{\mathfrak{g}}_6\to\overline{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i)=e_i$, $i=\overline{1,3}$, $\pi(u_j)=(1/p)u_j$, $j=\overline{1,3}$. Полученная пара не допускает аффинных связностей.

3° $\lambda=0$. Имеем $\overline{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_2\oplus\mathbb{R}u_1$, $\overline{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_1\oplus\mathbb{R}u_2$, $\overline{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_3$, $\overline{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}u_3$ и $[u_1,u_2]\in\overline{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})\Rightarrow[u_1,u_2]=a_2e_2+\alpha_1u_1$, $[u_1,u_3]\in\overline{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})\Rightarrow[u_1,u_3]=b_1e_1+\beta_2u_2$, $[u_2,u_3]\in\overline{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h})\Rightarrow$ $[u_2,u_3]=\gamma_3u_3$. Из тождества Якоби следует, что $[e_2,u_1]=pe_3,[e_2,u_2]=u_1+2pe_2$, $[e_3,u_2]=pe_3,[u_1,u_2]=-pu_1,[u_2,u_3]=2pu_3$ (остальная часть таблицы умножения полностью определяется изотропным представлением). При $p=0$ пара $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ тривиальна. При $p\neq0$ эквивалентность пар $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и $(\overline{\mathfrak{g}}_7,\mathfrak{g}_7)$ устанавливается при помощи $\pi:\overline{\mathfrak{g}}_7\to\overline{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_1)=e_1$, $\pi(u_1)=u_1$, $\pi(e_2)=pe_2$, $\pi(u_2)=(1/p)u_2$, $\pi(e_3)=p^2e_3$, $\pi(u_3)=(1/p^2)u_3$. Полученная пара не является разрешимой и не входит в рассматриваемый в работе класс.

$4^\circ$ $\lambda = 2/3$. Тогда $\overline{\mathfrak{g}}^{(1/3)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}u_3$, $\overline{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1$, $\overline{\mathfrak{g}}^{(2/3)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}u_2$, $\overline{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_1$, $[u_1, u_2] \in \overline{\mathfrak{g}}^{(5/3)}(\mathfrak{h}) \Rightarrow [u_1, u_2] = 0$, $[u_1, u_3] \in \overline{\mathfrak{g}}^{(4/3)}(\mathfrak{h}) \Rightarrow [u_1, u_3] = 0$, $[u_2, u_3] \in \overline{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) \Rightarrow [u_2, u_3] = \gamma_1 u_1$. В силу тождества Якоби остальная часть таблицы умножения полностью определяется изотропным представлением. Пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре $(\overline{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$ посредством $\pi : \overline{\mathfrak{g}}_1 \to \overline{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,3}$, $\pi(u_1) = u_1$, $\pi(u_2) = u_2$, $\pi(u_3) = u_3 + \gamma_1 e_2$.

Поскольку $\dim D^2\overline{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D^2\overline{\mathfrak{g}}_2$, пары $(\overline{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$ и $(\overline{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$ не эквивалентны. При $\lambda = 3/4$ рассмотрим $f_i : \overline{\mathfrak{g}}_i \to \mathfrak{gl}(5, \mathbb{R})$, $i = 1, 6$, где $f_i(x)$ – матрица $ad|_{D\overline{\mathfrak{g}}_i} x$ в базисе $\{e_2, e_3, u_1, u_2, u_3\}$ $D\overline{\mathfrak{g}}_i$. Поскольку $f_i(\overline{\mathfrak{g}}_i)$ не сопряжены, пары $(\overline{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$ и $(\overline{\mathfrak{g}}_6, \mathfrak{g}_6)$ не эквивалентны. Поскольку $\dim D^2\overline{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D^2\overline{\mathfrak{g}}_7$, пары $(\overline{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$ и $(\overline{\mathfrak{g}}_7, \mathfrak{g}_7)$ не эквивалентны. При $\lambda = 1/2$ рассмотрим $f_i : \overline{\mathfrak{g}}_i \to \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$, $i = 1, \overline{3,5}$, где $f_i(x)$ – матрица $ad|_{D\overline{\mathfrak{g}}_i} x$ в базисе $\{e_2, e_3, u_1, u_2\}$ $\overline{\mathfrak{g}}_i$. Поскольку $f_i(\overline{\mathfrak{g}}_i)$ не сопряжены, пары $(\overline{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$, $(\overline{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$, $(\overline{\mathfrak{g}}_4, \mathfrak{g}_4)$, $(\overline{\mathfrak{g}}_5, \mathfrak{g}_5)$ не эквивалентны друг другу.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Других трехмерных однородных пространств с разрешимой $\overline{\mathfrak{g}}$, допускающих только тривиальную аффинную связность с ненулевой алгеброй голономии, кроме указанных в теореме, не существует.

**Заключение.** Найдены все трехмерные однородные пространства, на которых действует разрешимая группа преобразований, допускающие только тривиальную аффинную связность с ненулевой алгеброй голономии, что эквивалентно описанию соответствующих эффективных пар алгебр Ли.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, при изучении пространств с аффинной связностью, а также иметь приложения в различных областях геометрии, топологии, дифференциальных уравнений, анализа, алгебры, в общей теории относительности, которая, с математической точки зрения, базируется на геометрии искривленных пространств, в ядерной физике, физике элементарных частиц и др., поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах.

## Литература

1. Kostant, B. On differential geometry and homogeneous spaces / B. Kostant // Proc. of the National Academy of Sciences of the United States of America. – 1956. – V. 42 (5). – P. 258–261.

2. Kostant, B. On holonomy and homogeneous spaces / B. Kostant // Nagoya Math. J. – 1957. – № 12. – P. 31–54.

3. Ihrig, E. The holonomy group in general relativity and the determination of $g_{ij}$ from $T^i_j$ / E. Ihrig // General Relativity and Gravitation. – 1976. – V. 7, № 3. – P. 313–323.

4. Можей, Н.П. Связности ненулевой кривизны на трехмерных нередуктивных пространствах / Н.П. Можей // Известия Сараовского ун-та. Нов. серия Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2017. – Т. 17, вып. 4. – С. 381–393.

5. Kobayashi, S. Foundations of differential geometry / S. Kobayashi, K. Nomizu. – New York : John Wiley and Sons, 1963. – V. 1. – 334 p; 1969. – V. 2. – 411 p.

6. Wang, H.C. On invariant connections over a principal fibre bundle / H.C. Wang // Nagoya Math. J. – 1958. – № 13. – P. 1–19.

7. Можей, Н.П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них / Н.П. Можей. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 394 с.

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Поступила в редакцию 30.08.2018