Применение пакетов аналитических вычислений к исследованию алгебр голономии инвариантных связностей

Н. П. Можей, e-mail: mozheynatalya@mail.ru

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Аннотация. *Работа посвящена применению пакетов аналитических вычислений к исследованию алгебр голономии инвариантных связностей. Наиболее эффективное решение этой задачи возможно в системе Maple. Проведена классификация трехмерных однородных пространств, допускающих инвариантную аффинную связность с ненулевой алгеброй голономии, описаны тензоры кривизны и кручения и сами алгебры голономии.*

Ключевые слова: *компьютерная математика, алгебра голономии, однородное пространство, группа преобразований, аффинная связность.*

Введение

Системы аналитических вычислений применяются в различных областях науки и техники. Современное программное обеспечение для использования в математических вычислениях представляет собой более или менее полную систему, включающую метод представления нечисловых данных, язык, позволяющий манипулировать с ними, и библиотеку эффективных функций для выполнения необходимых базисных алгебраических операций. Наиболее широкое применение получили универсальные математические системы, такие как Maple, Mathematica, MathCad, MatLab и другие. Они предоставляют дополнительные возможности для специалистов разных областей, с их помощью быстрее и проще решать трудоемкие научные задачи. Системы обладают универсальным математическим аппаратом и постоянно совершенствуются.

Современная дифференциальная геометрия, как и другие области математики, привлекает новейшие компьютерные технологии для решения своих задач. Применение систем символьной математики не ограничивается численными расчетами. Все чаще они используются для решения задач аналитической и дифференциальной геометрии. Налицо не только рост числа задач, решенных с помощью компьютера, но и разработка новых алгоритмов и программ для решения определенных типов задач. Появляются новые, совершенствуются старые алгоритмы, сейчас даже трудно оценить до конца тот вклад, который привносится в математику новыми компьютерными технологиями.

Связность на многообразии определяет (через параллельный перенос) понятие голономии. Голономия связности может быть описана через группу Ли – группу голономии. Исследование голономии было начато еще Э. Картаном для изучения и классификации симметрических пространств, позже группы голономии использовались, чтобы изучить риманову геометрию в целом. Связь групп голономии с тензорными полями рассматривается в [1] и [2], применение групп голономии в супергравитации описывается, например, в [3].

Данная работа посвящена исследованию алгебр голономии инвариантных связностей на трехмерных однородных пространствах с помощью пакетов аналитических вычислений, в частности, классификации трехмерных однородных пространств, допускающих аффинную связность с ненулевой алгеброй голономии, описанию тензоров кривизны и кручения и алгебр голономии. Работа является продолжением исследований в области дифференциальной геометрии с использованием новейших разработок компьютерной алгебры, ее целью является создание алгоритмов и программ в среде пакета Maple для исследования алгебр голономии инвариантных аффинных связностей на трехмерных однородных пространствах, нахождение самих алгебр голономии и определение условий, при которых алгебра голономии является ненулевой. Исследование проводится следующим образом: строится удобная для вычислительной работы модель объекта, создается программа для реализации в системе аналитических расчетов Maple, проводятся вычисления, анализ и истолкование полученных результатов, изучаются возможности уточнения модели.

1. **Основная часть**

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G=\bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Необходимое условие существования аффинной связности – представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [9]. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство

$\mathfrak{m}=\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. *Аффинной связностью* на паре ($\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g}$) называется такое отображение $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. *Тензор кручения* $T\in InvT_2^{\,1}(\mathfrak{m})$ и *тензор кривизны* $R\in InvT_3^{\,1}(\mathfrak{m})$ для всех $x,y\in\bar{\mathfrak{g}}$ имеют вид:

$$T(x_{\mathfrak{m}},y_{\mathfrak{m}})=\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}}-\Lambda(y)x_{\mathfrak{m}}-[x,y]_{\mathfrak{m}},$$
$$R(x_{\mathfrak{m}},y_{\mathfrak{m}})=[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y]).$$

Одной из важнейших характеристик связности является группа голономии. Переформулируем теорему Вана [10] об алгебре группы голономии инвариантной связности: *алгебра* Ли $\mathfrak{h}^*$ группы *голономии* инвариантной связности $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ на паре ($\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g}$) – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ вида $V+[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]+[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]]+\ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])\mid x,y\in\bar{\mathfrak{g}}\}$. Будем описывать пару ($\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g}$) при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ с базисом $\{e_1,\ldots,e_n\}$, где $n=\dim\bar{\mathfrak{g}}$, $\{e_1,\ldots,e_{n-3}\}$ – базис $\mathfrak{g}$, а $\{u_1=e_{n-2},u_2=e_{n-1},u_3=e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$, будем выписывать аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, а тензор кривизны R – через $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$.

Для изучения алгебр голономии инвариантных связностей сначала получена локальная классификация трехмерных изотропно-точных однородных пространств как пар алгебр Ли, т.е. классифицированы (с точностью до изоморфизма) все точные трехмерные $\mathfrak{g}$–модули U (это эквивалентно классификации подалгебр в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ с точностью до сопряженности), а далее найдены (с точностью до эквивалентности) все пары ($\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g}$) такие, что $\mathfrak{g}$–модули $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ и U эквивалентны. Для нахождения аффинных связностей, тензоров кривизны и кручения и алгебр голономии для каждой пары алгебр Ли используем пакеты `DifferentialGeometry`, `GroupActions`, `LieAlgebras`, `Tensor` и другие. Например, используем пакет `DifferentialGeometry`, чтобы определить алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Этот пакет представляет собой набор команд и подпакетов с тесно интегрированными инструментами для вычислений в областях: исследования на многообразиях (векторные поля, дифференциальные формы и преобразования); тензорный анализ; вычисления на пространствах джетов; алгебры Ли и группы Ли и их преобразования. Группы Ли и алгебры Ли играют существенную роль в дифференциальной геометрии и ее приложениях. Пакет DifferentialGeometry дает возможность использовать пакет LieAlgebra, содержаший большое количество команд для определения алгебр Ли и для создания новых алгебр Ли по существующим. Пакет DifferentialGeometry: GroupActions предоставляет базовые возможности для работы с группами Ли. Для алгебр Ли векторных полей на многообразии важную геометрическую информацию дают подалгебры изотропии, а также представления в касательном пространстве. Их также можно рассчитать с помощью пакета GroupActions. Пакет DifferentialGeometry: Tensor содержит набор команд для работы с тензорами на касательном расслоении любого многообразия (либо на любом векторном расслоении), этот пакет дает возможность использовать команды для стандартных алгебраических операций над тензорами, для вычисления ковариантного дифференцирования и кривизны (для метрических связностей, аффинных связностей либо связностей на векторных расслоениях).

Чтобы определить алгебру Ли $\overline{\mathfrak{g}}$, задаем ее структурные константы и используем команду DGsetup для инициализации алгебры. После инициализации можно проводить все виды вычислений и проверок. Для подалгебры $\mathfrak{g}$ указываем базис**.** Находим группу Ли $\overline{G}$ (ее алгебра Ли совпадает с $\overline{\mathfrak{g}}$). Команда `LieGroup` пакета `GroupActions` непосредственно строит глобальную группу Ли, алгебра Ли которой задана. Явную формулу для левого умножения элементов группы в координатах получаем с помощью команды `LeftMultiplication`. Находим лево- и правоинвариантные векторные поля на $\overline{G}$. Они вычисляются командой `InvariantVectorsAndForms`. Команда `LieAlgebraData` вычисляет структурные константы для правоинвариантных векторных полей, эти структурные константы совпадают со структурными константами алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$. Фактор группы $\overline{G}$ по подгруппе G (порожденной векторными полями), является трехмерным многообразием. Находим действие группы Ли $\overline{G}$ на многообразии $M=\overline{G}/G$ как композицию проекции, левого умножения dotLeft группы $\overline{G}$ на $\overline{G}$ и сечения. Локальное действие $\overline{G}$ на M вычисляется с использованием команды `InfinitesimalTransformation`. Результат можно проверить, т. к. структурные константы алгебры Ли векторных полей совпадают со структурными константами алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Единица группы $\overline{G}$ проектируется в точку на многообразии M и позволяет найти стабилизатор (подгруппу G), используя команду `IsotropySubalgebra`. Для каждой построенной пары алгебр Ли находим инвариантные аффинные связности, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, используя команды пакета Maple, и определяем, при каких условиях алгебра голономии ненулевая.

Заключение

Разработаны алгоритмы и программы в системе аналитических вычислений для нахождения алгебр голономии инвариантных аффинных связностей на трехмерных однородных пространствах. С их помощью получены новые результаты в теории инвариантных связностей на многообразиях, а именно, найдены все трехмерные однородные пространства, допускающие аффинную связность с ненулевой алгеброй голономии, что эквивалентно описанию соответствующих эффективных пар алгебр Ли, описаны в явном виде тензоры кривизны и кручения и алгебры голономии указанных связностей. Методика исследований ориентирована на использование методов компьютерной алгебры, теории групп и алгебр Ли, однородных пространств.

Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях инвариантных связностей на многообразиях, при изучении свойств однородных пространств, а алгоритмы, разработанные в работе, могут применяться для решения аналогичных задач в других размерностях. Построенные компьютерные модели позволяют вычислять компоненты связности, тензоров кривизны и кручения, алгебры голономии на однородных пространствах.

Литература

1. Алексеевский, Д. В. Группы голономии и рекуррентные тензорные поля в лоренцевых пространствах II / Д. В. Алексеевский // Пробл. теории гравитации и элементарн. частиц. – М. : Атомиздат, 1974. – Вып. 5. – С. 5-17.
2. Кайгородов, В. Р. Полусимметрические лоренцевы пространства с совершенной группой голономии / В. Р. Кайгородов // Гравитация и теория относительн. – Казань : Изд-во Казанского ун-та, 1978. – № 14-15. – С. 113-120.
3. Hall, G. S. Curvature, metric and holonomy in general relativity / G. S. Hall // Differ. Geom. and Appl. Proc. Conf. 24–30 Aug. – 1986. Brno, 1987. – P. 127-136.