

УДК 621.396.96

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ УСЛОВИЙ НАБЛЮДЕНИЯ НА ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ФИЛЬТРОВ КАЛМАНА ПРИ НАБЛЮДЕНИИ ОБЪЕКТОВ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

А.С. СОЛОНАР, П.А. ХМАРСКИЙ

*Военная академия Республики Беларусь
Минск, 220057, Беларусь**Поступила в редакцию 5 мая 2014*

Оценена точность аппроксимации гауссовской плотности вероятности при переходе из прямоугольных координат в полярные для различных условий наблюдения. Представлены результаты исследований по оценке влияния условий наблюдения на показатели качества различных модификаций дискретных фильтров Калмана.

Ключевые слова: метод линеаризации, плотность вероятности, метод Монте-Карло, сопровождение летательных аппаратов, фильтр Калмана при косвенных измерениях.

Введение

Одной из важнейших задач радиолокации является сопровождение – оценивание траекторных параметров движущегося объекта по данным радиолокационного наблюдения удаленного объекта. Сопровождение воздушных объектов, как правило, осуществляется в прямоугольной системе координат (СК) при наблюдении полярных координат. Переход от прямоугольных координат к полярным и (или) обратно выполняется при помощи нелинейных функциональных преобразований. При этом прямое использование уравнений дискретного линейного фильтра Калмана (ФК) невозможно. Известен целый ряд модификаций алгоритма работы фильтра Калмана, позволяющих обойти эту проблему [1–5]. В основе данных модификаций лежит метод линеаризации [6–8], позволяющий заменить нелинейные преобразования на линейные в окрестности оценки (разовой или экстраполированной).

На практике широкое распространение получили три модификации фильтра Калмана [3, 6]: при наблюдении полярных координат и фильтрации прямоугольных; при наблюдении коррелированных прямоугольных координат; при наблюдении независимых прямоугольных координат. В первой модификации применяется переход из прямоугольных координат в полярные, в остальных – переход из полярных в прямоугольные. Для некоторых условий наблюдения метод линеаризации не подходит, так как его использование может привести к возникновению значительных ошибок сопровождения. В известной литературе эти условия не конкретизированы. В данной статье приводится окончательная часть результатов исследований, начатых в работе [6]. Она посвящена анализу влияния условий наблюдений на точность измерения дискретных фильтров Калмана при наблюдении полярных координат методом математического моделирования Монте-Карло.

Цель статьи – выявить условия наблюдения, которые будут оказывать существенное влияние на точность измерения модификаций фильтра Калмана при наблюдении полярных координат.

Постановка задачи

Начальные условия. Примем, что вектор наблюдаемых параметров θ_f состоит из разовых оценок радиальной дальности r и азимута β ; данные соответствуют двухкоординатной радиолокационной станции (РЛС) кругового обзора. Ошибки наблюдения представляют собой некоррелированные центрированные случайные величины с корреляционной матрицей (КМ) ошибок измерения:

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix},$$

где σ_r, σ_β – СКО гауссовских ошибок наблюдения радиальной дальности и азимута.

Интервал обновления данных равен T . Наблюдается летательный аппарат (ЛА), летящий с постоянной скоростью по прямолинейной траектории. В оцениваемый вектор состояния α входят разовые оценки прямоугольных координат ЛА: x (направление на север), z (на восток) и скоростей их изменения V_x, V_z .

Рассматриваемые модификации ФК [3, 7]: ФК при наблюдении коррелированных прямоугольных координат; ФК при наблюдении независимых прямоугольных координат; ФК при наблюдении полярных координат и фильтрации прямоугольных координат.

Задачи: 1) методом математического моделирования оценить точность аппроксимации гауссовской плотности вероятности при переходе из прямоугольных координат в полярные; 2) провести сопоставительный анализ результатов фильтрации модификаций ФК.

Особенности применения метода линеаризации в модификациях фильтра Калмана

Структурная схема дискретного ФК при наблюдении полярных координат и фильтрации прямоугольных изображена на рис. 1, *а*. Оценка вектора состояния $\hat{\alpha}_{k+1}$ производится на основе невязки оценки вектора наблюдаемых параметров θ_f и пересчитанного экстраполированного значения вектора состояния $\mathbf{h}(\hat{\alpha}_{0(k+1)})$:

$$\theta = \begin{bmatrix} r \\ \beta \end{bmatrix} = \mathbf{h}(\alpha) = \mathbf{h}(\|x \quad V_x \quad z \quad V_z\|^T) = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + z^2} \\ \arctg(z/x) + (\pi/2)[2 - \text{sgn}(x) - \text{sgn}(x)\text{sgn}(z)] \end{bmatrix} \quad (1)$$

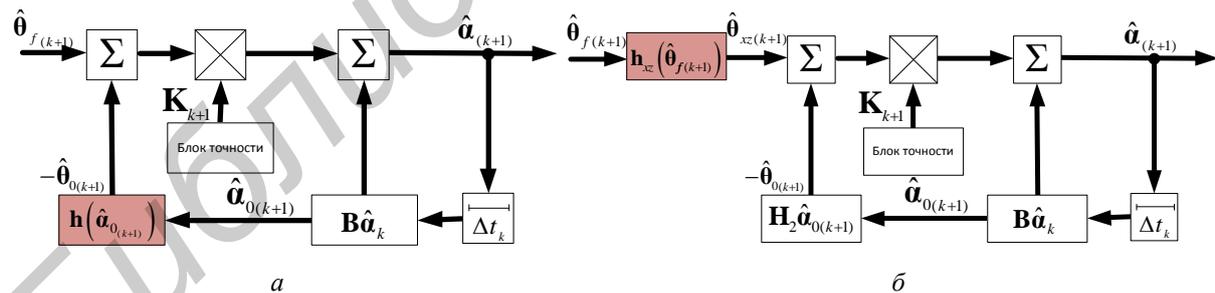


Рис. 1. Структурные схемы алгоритмов фильтрации: *а* – при наблюдении полярных координат и фильтрации прямоугольных; *б* – при наблюдении коррелированных прямоугольных координат

Одновременно с пересчетом математического ожидания (МО) вектора состояния осуществляется пересчет корреляционной матрицы ошибок \mathbf{R}_0 априорной гауссовской плотности вероятности (ПВ) из прямоугольной СК в полярную [3, 7]:

$$\mathbf{R}_{00} = \mathbf{H}_1 \mathbf{R}_0 \mathbf{H}_1^T, \quad \mathbf{H}_1 = \left\| \frac{\partial \mathbf{h}^{(i)}(\alpha)}{\partial \alpha^{(j)}} \right\| = \begin{bmatrix} \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + z_0^2}} & \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + z_0^2}} \\ \frac{x_0}{x_0^2 + z_0^2} & -\frac{z_0}{x_0^2 + z_0^2} \end{bmatrix},$$

где i – номер строки вектор-функции $\mathbf{h}(\cdot)$; $i = (0, \dots, n_0 - 1)$; n_0 – размерность $\boldsymbol{\theta}_f$; j – номер элемента вектора состояния $\boldsymbol{\alpha}$; $j = (0, \dots, n_\alpha - 1)$; n_α – размерность $\boldsymbol{\alpha}$; x_0, z_0 – экстраполированные координаты в прямоугольной СК.

В фильтре Калмана при наблюдении коррелированных прямоугольных координат (рис. 1, б) оценка вектора состояния $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{k+1}$ формируется по результатам наблюдения разовых оценок прямоугольных координат $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{xz(k+1)} = \left\| \hat{x}_{f(k+1)} \quad \hat{z}_{f(k+1)} \right\|^T$. При этом необходимо пересчитать корреляционную матрицу ошибок текущих измерений \mathbf{R}_0 в прямоугольную СК \mathbf{R}_{xz} [6]. Для пересчета оценки вектора наблюдения $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{f(k+1)}$ из полярной СК в прямоугольную $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{xz(k+1)}$ применяется вектор-функция $\mathbf{h}_{xz}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{f(k+1)})$:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{xz(k+1)} = \left\| \hat{x}_{f(k+1)} \quad \hat{z}_{f(k+1)} \right\|^T = \mathbf{h}_{xz}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{f(k+1)}) = \left\| \hat{r}_{(k+1)} \cos(\hat{\beta}_{(k+1)}) \quad \hat{r}_{(k+1)} \sin(\hat{\beta}_{(k+1)}) \right\|^T.$$

В ФК при наблюдении независимых прямоугольных координат считается, что ошибки наблюдений между собой некоррелированы. Подобное допущение позволяет фильтровать прямоугольные координаты x, z отдельно при помощи двух идентичных ФК по каждой прямоугольной координате [2, 3].

Оценка точности аппроксимации гауссовской плотности вероятности при переходе из прямоугольных координат в полярные координаты

Для оценки точности аппроксимации гауссовской плотности вероятности при переходе из прямоугольных координат в полярные координаты и обратно применялся метод Монте-Карло [1, 8, 9]. Этот метод позволяет численно определить неискаженную оценку МО и КМ преобразованной ПВ. Применение метода требует формирования большого числа векторных гауссовских случайных величин (отсчетов) с заданными МО и КМ, после чего каждая случайная величина пересчитывается при помощи нелинейного преобразования $\mathbf{h}(\cdot)$. По пересчитанной совокупности определяются МО и КМ результирующей ПВ.

Результаты применения метода Монте-Карло представлены в верхней части рис. 2. Наблюдается существенное отличие закона распределения результирующей ПВ от гауссовского после нелинейного преобразования (1). Применение метода Монте-Карло позволяет определить отклонение МО и КМ, полученных методом линеаризации, от истинного значения, что показано в нижней части рис. 2. Для приведенного примера наблюдается отклонение оценки МО и значительное искажение эллипса ошибок экстраполяции от истинного значения. При проведении исследований число отсчетов было выбрано 40000.

Для определения степени искажения пересчета параметров гауссовской ПВ методом линеаризации можно применять три показателя качества [6]: суммарная ошибка пересчета МО; ошибка пересчета элементов КМ и состоятельность преобразования.

Суммарная ошибка пересчета МО: $\Sigma = \sqrt{(r_M \cos \beta_M - x_0)^2 + (r_M \sin \beta_M - z_0)^2}$, где β_M, r_M – координаты МО в полярной СК, полученные методом Монте-Карло.

Ошибки пересчета МО по радиальной дальности и азимуту методом линеаризации: $\Delta r_L = |r_M - r_0|$, $\Delta \beta_L = |\beta_M - \beta_0|$, где β_0, r_0 – координаты МО в полярной СК, полученные методом линеаризации.

Ошибки пересчета элементов КМ экстраполяции методом линеаризации:

$$\Delta R_r = |R_{rM} - R_{rL}|, \quad \Delta R_\beta = |R_{\beta M} - R_{\beta L}|, \quad \Delta R_{r\beta} = |R_{r\beta M} - R_{r\beta L}|,$$

где $R_{rM}, R_{\beta M}, R_{r\beta M}$ – элементы КМ, полученной методом Монте-Карло, в полярной СК по радиальной дальности, азимуту и взаимной корреляции радиальной дальности и азимута; $R_{rL},$

$R_{\beta L}$, $R_{r\beta L}$ – элементы КМ, полученной методом линеаризации, в полярной СК по радиальной дальности, азимуту и взаимной корреляции радиальной дальности и азимута.

$$\text{Состоятельность преобразования [6]: } \eta = \text{tr} \left(\left((\mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_M) (\mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_M)^T + \mathbf{R}_0 \right) \mathbf{R}_M^{-1} \right),$$

где \mathbf{m}_0 – МО в полярной СК, полученное методом линеаризации; \mathbf{m}_M – МО в полярной СК, полученное методом Монте-Карло; \mathbf{R}_0 – КМ в полярной СК, полученная методом линеаризации; \mathbf{R}_M – КМ в полярной СК, полученная методом Монте-Карло.

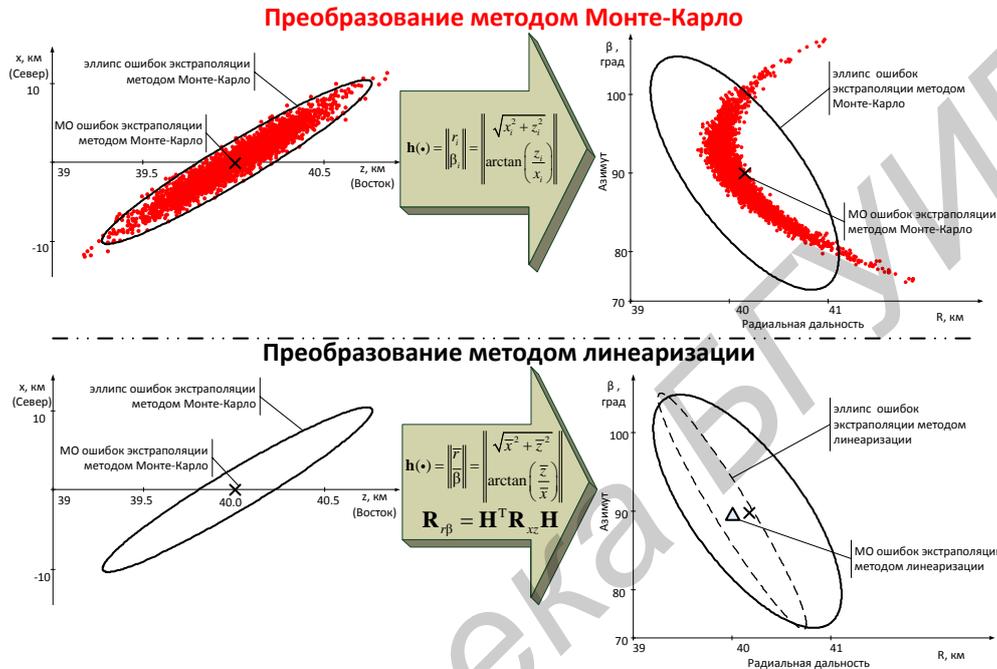


Рис. 2. Преобразование плотности вероятности при наблюдении полярных координат и фильтрации прямоугольных координат

Условия наблюдения при проведении модельных экспериментов по оценке точности аппроксимации ПВ представлены в табл. 1. Для адекватного расчета параметров исходной ПВ в прямоугольной СК задавались следующие параметры (см. рис. 3): \bar{r} , $\bar{\beta}$ – МО дальности и азимута (определяют МО ПВ); σ_r , σ_β – СКО по дальности и азимуту двумерной некоррелированной ПВ в полярной СК; φ – угол поворота ПВ.

По заданным \bar{r} , $\bar{\beta}$, σ_r , σ_β рассчитываются эквивалентные параметры исходной ПВ в прямоугольной СК $\tilde{\sigma}_x$ и $\tilde{\sigma}_z$, после чего определяется КМ R_{xz} исходной ПВ с учетом угла поворота φ [7, 8]:

$$R_{xz} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overbrace{\sigma_r^2 \cos^2 \bar{\beta} + \sigma_\beta^2 \bar{r}^2 \sin^2 \bar{\beta}}^{\tilde{\sigma}_x} & 0 \\ 0 & \underbrace{\sigma_r^2 \sin^2 \bar{\beta} + \sigma_\beta^2 \bar{r}^2 \cos^2 \bar{\beta}}_{\tilde{\sigma}_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^T.$$

По результатам проведенных исследований можно сделать следующие выводы: 1) условия наблюдения оказывают существенное влияние на ошибки аппроксимации методом линеаризации; 2) при фиксированной дальности наблюдается сложный характер изменения ошибки аппроксимации при изменении $\bar{\beta}$ и φ . Ошибка минимальна (стремится к нулю) в случае когда угол γ между одной из осей эллипса ошибок и линией визирования равен 90° . При приближении угла γ к 45° , максимальные значения ΔR_r , ΔR_β могут достигать $(2-3)\sigma_\beta$ и

(2–8) σ_r , соответственно, а значения Δr_L и $\Delta \beta_L$ будут достигать (0,5–3) σ_r , (0,1–0,5) σ_β соответственно; 3) увеличение σ_β и \bar{r} приводит к существенному нелинейному росту всех составляющих ошибок аппроксимации; 4) увеличение σ_r на больших дальностях ($\bar{r} \gg \sigma_r$) не приводит к росту ошибок аппроксимации.

Таблица 1. Условия наблюдения при проведения модельных экспериментов

| Эксперимент | \bar{r} | $\bar{\beta}$ | σ_r | σ_β | φ |
|--|-----------|---------------|---------------|----------------|-----------|
| Влияние изменения коэффициента взаимной корреляция прямоугольных координат | 100 км | 90° | 100 м | 25', 40' | 0° |
| Влияние изменения азимута | 100 км | 0°–360° | 100 м | 25', 40' | 0° |
| Влияние изменения радиальной дальности | 4–200 км | 90° | 100 м | 40' | 0° |
| Влияние изменения угла курса ЛА | 100 км | 90° | 100 м | 60', 70' | 0°–360° |
| Влияние эквивалентного углового размера эллипса ошибок экстраполяции | 100 км | 90° | 100 м, 500 м. | 10'–180' | 0° |

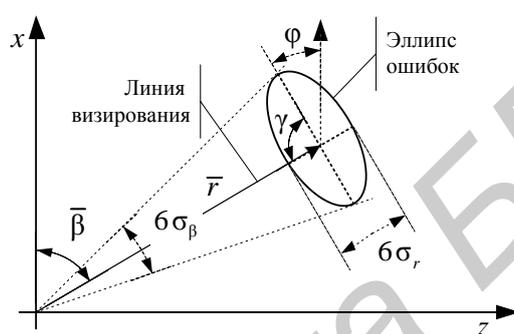


Рис. 3. Пояснение построения эллипса ошибок

Влияние ошибок аппроксимации плотности вероятности на качество фильтрации

Методика исследования влияния условий наблюдения на показатели качества фильтрации модификаций ФК при наблюдении полярных координат ЛА включала в себя этапы [6]: определение показателей качества; разработка комплекса математического моделирования для анализа выбранных показателей качества; определение условий моделирования; математическое моделирование и сопоставительный анализ.

Показателем качества фильтрации модификаций ФК было выбрано нормированное СКО суммарной ошибки измерения местоположения $\Delta_\Sigma(k)$ [3, 4, 6]. Нормировка применялась к СКО текущих оценок. В ходе моделирования каждого модельного эксперимента результаты усреднялись по 5000 опытных реализаций. Период обзора РЛС равнялся 10 с.

Для сопоставительного моделирования качества фильтрации модификаций ФК использовался комплекс математического моделирования, описанный в [3, 4, 6]. Скорость ЛА являлась постоянной и равнялась 1000 км/ч. Условия наблюдения при проведении модельных экспериментов по сопоставлению показателей качества различных ФК представлены в табл. 2. Траектории при проведении модельных экспериментов изображены на рис. 4, а–в. Параметры траектории (r_H , β_H – дальность и азимут начала траектории; α – угол курса, как угол между направлением на север и направлением полета) выбирались таким образом, чтобы на 40-м шаге обновления данных ЛА пролетал на дальности 100 км от РЛС с азимутом 90° – такой выбор гарантирует завершение всех переходных процессов, происходящих в модификациях ФК.

Таблица 2. Условия наблюдения при проведении модельных экспериментов по сопоставлению результатов работы модификаций ФК

| Эксперимент | r_H | β_H | σ_r | σ_β | α |
|--|-----------|-----------|------------|----------------|----------|
| Влияние изменения курса ЛА | 100 км | 90° | 100 м | 25', 70' | 0°–360° |
| Влияние изменения СКО ошибок измерения азимута | 100 км | 90° | 100 м | 10'–180' | 45° |
| Влияние изменения начальной радиальной дальности до ЛА | 10–200 км | 90° | 100 м | 25', 70' | 45° |

Влияние изменения курса ЛА. Траектории ЛА изображены на рис. 4, а. На рис. 5, а, б представлены значения суммарной ошибки измерения местоположения для различных значений СКО ошибки измерения азимута. Учет взаимной корреляции приводит к выигрышу до 12 %, что подтверждает проведенные исследования в работе [3]. Для меньшего значения СКО ошибки измерения азимута, максимальное значение суммарной ошибки наблюдается для значений курса равных 90° и 270° . Это поясняется максимальным значением ошибки аппроксимации МО методом линеаризации.

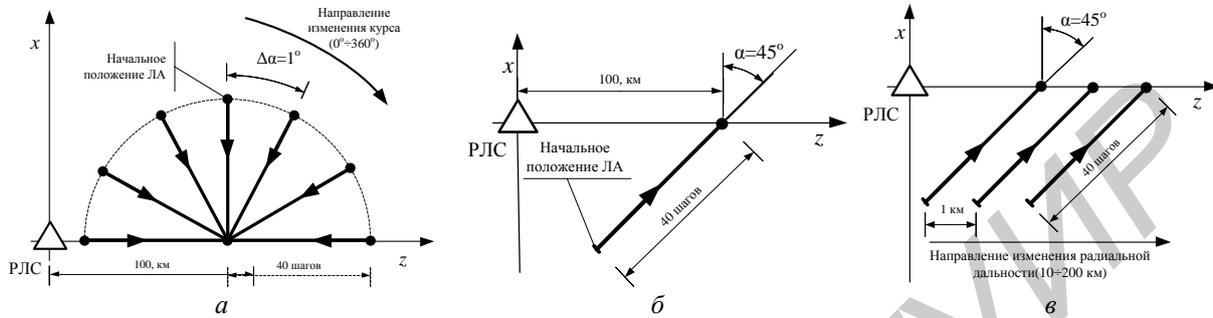


Рис. 4. Условия проведения модельных экспериментов: а – влияние изменения угла курса; б – влияние изменения СКО ошибки измерения азимута; в – влияние изменения начальной радиальной дальности

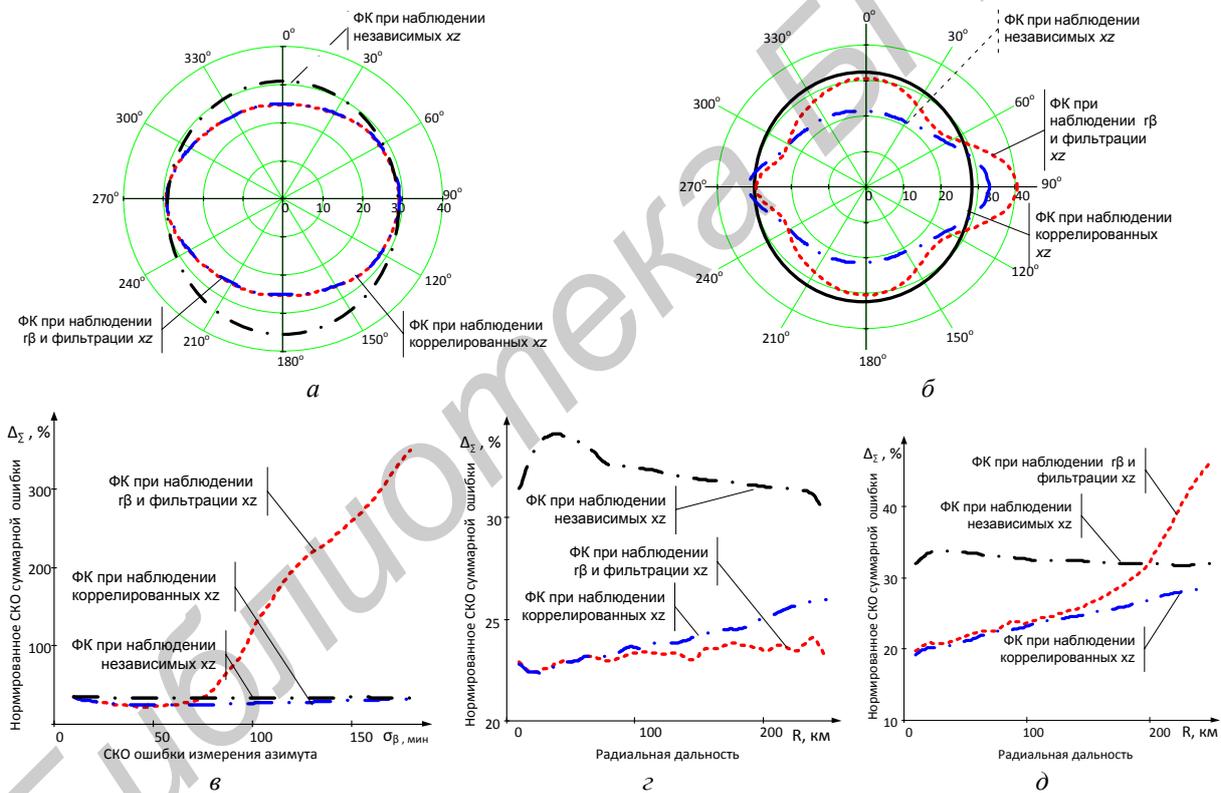


Рис. 5. Значение нормированной суммарной ошибки измерения местоположения при изменении угла курса: а – $\sigma_\beta=25'$; б – $\sigma_\beta=70'$; в – при изменении СКО ошибки измерения азимута; при изменении радиальной дальности; г – $\sigma_\beta=25'$; д – $\sigma_\beta=70'$

Влияние изменения СКО ошибок измерения азимута. Траектория для проведения данного модельного эксперимента изображена на рис. 4, б. Результаты моделирования представлены на рис. 5, в. Как и в предыдущем модельном эксперименте, условия проведения выбраны таким образом, чтобы ЛА пролетал на 40-ом шаге наблюдения радиальную дальность 100 км от РЛС и азимут 90° . Учет взаимной корреляции для таких условий наблюдения приводит к выигрышу до 15 %. Надо отметить, что при значительном росте ошибок аппроксимации (при увеличении σ_β) наблюдается срыв сопровождения в ФК при наблюдении полярных координат и фильтрации прямоугольных координат. Фильтры Калмана при

наблюдении коррелированных прямоугольных координат и при наблюдении независимых прямоугольных координат устойчивы к росту σ_β , т.к. для них ошибки аппроксимации не существенны по сравнению с первой модификацией ФК.

Влияние изменения начальной радиальной дальности до ЛА. Траектории для проведения данного модельного эксперимента изображена на рис. 4, в. Результаты представлены на рис. 5, г–д для различных значений СКО ошибки измерения азимута – 25' и 70'. ФК при наблюдении независимых прямоугольных координат проигрывает лучшим показателям до 15%. Увеличение дальности до цели приводит к росту ошибок аппроксимации и соответственно к срыву сопровождения ФК при наблюдении полярных координат и фильтрации прямоугольных координат на больших дальностях. Здесь требуется отметить, что в этой модификации параметры фильтра (участвующие в пересчете) согласованы с параметрами РЛС. Для предотвращения срыва сопровождения в уравнениях пересчета можно применять увеличенные значения σ_r, σ_β . Но в этом случае будет наблюдаться рост ошибок аппроксимации на всей дистанции и, как следствие, рост ошибок фильтрации.

Заключение

Для некоторых условий радиолокационных наблюдений метод линеаризации не подходит по причине возникновения значительных ошибок аппроксимации. Увеличение ошибок аппроксимации напрямую влияет на результаты работы алгоритмов фильтрации. Наиболее сильное влияние на изменение ошибок аппроксимации и точность измерения модификаций ФК оказывают: СКО ошибки измерения азимута, радиальная дальность до ЛА, курс ЛА. СКО ошибки измерения радиальной дальности оказывает незначительное влияние на ошибки аппроксимации методом линеаризации. Учет взаимной корреляции прямоугольных координат приводит к выигрышу по точности до 15%.

THE CONDITIONS OF OBSERVATION RESEARCH FOR EXTENDED KALMAN FILTER GOODNESS-OF-FIT USING MONTE-CARLO METHOD

A.S. SOLONAR, P.A. KHMARSKI

Abstract

Accuracy of approximation Gaussian probability density at conversion of measurements from Cartesian coordinates to polar for various conditions of observation is estimated using Monte-Carlo method. Conditions of observation research for extended Kalman filter goodness-of-fit are presented.

Список литературы

1. Бар-Шалом Я., Ли Х.Р. Траекторная обработка. Принципы, способы и алгоритмы. М., 2011.
2. Blackman S. Design and analysis of modern tracking systems. Boston, 1999.
3. Солонар А.С., Хмарский П.А. // Докл. БГУИР. 2012. № 7. С 47–53.
4. Солонар А.С., Хмарский П.А. // Докл. БГУИР. 2013. № 2. С. 79–85.
5. Степанов О.А., Торопов А.Б. // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2012. Вып. 7. С. 172–189.
6. Солонар А.С., Хмарский П.А. // Приложение к журналу «Известия НАН РБ». 2014. № 2. С. 102–109.
7. Ширман Я.Д. Радиозлектронные системы: Основы построения и теория. М., 2007.
8. Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Часть 1. Введение в теорию оценивания. СПб, 2010.
9. Горшков С.А., Параневич А.В., Солонар А.С. // Докл. БГУИР. 2012. № 1. С 22–29.