О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ КЛАССИФИКАЦИИ (ПСЕВДО)РИМАННОВЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Грабко А. Н., Боровский М. А.
Кафедра программного обеспечения информационных технологий, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектороники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: softforlutshix@gmail.com, maksim.borovskij@yandex.ru

В случае малой размерности для изучения (псевдо)римановых однородных многообразий применяются методы компьютерной математики. В данной работе рассмотрены некоторые из них. Первый метод основан на исследовании инвариантных тензорных полей с помощью анализа структурных констант алгебры Ли группы изометрий и компонент метрического тензора. Второй метод основан на изучении пространства орбит левоинвариантных римановых метрик групп Ли и анализе структурных констант базисов Милнора для (псевдо)римановых однородных многообразий.

Введение

(Псевдо)римановы многообразия исследовались многими математиками. Данный класс пространств содержит многообразия Эйнштейна ($r = \lambda g$) и их прямые произведения, локально симметричные пространства ($\nabla R = 0$), Риччи параллельные многообразия ($\nabla r = 0$) и конформно плоские многообразия ($\mathrm{W} = 0$) (см. [1]).

В случае малой размерности для изучения (псевдо)римановых однородных многообразий применяются различные методы компьютерной математики. Один из них основаный на анализе структурных констант алгебры Ли группы изометрий и компонент метрического тензора, предпологает последовательное рассмотрение всех возможных типов Сегре оператора Риччи для данного пространства (см. [2]). Так же существует альтернативный подход, основанный на обобщенных базисах Милнора.

I. Основные определения

Тензор Схоутена–Вейля SW (псевдо)риманова многообразия (M, g) размерности $n \geq 3$ определяется формулой:

$$SW(X, Y, Z) = \nabla_Z A(X, Y) - \nabla_Y A(X, Z)$$

где $A = \frac{1}{n-2}\left(r - \frac{sg}{2(n-1)}\right)$ – тензор одномерной кривизны (тензор Схоутена), s – скалярная кривизна. Если $n \geq 4$, то тензор Схоутена–Вейля связан с связан с дивергенцией тензора Вейля через уравнение (см. [1]):

$$SW = -(n-3) divW$$

Если скалярная кривизна является константой, то следующие условия эквивалентны:

$$SW = 0 \Rightarrow \nabla_Z r(X, Y) = \nabla_Y r(X, Z) \qquad (1)$$

Ключевым шагом к решению проблемы классификации однородных (псевдо)римановых многообразий с нулевым тензором Схоутена–Вейля является последовательное рассмотрение всех возможных типов Сегре оператора Риччи.

Пусть $(M = G/H, g)$ – однородное (псевдо)риманово многообразие размерности m. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G, через $\mathfrak{h}$ – подалгебру изотропии, а через $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (необязательно редуктивное) – дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$.

Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ однозначно определяет представление изотропии $\phi : \mathfrak{h} \to gl(\mathfrak{m})$ правилом $\phi_X(Y) = [X, Y]_{\mathfrak{m}}$. Инвариантной (псевдо)римановой метрике на G/H соответствует невырожденная билинейная форма g на $\mathfrak{m}$ такая, что:

$$(\phi_X)^t * g + g * \phi_x = 0, \forall X \in \mathfrak{h} \qquad (2)$$

где $(\phi_X)^t$ – транспонированная матрица. Эта форма однозначно определяет связность Леви–Чивита $\nabla : \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{m})$ правилом

$$\nabla_X(Y_{\mathfrak{m}}) = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}} + v(X, Y)$$

где отображение $v : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{m}$ определяется формулой

$$2g(v(X, Y), Z_{\mathfrak{m}}) = g(X_{\mathfrak{m}}, [Z, Y]_{\mathfrak{m}}) + g(Y_{\mathfrak{m}}, [Z, X]_{\mathfrak{m}})$$

Тензору кривизны связности ∇ соответствует отображение $R : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to gl(\mathfrak{m})$ такое, что

$$R(X, Y) = [\nabla_Y, \nabla_X] + \nabla_{[X,Y]}$$

Тензор Риччи r определяется формулой

$$r(x) = tr(Z \to R(X, Z)Y)$$

II. Алгоритм на основе анализа группы изометрий

Пусть $e_1, e_2, ..., e_h, u_1, u_2, ..., u_m$ – базис $\mathfrak{g}$, где e_i и u_i базисы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно. Положим

$$[u_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = c_{ij}^k u_k, [u_i, u_j]_{\mathfrak{h}} = C_{ij}^k e_k,$$

$$[h_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = \overline{c}_{ij}^k u_k$$

где $c_{ij}^k, C_{ij}^k, \overline{c}_{ij}^k$ – массивы соответствующих размеров.

Первым шагом вычислим представление изотропии ϕ на базисных векторах $\mathfrak{h}$:

$$(\phi_i)_j^k = (\phi(e_i))_j^k = \overline{c}_{ij}^k$$

и запишем систему уравнений (2).

Далее, с помощью уже известных структурных констант и матрицы метрического тензора, найдем компоненты связности Леви–Чивита ∇:

$$T_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(c_{ij}^k + g^{sk} c_{sj}^l g_{il} + g^{sk} c_{si}^l g_{jl}\right),$$

$$\overline{T}_{ij}^k = \frac{1}{2}\overline{c}_{ij}^k - \frac{1}{2} g^{sk} c_{is}^{-l} g_{jl}$$

где $\nabla_{u_i} u_j = T_{ij}^k, \nabla_{h_i} u_j = \overline{T}_{ij}^k$ и g^{ij} – матрица, обратная к матрице $\{g_{ij}\}$.

Следующим шагом является вычисление компонент тензора кривизны R и тензора Риччи r:

$$R_{ijks} = (T_{ij}^l T_{jl}^p - T_{jk}^l T_{il}^p + c_{ij}^l T_{lk}^p + C_{ij}^l \overline{T}_{lk}^p) g_{ps},$$

$$r_{ik} = R_{ijks} g^{js}$$

Далее находятся компоненты ковариантной производной тензора Риччи

$$r_{ij,k} = r_{sj} T_{ki}^s + r_{is} T_{kj}^s$$

и выписывается система уравнений (1): $r_{ij,k} = r_{ik,j}$, которая дополняется системой (2) и условием выполнения тождества Якоби. Полученная система решается относительно структурных констант алгебры Ли.

Описание и пример применения данного алгоритма для классификации пространств размерности 4 приводится в статье [2]. Также отметим, что данный алгоритм отличается от техники использования обобщенных базисов Милнора (см. [3]).

III. Алгоритм на основе обобщенных базисов Милнора

Основным инструментом построения обобщенных базисов Милнора будет теорема, доказанная в [4].

Пусть

$$\overline{\mathfrak{M}} \cong GL_n(\mathbb{R})/O(n)$$

где $\mathfrak{M}$ – множество классов эквивалентности $\overline{\mathfrak{M}}$ о отношению изометрии метрик, $\mathfrak{BM}$ – множество классов эквивалентности $\overline{\mathfrak{M}}$ по отношению изометрии метрик с точностью до умножения на константу.

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, $\langle *, * \rangle_0$ – скалярное произведение в $\mathfrak{g}$, $\{e_1, ..., e_n\}$ – ортонормированный базис алгебры относительно данного скалярного произведения, $\mathfrak{U}$ – множество представителей $\mathfrak{BM}$.

Тогда для любого скалярного произведения $\langle *, * \rangle_0$ в алгебре $\mathfrak{g}$ уществуют константа $\lambda > 0$, автоморфизм $\phi \in Aut(\mathfrak{g})$ и представитель $g \in \mathfrak{U}$ такие, что базис:

$$\{\phi g e_1, ..., \phi g e_n\}$$

ортонормирован относительно $\lambda * \langle *, * \rangle$ (обобщенный базис Милнора).

Рассмотрим применение данной теоремы на примере решения задачи об изотропности тензора Вейля (см. [5]). Приведем алгоритм решения задачи на основе обобщенных базисов Милнора.

1. Из классификации [6] находим вид ненулевых скобок Ли.
2. С помощью уравнения (1) выписываем матрицу метрического тензора.
3. Находим компоненты тензора Вейля W, используя обобщенный базисы Милнора.
4. Вычисляем квадрат длины тензора Вейля, $\|W\|^2$
5. Решаем систему уравнений $\|W\|^2 = 0, W \neq 0$.

Пример и результаты применения данного алгоритма в случае пространства размерности 3 приведены в работе [5].

Выводы

В данной работе рассмотрены основные методы исследования (псевдо)риманновых однородных пространств с применением систем компьютерной алгебры. Область применения данных методов ограничена условием малой размерности пространств. Для решения задачи в общем случае необходима разработка новых методов и алгоритмов.

Список литературы

1. Besse, A. Einstein manifolds / A. Besse // Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg. – 1987.
2. Клепиков, П. Применение систем компьютерной математики к исследованию однородных (псевдо)римановых многообразий с тривиальным тензором Схоутена–Вейля // П. Н. Клепиков // Известия АлтГУ. – 2018.
3. Milnor, J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // J. Milnor // Adv. Math. – 1976. – Vol. 21.
4. Alekseevskiy, D. Groups of conformal transformations of Riemannian spaces //
5. Клепикова, С. Локально однородные псевдоримановы многообразия размерности 4 с изотропным тензором Вейля / С. В. Клепикова, О. П. Хромова // Известия АлтГУ. – 2018. D. V. Alekseevskiy // Math. Sb. – 1985. – V. 89, No 1.
6. Komrakov, B. Einstein–Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces // B. B. Komrakov // Lobachevskii J. Math. – 2001. – V. 8.