ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СВЯЗНОСТЯМИ НЕНУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

Можей Н. П.
Кафедра программного обеспечения информационных технологий, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлекторопики
Минск, Республика Беларусь
E-mail: mozhey@bsuir.by

В работе проводится описание инвариантных аффинных связностей ненулевой кривизны на трехмерных однородных пространствах. Используется алгебраический подход к проблеме исследования однородных пространств с аффинными связностями, а также соединение различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств. Полученные результаты могут быть использованы в дифференциальной геометрии, теории дифференциальных уравнений, топологии, в теории представлений и теоретической физике.

Введение

Решение задач классификации однородных пространств, описания инвариантных аффинных связностей на однородных пространствах сегодня важно как для самой теории, так и для приложений, однако эти задачи не были решены даже в малых размерностях. Важный подкласс среди всех однородных пространств формируют изотропно-точные пространства. В частности, этот подкласс содержит все однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность. Инвариантные связности на однородных пространствах независимо изучались П. К. Рашевским, М. Куритой, Е. Б. Винбергом и Ш. Кобаяши, К. Номидзу [1]. Рассматриваемая тема имеет также многочисленные приложения, например, связности – важный физический объект, к которому приводит геометрическая формулировка теории поля, А. З. Петров [2] дал алгебраическую классификацию полей тяготения, связанную со структурой тензора кривизны пространства. Инвариантные аффинные связности на трехмерных однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований изучались в работе [3]. В данной работе изучаются однородные пространства, допускающие связности только ненулевой кривизны.

Описание однородных пространств и связностей на них

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M,\ \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G},\ G)$, где $G \subset \bar{G}$, так как M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$. Изучая однородные пространства, важно рассматривать не саму группу $\bar{G}$, а ее образ в $Diff(M)$, т. е. достаточно изучать только эффективные действия группы $\bar{G}$ на многообразии M. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\ \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. *Изотропное действие* группы G на касательном пространстве T_xM – это фактор-действие присоединенного действия G на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s.(x+\mathfrak{g}) = (Ads)(x) + \mathfrak{g}$ для всех $s \in G$, $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. При этом алгебра $\mathfrak{g}$ действует на $T_xM = \bar{\mathfrak{g}}\ /\mathfrak{g}$ следующим образом: $x.(y + \mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\ \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Это означает, что естественное действие стабилизатора $\bar{G}_x$, $x \in M$ на T_xM имеет нулевое ядро. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и фактор-пространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}\ /\mathfrak{g}$. *Аффинной связностью* на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\ \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M,\ \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\ \mathfrak{g})$. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$. Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем, эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензоры кручения $T \in InvT^1_2(\mathfrak{m})$ и кривизны $R \in InvT^1_3(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют соответственно вид $T(x_\mathfrak{m}, y_\mathfrak{m}) = \Lambda(x)y_\mathfrak{m} - \Lambda(y)x_\mathfrak{m} - [x, y]_\mathfrak{m}$, $R(x_\mathfrak{m}, y_\mathfrak{m}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$. Переформулируем теорему Вана об алгебре группы голономии инвариантной связности: алгебра Ли группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3,\ \mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\ \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\ \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] +$

..., где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])|x,y\in\bar{\mathfrak{g}}\}$.

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1,...,e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n=\dim\bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что подалгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается векторами $e_1,...,e_{n-3}$, а $\{u_1=e_{n-2},u_2=e_{n-1},u_3=e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$. Поскольку ограничение $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, связность определяется своими значениями на $\mathfrak{m}$. Выпишем ее через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$.

Прямыми вычислениями получаем, что, например, все трехмерные однородные пространства, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы, допускающие связности только ненулевой кривизны, локально имеют следующий вид:

3.5.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	e_2	e_1
u_2	0	$-u_1$	u_3	$-e_2$	0	e_3
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	$-e_1$	$-e_3$	0

,

3.4.3	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$-e_2$	e_1
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	e_2	0	e_3
u_3	u_3	$-u_2$	0	$-e_1$	$-e_3$	0

,

5.2.3	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	u_2	0	0
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0	$u_1+\alpha e_4$
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0	$u_2+\alpha e_5$
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	αu_1-e_4
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0	0	αu_2-e_5
u_3	0	0	0	$-u_1-\alpha e_4$	$-u_2-\alpha e_5$	$-\alpha u_1+e_4$	$-\alpha u_2+e_5$	0

, $\alpha\geq 0$,

6.1.3.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	e_5	$-e_6$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	e_5	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	e_6	0	u_2	0	0
e_4	0	0	0	0	e_5	e_6	u_1	u_2	0
e_5	$-e_5$	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	u_1
e_6	e_6	$-e_5$	0	$-e_6$	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$-e_5$
u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-e_6$
u_3	0	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	e_5	e_6	0

Аффинная связность в этих случаях имеет вид:

3.4.3. $$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

3.5.2. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & -p_{2,3} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{2,3} & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

6.1.3. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix},$$

5.2.3. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1}+q_{2,3} \end{pmatrix}.$$

Заключение

Проведена локальная классификация трехмерных однородных пространств, допускающих связности только ненулевой кривизны. Описаны все инвариантные аффинные связности на каждом найденном однородном пространстве.

В работе используется алгебраический подход к проблеме исследования однородных пространств с аффинными связностями, а также соединение различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.

Полученные результаты могут быть использованы не только в различных разделах математики, но и в классической и квантовой механике, квантовой теории поля и других областях теоретической физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах.

Список литературы

1. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces/ K. Nomizu// Amer. J. Math.– 1954.– Vol. 76.– P. 33–65.
2. Petrov, A. Z. New methods in the general theory of relativity/ A. Z. Petrov.– M., 1966.
3. Mozhey, N. P. Invariant affine connections on three-dimensional homogeneous spaces with non-solvable transformation group/ N. P. Mozhey// Lobachevskii Journal of Mathematics.–2014.– Vol. 35.– P. 218–240.