МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ВОЛЬФА

Тумилович С.И.
Кафедра вычислительных методов и программирования
Научный руководитель: Колосов С.В., профессор, д-р физ.-мат. наук, доцент
e-mail: kolosov@bsuir.by

***Аннотация* — В работе рассматривается реализация в среде программирования Delphi метода оптимизации Вольфа. Этот метод является методом первого порядка, но он строит квадратичную аппроксимацию целевой функции вблизи опорной точки на основе симплекса. Это обеспечивает ему скорость сходимости к минимуму близкую к методу второго порядка Ньютона-Рафсона**

Ключевые слова: методы оптимизации, минимизация целевой функции, симплекс, градиент

Методы оптимизации 1-го порядка требуют для своей реализации расчета не только значения целевой функции - J(**X**), но и расчета градиента от этой функции по поисковым параметрам **g**(**X**)=grad$_x$J(**X**)= $\nabla_x J(X)$.

Метод Вольфа [1] основывается на построении начального n+1 - мерного симплекса, расчета в вершинах симплекса значений целевой функции и градиентов и вычисления новой вершины симплекса по квадратичной аппроксимации целевой функции.

Алгоритм метода Вольфа следующий.

{{{ Начало алгоритма.

1) Относительно начальной точки $\mathbf{X}_{init}$ случайным образом определяются n+1 вершины симплекса в гиперкубе с ребром $\Delta\mathbf{X}_{init}$. В вершинах этого симплекса вычисляются значения целевой функции и градиента: J($\mathbf{X}_k$), $\nabla_x J(X_k)$, k=1..n+1.

2) Решается относительно параметров λ_k следующая система линейных алгебраических уравнений n+1 порядка:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k\cdot\nabla_x J(X_k)=0,\\&\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k=1.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Определяется новая вершина симплекса

$$\mathbf{X}_{new}=\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k\cdot\mathbf{X}_k.\qquad(2)$$

Среди всех старых вершин симплекса находится такая с номером j в которой значение целевой функции максимально, т.е.

$$J(\mathbf{X}_j)>J(\mathbf{X}_k),\ k=1..n+1.\qquad(3)$$

Если J($\mathbf{X}_{new}$)>J($\mathbf{X}_j$), то полагаем

$\mathbf{X}_{Init}=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\mathbf{X}_k$ и переходим к пункту 1),

иначе заменяем j-ю вершину на новую $\mathbf{X}_j=\mathbf{X}_{new}$ и переходим к следующему пункту.

3) Если $\left|\sum_{k=1}^{n+1}\left(X_k-X_{new}\right)\right|>\varepsilon$, то переходим к пункту 2), иначе поиск заканчивается.

}}} Конец алгоритма.

Для доказательства правомерности формулы (2), представим квадратичную целевую функцию в виде следующего ряда Тейлора относительно точки X_{new}, в которой мы предполагаем находится минимум целевой функции:

$$J(\mathbf{X}_k)=J(\mathbf{X}_{new})+(\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{new})^T G(\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{new})/2.\qquad(4)$$

Градиент в точке $\mathbf{X}_k$ определяется как

$$\nabla_x J(X_k)=G\cdot(\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{new}).\qquad(5)$$

Подставив (5) в (1) получим:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k\cdot G\cdot\left(\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{new}\right)=0,\ \textit{или}\\&G\cdot\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{new}\cdot\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k\right)=0.\end{aligned}\qquad(6)$$

Считая, что G ненулевая матрица и учитывая соотношение (1), получаем искомую формулу (2), которая указывает на точку минимума квадратичной целевой функции.

Метод Вольфа хорошо сходится, как и метод Ньютона, на функциях близких к квадратичным, на не квадратичных функциях метод Вольфа неустойчив. Его можно, как и метод Ньютона, модифицировать, введя процедуру поиска минимума вдоль направления $\mathbf{P}=\mathbf{X}_{new}-\mathbf{X}_j$ в пункт 2) алгоритма метода Вольфа. Можно ожидать, что такое дополнение улучшит устойчивость метода Вольфа, как это наблюдается в методе Ньютона-Рафсона [2].

[1] Wolfe Ph. The simplex method for quadratic programming //
[2] Econometrica. – 1959. – V.27.
[3] Broyden C.G. Mathematics of computation, 1966,v.21,№99, p.99