

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики

РЯДЫ. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики
и радиоэлектроники в качестве пособия для специальностей
I ступени высшего образования, закрепленных за УМО*

Минск БГУИР 2019

УДК 517.5(075)
ББК 22.161я73
Р98

Авторы:

Е. А. Баркова, Н. И. Кобринец,
Е. Н. Конюх, Н. Л. Новротская, Т. С. Степанова

Рецензенты:

кафедра цифровых систем и технологий государственного
учреждения образования «Институт бизнеса
Белорусского государственного университета»
(протокол №7 от 18.01.2019);

доцент кафедры высшей математики учреждения образования
«Белорусский государственный экономический университет»
кандидат физико-математических наук, доцент А. В. Конюх

Ряды. Теория функций комплексной переменной. Операционное
Р98 исчисление : пособие / Е. А. Баркова [и др.]. – Минск : БГУИР, 2019. –
112 с. : ил.
ISBN 978-985-543-523-6.

Пособие включает практические занятия по разделам курса высшей математики: ряды, теория функций комплексной переменной, операционное исчисление, изучаемым в третьем семестре. Изложены способы решения характерных и типовых задач. Предложены задачи для самостоятельного решения и контрольные работы.

УДК 517.5(075)
ББК 22.161я73

ISBN 978-985-543-523-6

© УО «Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники», 2019

Занятия 1–2

Ряд и его сумма. Знакоположительные ряды

Пример 1. Написать простейшую формулу n -го члена для следующих рядов:

а) $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \dots$; б) $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \dots$;

в) $1 + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$.

Δ а) $a_n = \frac{n+2}{(n+1)^2}$; б) $a_n = \frac{n}{2^{n-1}}$;

в) $a_1 = 1, a_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n!}, n = 2, 3, 4, \dots$. ▲

Пример 2. По первым трем членам ряда $1 + 3 + 7 + \dots$ восстановить его общий член сначала в наипростейшей форме, а затем в виде $a_n = an^2 + bn + c$.

Δ Простейшей формулой общего члена ряда будет $a_n = 2^n - 1$. Пусть $a_n = an^2 + bn + c$. Полагая $n = 1, 2, 3$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a + b + c = 1, \\ 4a + 2b + c = 3, \\ 9a + 3b + c = 7. \end{cases}$$

Решая ее, находим $a = 1, b = -1, c = 1$. Таким образом, $a_n = n^2 - n + 1$. ▲

Пример 3. Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их суммы:

а) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 5n + 6}{n^2 + 5n + 4}$.

Δ а) Очевидно, что $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \\ &= \frac{1}{3} \left(\left(1 - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right). \end{aligned}$$

Теперь легко видеть, что последовательность частичных сумм сходится, а значит, сходится данный числовой ряд, его сумма

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3}.$$

б) Найдем предел последовательности частичных сумм этого ряда:

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n ((\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) - (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{4} + \dots + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - \\ &- (\sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{2} + \sqrt{n+2} + 1 - \sqrt{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \sqrt{2} + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \right) = 1 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

в) Запишем общий член ряда в виде $\ln \frac{n^2 + 5n + 6}{n^2 + 5n + 4} = \ln \frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+4)} =$
 $= (\ln(n+2) - \ln(n+1)) - (\ln(n+4) - \ln(n+3)).$

Так как $S_n = (\ln(n+2) - \ln 2) - (\ln(n+4) - \ln 4) = \ln 2 + \ln \frac{n+2}{n+4}$, то

$$S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln 2 + \ln \frac{n+2}{n+4} \right) = \ln 2. \blacktriangle$$

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$.

Δ Находим $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$. На основании достаточного признака расходимости ряд расходится. \blacktriangle

Пример 5. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n}$ удовлетворяет необходимому

признаку сходимости, но тем не менее расходится.

Δ Необходимый признак выполняется, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/3}} = 0.$$

Для доказательства расходимости данного ряда оценим его n -ю частичную сумму: $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{n^2}$. Очевидно, что

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$. Ряд расходится. \blacktriangle

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2) \cdot 2^n}$.

Δ Сравнивая общий член ряда с общим членом сходящейся геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, замечаем, что $\frac{n+1}{(n+2) \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}$ при всех n .

Следовательно, исследуемый ряд сходится по признаку сравнения. \blacktriangle

Пример 7. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \sqrt{n^5}}{\sqrt[3]{n^4}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2 \sin^2 n}$.

Δ а) Так как $a_n = \frac{\cos^2 \sqrt{n^5}}{\sqrt[3]{n^4}} \leq \frac{1}{n^{4/3}}$, то по признаку сравнения ряд сходится.

б) Так как $a_n = \frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2 \sin^2 n} > \frac{\sqrt{n^3}}{n^2 \sin^2 n} > \frac{1}{n^{1/2}}$, то по признаку сравнения ряд расходится. \blacktriangle

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$.

Δ Воспользуемся предельным признаком сравнения. Имеем $a_n = \frac{1}{n + \ln n}$.

Пусть $b_n = \frac{1}{n}$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\ln n}{n}} = 1 \neq 0$ $\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0 \right)$,

то в смысле сходимости ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ведет себя так же, как и гармонический ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, т. е. расходится. \blacktriangle

Пример 9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^5 + 3n^2}{n^5 + 1}$.

Δ Общий член ряда $a_n = \ln \frac{n^5 + 3n^2}{n^5 + 1} = \ln \left(1 + \frac{3n^2 - 1}{n^5 + 1} \right) \sim \frac{3n^2 - 1}{n^5 + 1} \sim \frac{3}{n^3}$,

$n \rightarrow \infty$. Ряд сходится. \blacktriangle

Пример 10. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)$.

Δ Поскольку $a_n = 1 - \cos \frac{1}{n} = 2 \sin^2 \frac{1}{2n} \sim \frac{1}{2n^2}$, $n \rightarrow \infty$, данный ряд сходится. \blacktriangle

Пример 11. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(3n^2 + 5)}{n^{5/4}}$.

Δ Общий член ряда запишем в виде $a_n = \frac{\ln(3n^2 + 5)}{n^{1/8} \cdot n^{9/8}} = \frac{\ln(3n^2 + 5)}{n^{1/8}} \cdot \frac{1}{n^{9/8}}$.

С помощью правила Лопиталья легко показать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3x^2 + 5)}{x^{1/8}} = 0$.

Следовательно, $a_n < \frac{1}{n^{9/8}}$ для достаточно больших n . По признаку сравнения данный ряд сходится. ▲

Пример 12. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$.

Δ Воспользуемся признаком Даламбера. Поскольку $a_n = \frac{2^n}{n^3}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}$,

то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot n^3}{2^n (n+1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} = 2 > 1$. Ряд расходится. ▲

Пример 13. Исследовать на сходимость ряд $\frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots$

Δ Замечаем, что $a_n = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n-2)}$, $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{3n+4}{4n+2}$. Отсюда

находим $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n \cdot \frac{3n+4}{4n+2}}{a_n} = \frac{3}{4} < 1$. Ряд сходится. ▲

Пример 14. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

Δ Находим $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)!)^2 \cdot 2^{n^2}}{2^{(n+1)^2} \cdot (n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0$ (как

известно, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{a^x} = 0$, $a > 1$). Ряд сходится. ▲

Пример 15. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n}$.

Δ Попробуем применить признак Даламбера:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot e^n \cdot n!} = \frac{e}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Признак Даламбера ответа о сходимости ряда не дает.

Замечаем, однако, что последовательность $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ является монотонно возрастающей и $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Поэтому при любом n справедливо $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, т. е. $a_{n+1} > a_n$.

Следовательно, для данного ряда не выполняется необходимый признак сходимости. Ряд расходится. ▲

Пример 16. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2} + (-1)^n)^n}{3^n}$.

Δ Рассмотрим ряд с общим членом $b_n = \frac{n^3(\sqrt{2} + 1)^n}{3^n}$. Очевидно, что $b_n \geq a_n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ исследуем с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 (\sqrt{2} + 1)^{n+1} \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot n^3 (\sqrt{2} + 1)^n} = \frac{\sqrt{2} + 1}{3} < 1.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. По признаку сравнения ряд $\lim_{n \rightarrow 1} \frac{n^3(\sqrt{2} + (-1)^n)^n}{3^n}$ тоже сходится. ▲

Пример 17. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

Δ а) Здесь удобнее всего применить радикальный признак Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right) = \frac{2}{3} < 1.$$

Ряд сходится.

б) Находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-2} \cdot \frac{-2(n-1)}{n+1}} = e^{-2} < 1.$$

Ряд сходится. ▲

Пример 18. С помощью интегрального признака Коши исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^4 - 9}$.

Δ Функция $f(x) = \frac{x}{x^4 - 9}$ удовлетворяет всем требованиям интегрального

признака Коши. Находим $\int_3^{\infty} \frac{x}{x^4 - 9} dx = \frac{1}{2} \int_3^{\infty} \frac{dx^2}{(x^2)^2 - 9} = \frac{1}{12} \ln \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \Big|_3^{\infty} = \frac{1}{12} \ln 2$.

Несобственный интеграл сходится, а значит, данный ряд тоже сходится. ▲

Пример 19. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$.

Δ Так как $\frac{1}{\ln(n!)} > \frac{1}{\ln(n^n)} = \frac{1}{n \ln n}$ и $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x \Big|_2^{\infty} = \infty$, то, согласно

интегральному признаку и признаку сравнения, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ расходится. ▲

Пример 20. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(3n+2)}$.

Δ Пусть $a_n = \frac{1}{(2n+3)\ln^2(3n+2)}$, $b_n = \frac{1}{(3n+2)\ln^2(3n+2)}$. Так как

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{3}{2}$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ в смысле сходимости ведут себя одинаково.

Функция $f(x) = \frac{1}{(3x+2)\ln^2(3x+2)}$ удовлетворяет всем требованиям

интегрального признака Коши. Находим

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(3x+2)\ln^2(3x+2)} = \frac{1}{3} \int_1^{\infty} \ln^{-2}(3x+2) d \ln(3x+2) = -\frac{1}{3 \ln(3x+2)} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{3 \ln 5}.$$

Ряд сходится. ▲

Пример 21. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ с точностью до $\delta = 0,001$.

Δ Выясним, при каком количестве членов $|R_n| \leq \delta$.

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{(n+2)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \dots \leq \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \dots = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots\right) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Путем подбора легко найти, что $R_n \leq \frac{1}{120 \cdot 16} < 0,001$ при $n = 4$. Следовательно, $S \approx S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} \approx 0,648$. ▲

Пример 22. Оценить остаток ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Вычислить сумму с точностью до 0,1. Сколько нужно взять членов, чтобы вычислить сумму с точностью до 0,001?

Δ Для сходящихся знакоположительных рядов, члены которых монотонно убывают начиная с $(n+1)$ -го, справедлива оценка $R_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx$.

Воспользовавшись оценкой остатка ряда, получим $R_n \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_n^{\infty} = \frac{1}{n}$.

Если взять первые 10 членов ряда, то $R_n \leq \frac{1}{10} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{100} \approx 1,6$ (с точностью до 0,1). Чтобы обеспечить точность $\delta = 0,001$, нужно взять 1000 членов ряда. ▲

Дополнительные задачи

1. Записать ряд в развернутом виде, если формула общего члена ряда имеет вид:

а) $a_n = \frac{2n-1}{n^3}$.

Ответ: $1 + \frac{3}{8} + \frac{5}{27} + \frac{7}{64} + \frac{9}{125} + \dots$

б) $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Ответ: $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

в) $a_n = \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n!}$.

Ответ: $1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \dots$

2. Записать формулу общего члена ряда:

а) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \dots$

Ответ: $a_n = \frac{1}{3n}$.

б) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \dots$

Ответ: $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$.

в) $-1 + \frac{2}{3} - \frac{3}{7} + \frac{4}{15} - \dots$

Ответ: $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{2^n - 1}$.

3. Найти сумму ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Ответ: $S = \frac{1}{2}$.

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}.$$

$$\text{Ответ: } S = \frac{1}{4}.$$

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$\text{Ответ: } S = 2.$$

$$\text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8}.$$

$$\text{Ответ: } S = \frac{5}{4}.$$

$$\text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}.$$

$$\text{Ответ: } S = 1.$$

$$\text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}.$$

$$\text{Ответ: } S = 1.$$

$$\text{ж)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{6^{n+1}}.$$

$$\text{Ответ: } S = \frac{1}{2}.$$

$$\text{з)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{15^n}.$$

$$\text{Ответ: } S = \frac{1}{4}.$$

4. Доказать расходимость ряда:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{4 - 2n + 5n^2}.$$

$$\text{Ответ: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{5} \neq 0.$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+5} \right)^n.$$

$$\text{Ответ: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-3} \neq 0.$$

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{3n+2}{n^2 + 5n - 1}.$$

$$\text{Ответ: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \neq 0.$$

5. Исследовать на сходимость ряд с помощью признаков сравнения:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sin 2n}{n^2 - n + 2}.$$

Ответ: расходится.

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

Ответ: расходится.

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{2}{n^3 + 1}.$$

Ответ: сходится.

$$\text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{n+1}{n}.$$

Ответ: сходится.

6. Исследовать на сходимость ряд с помощью признака Даламбера:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(n+1)!}.$$

Ответ: расходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!}$. **Ответ:** сходится.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$. **Ответ:** сходится.

7. Исследовать на сходимость ряд с помощью признака Коши:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+2} \right)^{\frac{n}{2}}$. **Ответ:** сходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2}$. **Ответ:** сходится.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+5}}{2^n \cdot n^{15}}$. **Ответ:** расходится.

8. Исследовать на сходимость ряд с помощью интегрального признака:

а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. **Ответ:** расходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$. **Ответ:** сходится.

в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$. **Ответ:** сходится.

9. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n^3 + 1} + \sqrt[5]{n^4 + 2}}{\sqrt[6]{n^{11} + 4} + \sqrt[3]{n^5 + 5}}$. **Ответ:** сходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(5n^2 + 6)}{\sqrt[5]{n^6}}$. **Ответ:** сходится.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{6^n \cdot (2n+1)! \cdot n!}$. **Ответ:** расходится.

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{n^2} \cdot \frac{1}{9^n}$. **Ответ:** сходится.

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n + 3}{n (\ln^4 n - 100)}$. **Ответ:** сходится.

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$. **Ответ:** сходится.

$$\text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 2}.$$

Ответ: расходится.

10. Сколько нужно взять членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{(n^2 + 1)^3}$, чтобы вычислить его

сумму с точностью до 0,0001?

Ответ: $n = 10$.

Занятие 3

Знакопеременные ряды. Самостоятельная работа

Пример 1. Исследовать сходимость знакопеременных рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2 - 2n + 3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{3}.$$

Δ а) Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$$\left| \frac{\cos n\alpha}{n^2 - 2n + 3} \right| \leq \frac{1}{n^2 - 2n + 3} \sim \frac{1}{n^2}, n \rightarrow \infty.$$

Ряд сходится абсолютно.

$$\text{б) Положим } n = 6k + 1. \text{ Находим } \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n=6k+1}} \sin \left(2\pi k + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \neq 0.$$

Общий член ряда не стремится к нулю. Ряд расходится. \blacktriangle

Пример 2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие знакочередующиеся ряды:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+10)}; & \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+3)2^{2n+1}}; \\ \text{в) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}; & \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5)}; \\ \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{4n}. \end{aligned}$$

Δ а) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+10)}$ удовлетворяет всем требованиям теоремы

Лейбница. Следовательно, он сходится.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+10)}$. С помощью правила Лопиталья легко

показать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+10)}{\sqrt{x}} = 0$. Следовательно, для достаточно больших n

$\frac{1}{\ln(n+10)} > \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+10)}$ сходится условно.

б) Исследуем ряд на абсолютную сходимость: $\frac{1}{(2n+3)2^{2n+1}} < \frac{1}{2^{2n+1}}$.

Бесконечно убывающая прогрессия является сходящимся рядом.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+3)2^{2n+1}}$ сходится абсолютно.

в) Последовательность $\frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ не является монотонно убывающей,

поэтому признак Лейбница неприменим.

Представляя общий член ряда в виде

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = (-1)^n \frac{\sqrt{n} - (-1)^n}{n-1} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}$$

и замечая, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$ сходится по признаку Лейбница, а ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ расходится, заключаем, что данный ряд также расходится.

г) Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$$|a_{n+1}| = |a_n| \cdot \frac{3n+1}{2n+7}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+7} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$. Ряд расходится.

д) Замечая, что $\operatorname{tg} \frac{1}{4n} \sim \frac{1}{4n}$, $n \rightarrow \infty$, заключаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{4n}$

сходится по признаку Лейбница, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{4n}$ расходится. Следовательно, ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{4n}$ сходится условно. ▲

Пример 3. Сколько первых членов нужно взять в ряде $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n \cdot 2^n}$, чтобы их сумма отличалась от суммы ряда на величину, не превосходящую 0,001?

Δ Нужное число членов ряда можно найти путем подбора из неравенства

$\frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \leq 0,001$. Это неравенство выполняется при $n = 7$. ▲

Пример 4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha}.$$

Δ Общий член ряда запишем в виде

$$a_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha} = (-1)^n \frac{4}{n^\alpha (\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})} =$$

$$= (-1)^n \frac{4}{n^{\alpha+1/2} \left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1-\frac{2}{n}} \right)}.$$

Так как $\frac{4}{n^{\alpha+1/2} \left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1-\frac{2}{n}} \right)} \sim \frac{2}{n^{\alpha+1/2}}, n \rightarrow \infty$, то при $\alpha + \frac{1}{2} > 1$,

$\alpha > \frac{1}{2}$ ряд сходится абсолютно; при $0 < \alpha + \frac{1}{2} \leq 1$, $-\frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{1}{2}$ ряд сходится условно по признаку Лейбница; при $\alpha \leq -\frac{1}{2}$ ряд не удовлетворяет необходимому признаку сходимости, следовательно, является расходящимся. ▲

Дополнительные задачи

1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \cos n}{3n\sqrt{n+1}}$.

Ответ: сходится абсолютно.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n^2}$.

Ответ: сходится абсолютно.

в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$.

Ответ: сходится условно.

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4n}}{\sqrt{n}}$.

Ответ: сходится абсолютно.

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n^2 + n + 1)}{n(5n + 2)}$.

Ответ: расходится.

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \sin \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Ответ: сходится абсолютно.

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 + (-1)^n}{n}$;

Ответ: расходится.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 - 3n + 1}}{n}$. **Ответ:** сходится условно.

2. Установить, сколько членов ряда следует взять, чтобы обеспечить требуемую точность вычисления его суммы $\varepsilon = 0,0001$:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3}$. **Ответ:** $n \geq 10$.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n!}$. **Ответ:** $n \geq 4$.

3. Вычислить сумму ряда с точностью до 0,01:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^n}$. **Ответ:** $S \approx 0,20$.

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(n+1)}$. **Ответ:** $S \approx 0,76$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha} \left(\sqrt{n^2 + 5} - \sqrt{n^2 + 3} \right)}.$$

Ответ: при $\alpha > 2$ ряд сходится абсолютно, при $1 < \alpha \leq 2$ – сходится условно, при $\alpha \leq 1$ – расходится.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2} \cdot \sqrt[4]{n^3 + 3}}{n^2 \cdot \sqrt[12]{3n^7 + 5}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n+3}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n (n^2 + 3)}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{n^2 + 1} \right)^{n^2}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \sqrt{\ln(3n-1)}}$.

Ответ: а) сходится; б) расходится; в) расходится; г) сходится; д) сходится; е) расходится; ж) расходится.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3}$.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

3. Сколько нужно взять членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,005?

Ответ: $n = 10$.

Вариант 2

1. Исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 3} \cdot \sqrt[5]{n^4 + 1}}{n^2 \cdot \sqrt[15]{2n^8 + 5}}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n+3} \arcsin \frac{n+2}{n^3+4}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (5n-4)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n-1)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)}{n^4}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n^2+5} \right)^{n^2}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{36^n \cdot (n!)^3}{(3n)!}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \sqrt[3]{\ln(2n+1)}}$.

Ответ: а) сходится; б) сходится; в) расходится; г) расходится; д) сходится; е) расходится; ж) расходится.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 12n + 5}$.

Ответ: $\frac{8}{15}$.

3. Сколько нужно взять членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, чтобы вычислить его сумму с точностью до $\frac{0,001}{3}$?

Ответ: $n = 10$.

Занятие 4

Функциональные ряды

Пример 1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\ln x}}$.

Δ Функции, из которых составлен ряд, определены на множестве $x > 0$. Ряд сходится абсолютно при $\ln x > 1$, т. е. при $x > e$. Для каждого x из промежутка $1 < x \leq e$ ряд сходится условно по признаку Лейбница; при $0 < x \leq 1$ ряд расходится, как неудовлетворяющий необходимому признаку сходимости. Таким образом, область сходимости данного ряда характеризуется неравенством $x > 1$. ▲

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

Δ При $|x| < 1$

$$\left| \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right| \leq |x^n|.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x^n|$ сходится как бесконечно убывающая прогрессия. По признаку

сравнения сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right|$.

При $|x| > 1$

$$\left| \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right| \leq \left| \frac{x^n}{x^{2n}} \right| = \left| \frac{1}{x^n} \right|.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{x^n} \right|$ сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right|$ сходится по признаку сравнения.

При $x = \pm 1$ получаем ряды, не удовлетворяющие необходимому признаку сходимости.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ сходится, причем абсолютно, в области

$$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty). \quad \blacktriangle$$

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{x \ln n}{x-n}$.

Δ Функции, из которых составлен ряд, определены на множестве $x \neq n$,

где $x \in \mathbb{N}$. Как известно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$. Применим признак Коши к ряду, составленному из модулей данного функционального ряда при фиксированном x :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \sin^n \frac{x \ln n}{x - n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sin \frac{x \ln n}{x - n} \right| = 0.$$

Ряд сходится, причем абсолютно, на всей числовой оси, за исключением точек $x = n$, где $x \in \mathbb{N}$. ▲

Пример 4. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n \operatorname{arctg} \frac{x}{n}}{x^{3n}}$.

Δ Очевидно, что $x \neq 0$. Применим признак Даламбера к ряду, составленному из модулей данного ряда при фиксированном x :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{8^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{x}{n+1} \cdot x^{3n}}{x^{3n+3} \cdot 8^n \operatorname{arctg} \frac{x}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{8^{n+1} \cdot \frac{x}{n+1} \cdot x^{3n}}{x^{3n+3} \cdot 8^n \cdot \frac{x}{n}} \right| = \frac{8}{|x^3|}.$$

Данный функциональный ряд сходится абсолютно в области $\frac{8}{|x^3|} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. В области $x \in (-2; 2)$ ($x \neq 0$) ряд расходится. Точки $x = \pm 2$ исследуем отдельно. При $x = 2$ $u_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{2}{n} \sim \frac{2}{n}, n \rightarrow \infty$. Ряд расходится. При $x = -2$ $u_n(x) = (-1)^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{2}{n} \sim (-1)^{n+1} \frac{2}{n}, n \rightarrow \infty$. Ряд сходится по признаку Лейбница. Таким образом, область сходимости ряда $x \in (-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$. ▲

Пример 5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{3^n \sqrt[3]{n+2}}$.

Δ Найдем радиус сходимости данного ряда: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \cdot \sqrt[3]{n+3}}{3^n \sqrt[3]{n+2}} = 3$.

Ряд сходится в области $-3 < x+2 < 3$, т. е. в интервале $-5 < x < 1$. При $x = -5$ получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$. Так как $\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} \sim \frac{1}{n^{1/3}}, n \rightarrow \infty$, этот ряд расходится. При $x = 1$ получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$, который сходится по признаку Лейбница. Область сходимости ряда $x \in (-5; 1]$. ▲

Пример 6. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x-3)^n}{2^n}$.

$$\Delta R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 2^{n+1}}{2^n \cdot (n+1)!} = 0. \text{ Ряд сходится в единственной точке}$$

$x = 3$. ▲

Пример 7. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \cdot n! (x+4)^n}{(2n)!}$.

$$\Delta R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot n! \cdot (2n+2)!}{(2n)! \cdot 3^{n+1} \cdot (n+1)!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot n! \cdot (2n)! (2n+1)(2n+2)}{(2n)! \cdot 3^{n+1} \cdot n!(n+1)} = \infty.$$

Область сходимости ряда $x \in (-\infty; +\infty)$. ▲

Пример 8. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{(2n+3)8^{n+1}}$.

Δ Ряд содержит бесконечное число нулевых членов. Применим общий подход нахождения области сходимости функциональных рядов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{3n+5} \cdot (2n+3) \cdot 8^{n+1}}{(2n+5) \cdot 8^{n+2} \cdot x^{3n+2}} \right| = \frac{|x^3|}{8}.$$

Данный ряд сходится (и притом абсолютно), если $\frac{|x^3|}{8} < 1$, т. е. $-2 < x < 2$.

При $x = -2$ получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{3n+2}}{(2n+3)8^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 8^n}{(2n+3) \cdot 8 \cdot 8^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$.

Этот ряд сходится по признаку Лейбница. При $x = 2$ получаем расходящийся ряд $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$. Область сходимости ряда $x \in [-2; 2)$. ▲

Пример 9. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n(n+1)}}{n^n}$.

Δ Применим признак Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-2|^{n+1}}{n} = \begin{cases} 0 & \text{при } |x-2| \leq 1, \\ \infty & \text{при } |x-2| > 1. \end{cases}$$

Таким образом, ряд сходится, если $|x-2| \leq 1$, т. е. в промежутке $1 \leq x \leq 3$. ▲

Пример 10. Установить равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ на всей

числовой оси.

Δ Для всех значений x справедливо неравенство $\left| \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$. Это значит, что ряд с общим членом $\frac{1}{n^{3/2}}$ мажорирует данный функциональный ряд на $(-\infty; +\infty)$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходящийся, то данный функциональный ряд по признаку Вейерштрасса сходится равномерно на всей числовой оси. \blacktriangle

Пример 11. Доказать равномерную сходимостр ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ на промежутке $0 < x < \infty$.

Δ На этом промежутке ряд сходится лишь условно и поэтому признак Вейерштрасса неприменим. Однако, пользуясь известной оценкой остатка знакопередающего ряда ($|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)|$), получим $|R_n(x)| \leq \left| \frac{1}{x+n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1}$.

Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для достаточно больших n

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Это и свидетельствует о равномерной сходимости данного ряда в упомянутом промежутке. \blacktriangle

Пример 12. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится неравномерно на промежутке $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

Δ В указанном промежутке ряд сходится как бесконечно убывающая прогрессия. Оценим остаток ряда:

$$|R_n(x)| = \left| x^{n+1} + x^{n+2} + \dots \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right|.$$

Но $\lim_{x \rightarrow -1+0} |R_n(x)| = \frac{1}{2}$. Следовательно, приняв $\varepsilon < \frac{1}{2}$, мы не сможем добиться неравенства $|R_n(x)| < \varepsilon$ при любом значении x . Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится неравномерно. \blacktriangle

Пример 13. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

Δ Составим вспомогательный степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ и обозначим его сумму через $S(x)$. Нужно найти $S(1)$. Радиус сходимости этого ряда $R = 2$. Внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n \cdot 2^n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2-x}.$$

Проинтегрируем теперь обе части равенства $S'(x) = \frac{1}{2-x}$ на отрезке $[0; x]$:

$$\int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{2-t}.$$

$$S(x) - S(0) = -\ln(2-x) + \ln 2.$$

Так как $S(0) = 0$, то $S(1) = -\ln 1 + \ln 2 = \ln 2$. ▲

Дополнительные задачи

1. Найти область сходимости функционального ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x^2 - 4x + 6)^n}{(n+1) \cdot 3^n}$. **Ответ:** $x \in [1; 3]$.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n + |x|^{-n}}{2}$.

Ответ: ряд расходится на всей числовой оси ($x \neq 0$).

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n - e^x)(n^2 + 1)}$.

Ответ: областью допустимых значений x является $x \neq \ln n$, в этой области ряд сходится.

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(5x^2 + 4)^n}{2^n(n^2 + 1)}$.

Ответ: \emptyset .

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n(n + 6^x)}$.

Ответ: \mathbf{R} .

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + x^{2n}}$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

2. Найти область сходимости степенного ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+5}$.

Ответ: $(-1; 1]$.

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{(1+4n) \cdot 3^n}}$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^{n^2}}{(n+3)^n}$. **Ответ:** $x \in [-5; -3]$.

г) $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+3}{n-5}$. **Ответ:** $x \in [2; 4]$.

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (2x-1)^n}{(n+1)!}$. **Ответ:** $\left(\frac{e-1}{2e}; \frac{e+1}{2e}\right)$.

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x+5)^{2n}}{9^n + n^2}$. **Ответ:** $(-8; -2)$.

3. Доказать, пользуясь признаком Вейерштрасса, равномерную сходимость ряда на указанном промежутке:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x+3)^{2n}}{(n+1)^2 \ln(n+1)}$, $[-4; -2]$. **Ответ:** мажоранта $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2 \ln(n+1)}$.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$, \mathbf{R} . **Ответ:** мажоранта $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^{2n} \cdot \operatorname{tg} \frac{5}{2^{6n}}$, $[-3; 5]$. **Ответ:** мажоранта $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4^n}$.

4. Показать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x+n)(x+n+1)}}$ сходится равномерно к $\frac{1}{x}$ в интервале $0 < x < \infty$.

5. Доказать равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{x^2 + n^2}}$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

6. Найти сумму ряда, указать его область сходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 4^{n-1}}$. **Ответ:** $S(x) = -4 \ln \left(1 - \frac{x}{4}\right)$, $x \in [-4; 4)$.

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{n+1}$. **Ответ:** $S(x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x^3)$, $x \in [-1; 0) \cup (0; 1)$,
 $S(0) = 0$.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)x^{2n}}{4^n}$. **Ответ:** $S(x) = -\frac{x^4 + 12x^2}{(x^2 + 4)^2}$, $x \in [-2; 2]$.

г) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \dots + n(n+1)x^{n-1} + \dots$

Ответ: $S(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$, $x \in (-1; 1)$.

Занятия 5–6

Ряды Тейлора

Пример 1. Методом непосредственного разложения найти два первых отличных от нуля члена ряда Маклорена для функции $y = \operatorname{tg} x$.

Δ Имеем

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \cos^{-2} x, \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = 2\cos^{-3} x \cdot \sin x, \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = 6\cos^{-4} x \cdot \sin^2 x + 2\cos^{-2} x, \quad f'''(0) = 2;$$

$$f(x) = x + \frac{2}{3!}x^3 + \dots = x + \frac{1}{3}x^3 + \dots \quad \blacktriangle$$

Пример 2. Методом непосредственного разложения представить функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ в виде ряда Тейлора в окрестности точки $x_0 = -2$.

Δ Вычислим значения данной функции и ее производные в точке $x_0 = -2$:

$$f(x) = x^{-1}, \quad f(-2) = -\frac{1}{2};$$

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2}, \quad f'(-2) = -\frac{1!}{2^2};$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot x^{-3}, \quad f''(-2) = -\frac{2!}{2^3};$$

$$f'''(x) = -1 \cdot 2 \cdot 3x^{-4}, \quad f'''(-2) = -\frac{3!}{2^4};$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1}, \quad f^{(n)}(-2) = -\frac{n!}{2^{n+1}}.$$

Подставляя эти значения в ряд Тейлора, получим

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{2} - \frac{1!}{2^2 \cdot 1!}(x+2) - \frac{2!(x+2)^2}{2^3 2!} - \dots - \frac{n!(x+2)^n}{2^{n+1} n!} - \dots = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n}.$$

Для нахождения области сходимости ряда к функции $f(x)$ выполним следующие преобразования:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{(x+2)-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x+2}{2}}.$$

Функция может быть представлена сходящимся степенным рядом по

степеням $x + 2$, если $\left| \frac{x+2}{2} \right| < 1$, т. е. $x \in (-4; 0)$. ▲

Пример 3. Используя метод неопределенных коэффициентов, найти три первых отличных от нуля члена ряда Маклорена для функции $y = \operatorname{tg} x$.

Δ Имеем

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots$$

Запишем тождество

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots \right) (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots).$$

Перемножая ряды и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему линейных уравнений:

$$a_0 = 0,$$

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 - \frac{a_0}{2} = 0,$$

$$a_3 - \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{6},$$

$$a_4 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{a_0}{24} = 0,$$

$$a_5 - \frac{a_3}{2} + \frac{a_1}{24} = \frac{1}{120},$$

из которой находим $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = 0, a_5 = \frac{2}{15}$.

Имеет место разложение $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$. ▲

Пример 4. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln(2 - 3x)$.

Δ Из равенства $\ln(2 - 3x) = \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{3}{2}x\right)$ и формулы

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1)$$

следует, что

$$\ln(2 - 3x) = \ln 2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^2 x^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^3 x^3 - \dots = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{3}{2}\right)^n x^n.$$

Ряд сходится к функции $f(x)$ в области $-1 < -\frac{3}{2}x \leq 1$, т. е. $x \in \left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. ▲

Пример 5. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = \frac{1}{3x+4}$ по степеням $x+2$.

Δ Так как $\frac{1}{3x+4} = \frac{1}{3x+6-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{2}(x+2)}$, то, заменив в разложении

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (x \in (-1; 1))$$

x на $\frac{3}{2}(x+2)$, получим $f(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n (x+2)^n$. Это справедливо, когда

$$\left| \frac{3(x+2)}{2} \right| < 1, \text{ т. е. } x \in \left(-\frac{8}{3}; -\frac{4}{3}\right). \blacktriangle$$

Пример 6. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Δ Найдем коэффициенты ряда Маклорена. Как известно, $(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{k}{2}\pi\right)$. Следовательно, $\left(\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right)^{(k)} = 2^k \sin\left(2x + \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)$ и $f^{(k)}(0) = 2^k \sin\frac{\pi}{4}(2k+1)$.

Отсюда получаем $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \sin\frac{\pi}{4}(2k+1) x^k$.

Так как $\left| \frac{2^k}{k!} \sin\frac{\pi}{4}(2k+1) x^k \right| \leq \left| \frac{2^k x^k}{k!} \right|$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{2^k x^k}{k!} \right|$ сходится на всей

числовой оси, то и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \sin\frac{\pi}{4}(2k+1) x^k$ тоже сходится на всей числовой оси. Выясним, при каких $x \in (-\infty; +\infty)$ построенный ряд Маклорена сходится к функции $f(x)$. Запишем остаточный член формулы Тейлора в

форме Лагранжа: $R_n(x) = \frac{2^{n+1} \sin\left(2 \cdot \theta x + \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1}$.

Так как $|R_n(x)| \leq \left| \frac{2^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$ является сходящимся на всей числовой оси, то отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$. Таким образом, построенный ряд Маклорена сходится к $f(x)$ на промежутке $x \in (-\infty; +\infty)$. \blacktriangle

Пример 7. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{(3-x)^2}$ в ряд Тейлора по степеням

$x-1$.

Δ Разложим в ряд Тейлора функцию $\frac{1}{3-x}$. Из равенства

$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{3-((x-1)+1)} = \frac{1}{2-(x-1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}$$

получаем $\frac{1}{3-x} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} + \dots + \frac{(x-1)^n}{2^n} \dots \right)$.

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(3-x)^2} &= \left(\frac{1}{3-x} \right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2(x-1)}{2^2} + \frac{3(x-1)^2}{2^3} + \dots + \frac{n(x-1)^{n-1}}{2^n} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(x-1)^n}{2^n}. \end{aligned}$$

Разложение справедливо в области $\frac{|x-1|}{2} < 1$, т. е. $x \in (-1; 3)$. ▲

Пример 8. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{x^2}{1+\sin x}$ до

члена, содержащего x^6 .

Δ Функцию $\frac{1}{1+\sin x}$ необходимо разложить в ряд Маклорена до члена, содержащего x^4 , и полученное выражение умножить на x^2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\sin x} &= 1 - \sin x + \sin^2 x - \sin^3 x + \sin^4 x - \dots = \\ &= 1 - \left(x - \frac{x^3}{6} \right) + \left(x - \frac{x^3}{6} \right)^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} \right)^3 + x^4 + \dots = \\ &= 1 - x + \frac{x^3}{6} + x^2 - \frac{1}{3}x^4 - x^3 + x^4 + \dots = 1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \dots \\ \frac{x^2}{1+\sin x} &= x^2 - x^3 + x^4 - \frac{5}{6}x^5 + \frac{2}{3}x^6 + \dots \end{aligned}$$

Разложение справедливо в области $|\sin x| < 1$, т. е. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. ▲

Пример 9. Вычислить $\sqrt[4]{17}$ с точностью до 0,01.

Δ Преобразуем данный корень $\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} = 2 \left(1 + \frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{4}}$. Полагая в

биномиальном ряде

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

при $x = \frac{1}{16}$, $\alpha = \frac{1}{4}$, получим

$$\sqrt[4]{17} = 2 \left(1 + \frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{4}} = 2 \left(1 + \frac{1}{4 \cdot 16} - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8 \cdot 16^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16^3} - \dots \right).$$

Вычислим несколько последовательных первых членов ряда: $a_1 = 1$, $a_2 \approx 0,1562$, $a_3 \approx -0,00037$. Согласно следствию из теоремы Лейбница, если ограничиться суммой первых двух слагаемых, то ошибка искомого приближенного значения корня не будет превосходить $2 \cdot (0,00037) < 0,01$.

Следовательно, $\sqrt[4]{17} \approx 2(1 + 0,01562) \approx 2,03$. ▲

Пример 10. Вычислить $\sqrt[4]{e}$ с точностью до 0,001.

Δ В разложении функции e^x полагаем $x = \frac{1}{4}$:

$$e^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2 \cdot 2!} + \frac{1}{4^3 \cdot 3!} + \frac{1}{4^4 \cdot 4!} + \dots$$

Если взять четыре члена этого ряда (для $n = 3$), то ошибка вычислений не будет превышать 0,001. Действительно,

$$\frac{1}{4^4 \cdot 4!} + \frac{1}{4^5 \cdot 5!} + \frac{1}{4^6 \cdot 6!} + \dots < \frac{1}{4^4 \cdot 4!} + \frac{1}{4^6 \cdot 4!} + \frac{1}{4^8 \cdot 4!} + \dots = \frac{1}{4^4 \cdot 4!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} < 0,001.$$

Подсчитав сумму четырех выписанных членов ряда, получим $\sqrt[4]{e} \approx 1,284$. ▲

Пример 11. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2} \cdot \cos x}{\operatorname{tg}^4 x}$.

Δ Так как $\operatorname{tg}^4 x \sim x^4$, $x \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos x}{\operatorname{tg}^4 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-1}{2} \right) x^4 + \dots \right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots \right)}{x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \dots \right) \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots \right)}{x^4} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) x^2 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots\right) x^4 + \dots}{x^4} =$$

$$= -\frac{1}{24} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{-1 + 6 + 3}{24} = \frac{1}{3}. \blacktriangle$$

Пример 12. Вычислить с точностью до 0,001 $\int_0^{1/4} \sin x^2 dx$.

Δ Пользуясь рядом Маклорена для $\sin x$ и заменяя в нем x на x^2 , имеем

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \dots$$

Почленно интегрируя и подставляя пределы интегрирования, получим

$$\int_0^{1/4} \sin x^2 dx = \int_0^{1/4} \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \dots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \frac{x^{11}}{5! \cdot 11} - \dots \right) \Big|_0^{1/4} = \frac{1}{4^3 \cdot 3} - \frac{1}{3! \cdot 7 \cdot 4^7} + \frac{1}{4^{11} \cdot 5! \cdot 11} - \dots$$

Остаток этого ряда оценивается первым отбрасываемым членом. Так как

$$\frac{1}{3! \cdot 7 \cdot 4^7} < 0,001, \text{ то } \int_0^{1/4} \sin x^2 dx \approx \frac{1}{192} \approx 0,005. \blacktriangle$$

Пример 13. Вычислить с точностью до 0,001 $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Δ Полагая в биномиальном ряде $t = x^4$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^8 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^{12} + \dots$$

Этот ряд сходится в области $|x| < 1$. Интегрируя в пределах от 0 до $\frac{1}{2}$,

находим $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \left(x - \frac{1}{2} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^9}{2 \cdot 4 \cdot 9} - \dots \right) \Big|_0^{1/2}$.

Этот ряд удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница. Его остаток оценивается первым отбрасываемым членом. Очевидно, $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 2^9} < 0,001$.

Следовательно, $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 2^5} \approx 0,497. \blacktriangle$

Пример 14. Найти пять первых членов разложения в ряд Маклорена

решения дифференциального уравнения $y'' = y'^2 + xy$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$.

Δ Из данного уравнения находим $y''(0) = 4 + 0 = 4$. Дважды дифференцируем исходное уравнение:

$$y''' = 2y' \cdot y'' + y + xy', \quad y'''(0) = -16 + 4 = -12;$$

$$y^{IV} = 2y''^2 + 2y'y''' + 2y' + xy'', \quad y^{IV}(0) = 76.$$

Подставляя полученные значения производных в ряд Маклорена, получаем

$$y(x) = 4 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + \frac{19}{6}x^4 + \dots \quad \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Найти первых три отличных от нуля члена ряда Маклорена для функций:

а) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$. **Ответ:** $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$.

б) $f(x) = e^{\sin x}$. **Ответ:** $1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

2. Разложить функцию $f(x)$ в ряд по степеням x , найти область сходимости полученного ряда:

а) $f(x) = e^{-x^2}$. **Ответ:** $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, $x \in \mathbf{R}$.

б) $f(x) = \frac{3-2x}{x^2-5x+6}$. **Ответ:** $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) x^n$, $x \in (-2; 2)$.

в) $f(x) = \cos^2 4x$. **Ответ:** $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 8^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbf{R}$.

3. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 :

а) $f(x) = (x+5)e^{2x}$, $x_0 = 0$.

Ответ: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} (n+10) x^n$, $x \in \mathbf{R}$.

б) $f(x) = \ln(2x - x^2 + 3)$, $x_0 = 2$.

Ответ: $f(x) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{3^n} - 1 \right) \frac{(x-2)^n}{n}$, $1 \leq x < 3$.

4. Используя разложения в степенные ряды, вычислить с точностью до 0,001 значение выражения:

а) $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Ответ: 0,609.

б) $\ln 0,8$.

Ответ: -0,222.

в) $\sqrt[4]{90}$.

Ответ: 3,079.

5. Используя разложения в степенные ряды, вычислить предел:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + \cos x}{x^3 \sin x} - \frac{3}{x^4} \right)$.

Ответ: $\frac{1}{60}$.

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{e^{3x} - \cos 4x}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

6. Используя разложения в степенные ряды, вычислить с точностью до 0,001:

а) $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx$.

Ответ: 0,508.

б) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\sin x}{x} dx$.

Ответ: 0,332.

в) $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$.

Ответ: 0,764.

г) $\int_0^{0,4} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$.

Ответ: 0,077.

7. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения:

а) $y'' = x^2 + y^2$, $y(-1) = 2$, $y'(-1) = 0,5$, $k = 4$.

Ответ: $y = 2 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{5}{2}(x+1)^2 + \frac{15}{16}(x+1)^4 + \dots$

б) $y' = \frac{1-x^2}{y} + 1$, $y(0) = 1$, $k = 5$.

Ответ: $y = 1 + 2x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{17}{9}x^4 + \dots$

Занятие 7

Контрольная работа

Вариант 1

1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt[3]{n^2} + \sqrt{n+1})^{3x+1}}$.

Ответ: $x > \frac{1}{6}$.

2. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n} \cdot \frac{1}{(3x^2 + 10x + 9)^n}.$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+4)^n}{\sqrt[3]{2n+3} \cdot 3^n}$.

Ответ: $x \in (-7; -1]$.

4. Разложить функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ в ряд Тейлора по степеням $x + 1$.

Ответ: $f(x) = -9 + 17(x+1) - 9(x+1)^2 + 2(x+1)^3$.

5. Найти методом непосредственного разложения первых три отличных от нуля члена ряда Маклорена для функции $f(x) = e^x \cdot \sin x$.

Ответ: $f(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$

6. Функцию $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x^2 - 9x + 20}$ разложить в ряд Тейлора по степеням $(x - 3)$. Указать область сходимости ряда.

Ответ: $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(3 - \frac{7}{2^{n+1}}\right) (x-3)^n$, $x \in (2; 4)$.

7. Вычислить $\sqrt[3]{8,36}$ с точностью до 0,01.

Ответ: 2,03.

8. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \cos x - \sqrt{1 + 2x}}{\ln(1+x) - x}$.

Ответ: -1.

9. Вычислить $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2} dx$ с точностью до 0,001.

Ответ: 0,521.

10. Методом последовательного дифференцирования найти первые четыре члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = y^2 + x^3$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

Ответ: $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$

Вариант 2

1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[5]{n^3} + \sqrt{n+2})^{5x+2}$.

Ответ: $x < -\frac{11}{15}$.

2. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2} \cdot \frac{1}{(3x^2+4x+2)^n}$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+3)^n}{\sqrt[3]{3n+2}}$.

Ответ: $-3,5 \leq x < -2,5$.

4. Разложить функцию $f(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ в ряд Тейлора по степеням $x+1$.

Ответ: $f(x) = 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$.

5. Найти методом непосредственного разложения первых два отличных от нуля члена ряда Маклорена для функции $f(x) = e^{\cos x}$.

Ответ: $f(x) = e \left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots \right)$.

6. Функцию $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x - 3}$ разложить в ряд Тейлора по степеням $(x+1)$. Указать область сходимости ряда.

Ответ: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3(-1)^n)}{2^{n+1}} (x+1)^n$, $x \in (-3; 1)$.

7. Вычислить $\sqrt[3]{80}$ с точностью до 0,01.

Ответ: 4,31.

8. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{\sin x - x}$.

Ответ: 0.

9. Вычислить $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx$ с точностью до 0,001.

Ответ: 0,508.

10. Методом последовательного дифференцирования найти первые четыре члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x + y^2$, $y(0) = 1$.

Ответ: $y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \dots$

Занятия 8–10

Ряды Фурье.

Самостоятельная работа

Пример 1. Функцию $f(x) = \sin^4 x$ разложить в ряд Фурье.

Δ Используем известные формулы тригонометрии, получим

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \frac{1}{4} \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) = \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 2. Доказать ортогональность системы функций $\sin x, \sin 3x, \dots,$

$\sin (2n+1)x, \dots$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.

Δ Для $n \neq m$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin (2n+1)x \sin (2m+1)x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\cos 2(n-m)x - \cos 2(n+m+1)x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin 2(n-m)x}{2(n-m)} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2(n+m+1)x}{2(n+m+1)} \Big|_0^{\pi/2} = 0. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x+2, & 0 < x < \pi, \end{cases} \quad T = 2\pi.$$

Пример 4. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$, если $f(x) = x^2$ при $-\pi \leq x \leq \pi$. Пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда:

а) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$; б) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$

Δ Вычисляем коэффициенты ряда. Так как данная функция является четной, то $b_n = 0$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = -\frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{4}{\pi n^2} (x \cos nx) \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2} \int_0^{\pi} \cos nx dx =$$

$$= \frac{4}{n^2} \cos n\pi = (-1)^n \frac{4}{n^2}, \quad n \neq 0.$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3\pi} x^3 \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2.$$

По найденным коэффициентам записываем искомое разложение:

$$f(x) = \frac{1}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Это разложение данной периодической и всюду непрерывной функции справедливо при любом значении x , т. е. полученный ряд Фурье сходится к данной функции на всей числовой оси. Графики данной функции и суммы ее ряда полностью совпадают (рис. 2).

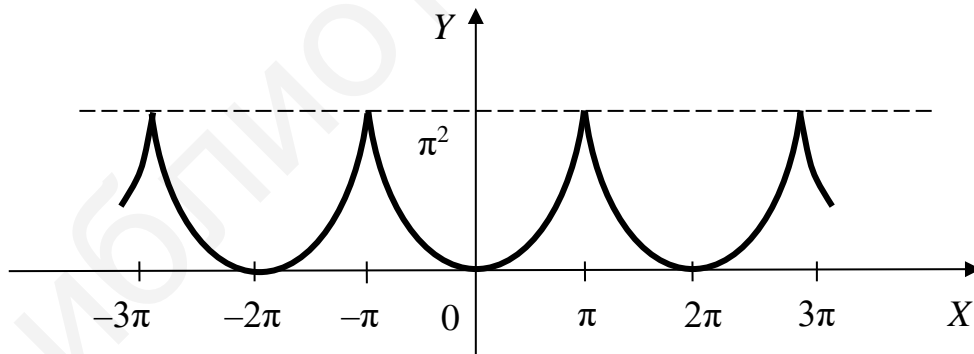


Рис. 2

Полагая в полученном разложении $x = 0$, найдем

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

и, полагая $x = \pi$, найдем $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$. ▲

Пример 5. Разложить в ряд Фурье функцию $y = x^2$, заданную на интервале $(0; 2\pi)$. Изобразить график функции и график суммы ряда.

△ Функция $f(x)$ не принадлежит к классу четных или нечетных функций.

Находим коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nxdx = -\frac{2}{\pi n} \int_0^{2\pi} x \sin nxdx = \frac{2}{\pi n^2} (x \cdot \cos nx) \Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{\pi n^2} \int_0^{2\pi} \cos nxdx = \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx = -\frac{1}{\pi n} (x^2 \cos nx) \Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{2\pi} x \cos nxdx =$$

$$= -\frac{4\pi}{n} - \frac{2}{\pi n^2} \int_0^{2\pi} \sin nxdx = -\frac{4\pi}{n}.$$

Поэтому для $0 < x < 2\pi$

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Графики функции $y = f(x)$ и суммы ряда изображены на рис. 3 и 4 соответственно.

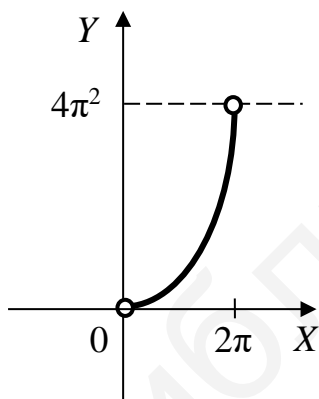


Рис. 3

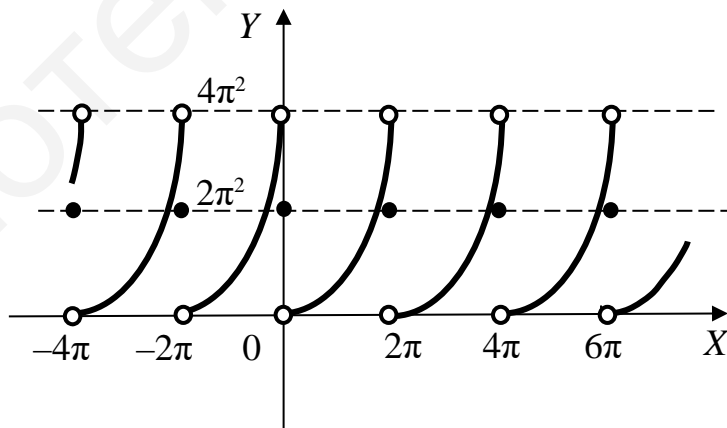


Рис. 4

Пример 6. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \sin ax$ в интервале $(-\pi; \pi)$ (a – не целое).

△ Осуществив периодическое продолжение функции $f(x)$ на всю числовую ось, получим новую функцию $f_1(x)$, удовлетворяющую всем условиям теоремы Дирихле. Найдем коэффициенты ряда Фурье для функции $f_1(x)$.

В силу нечетности функции $f_1(x)$ коэффициент $a_n = 0$,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ax \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(a-n)x - \cos(a+n)x) dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{a-n} \sin(a-n)x - \frac{1}{a+n} \sin(a+n)x \right) \Big|_0^{\pi} = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^n \sin a\pi}{a-n} - \frac{(-1)^n \sin a\pi}{a+n} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n n}{a^2 - n^2} \sin a\pi.
\end{aligned}$$

На интервале $(-\pi; \pi)$ функции $f(x)$ и $f_1(x)$ совпадают. Таким образом, имеем: $\sin ax = \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin nx}{a^2 - n^2} \quad (|x| < \pi)$. ▲

Пример 7. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на интервале $(1; 5)$.

Δ Продолжим эту функцию периодически ($T = 4 = 2l$) на всю числовую ось. Полученная функция разложима в сходящийся ряд Фурье на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Имеем

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_1^5 x dx = \frac{x^2}{4} \Big|_1^5 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = 6,$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_1^5 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x \cdot \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_1^5 - \frac{2}{n\pi} \int_1^5 \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right) = \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2},$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_1^5 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(-x \cdot \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) \Big|_1^5 + \frac{2}{n\pi} \int_1^5 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = -\frac{4}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2}.$$

$$\text{Очевидно, что } \int_1^5 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \int_1^5 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
x &= 3 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{2} = \\
&= 3 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin \left(\frac{n\pi}{2} (1-x) \right), \quad x \in (1; 5).
\end{aligned}$$

Графики функции и ряда Фурье изображены на рис. 5 и 6 соответственно.

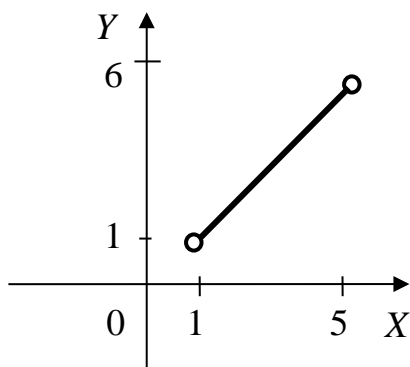


Рис. 5

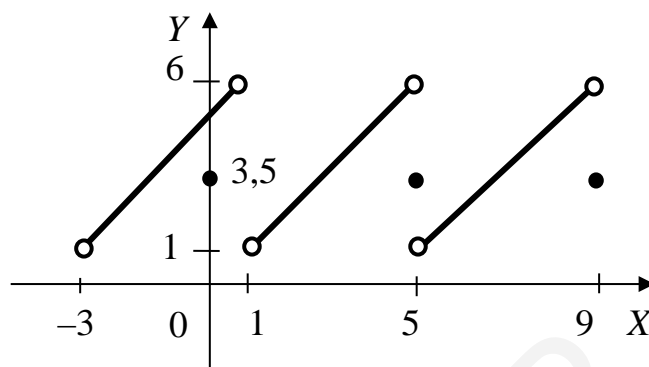


Рис. 6



Пример 8. Разложить в ряд Фурье функцию $y = |\sin x|$. Используя полученное разложение, найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

Δ Очевидно, $|\sin x|$ есть четная функция с периодом π . Так как $2l = \pi$, то ряд Фурье имеет вид

$$|\sin x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx, \text{ где } a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{4}{\pi} (-\cos x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi};$$

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2nxdx = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(2n-1)x dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(2n+1)x dx = \frac{2}{\pi} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{2}{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{-1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

Следовательно, $|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$.

Отсюда при $x = 0$ получаем $0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \dots = \frac{1}{2}.$$

Отметим, что если положить $T = 2\pi$, то мы получим тот же результат. ▲

Пример 9. Функция $f(x)$ задана на полупериоде

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x < 0,5; \\ -1 & \text{при } 0,5 < x < 1. \end{cases}$$

Представить ее рядом Фурье.

Δ Функция может быть разложена в ряд Фурье бесчисленным количеством способов. Рассмотрим два наиболее важных варианта разложения:

1) Доопределим функцию $f(x)$ на интервале $(-1; 0)$ четным образом (рис. 7).

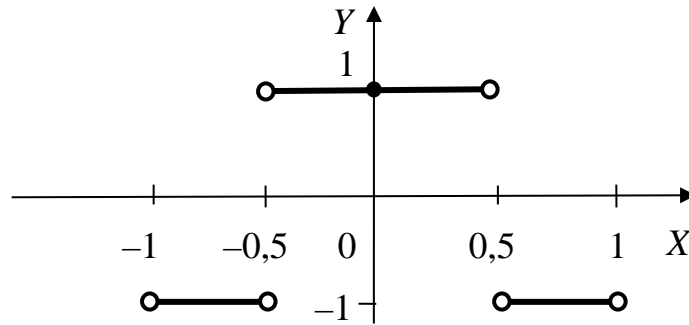


Рис. 7

Найдем коэффициенты ряда Фурье.

Имеем $b_n = 0$,

$$a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^{0,5} 1 \cdot \cos n\pi x dx + 2 \int_{0,5}^1 (-1) \cdot \cos n\pi x dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_0^{0,5} - \frac{2}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_{0,5}^1 = \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad n \neq 0,$$

$$a_0 = 2 \left(\int_0^{0,5} dx - \int_{0,5}^1 dx \right) = 2 \left(x \Big|_0^{0,5} - x \Big|_{0,5}^1 \right) = 0.$$

Следовательно, искомое разложение данной функции в неполный ряд Фурье, содержащий только косинусы, таково:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \cdot \cos n\pi x = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos \pi x}{1} - \frac{\cos 3\pi x}{3} + \frac{\cos 5\pi x}{5} - \dots \right) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos(2k-1)\pi x}{2k-1}.$$

2) Для разложения данной функции в ряд Фурье, содержащий только синусы, доопределим ее на интервале $(-1; 0)$ нечетным образом (рис. 8).

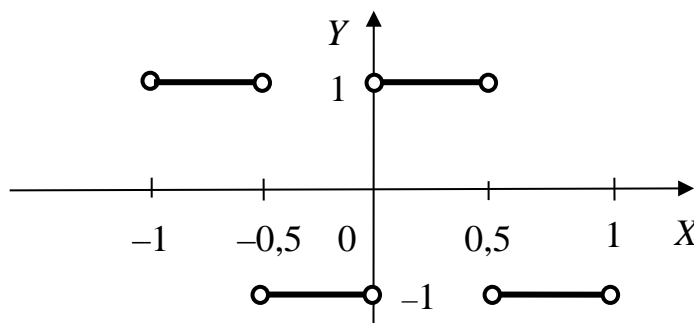


Рис. 8

Найдем коэффициенты ряда Фурье.

Имеем $a_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots$,

$$b_n = 2 \int_0^{0,5} \sin n\pi x dx - 2 \int_{0,5}^1 \sin n\pi x dx = -\frac{2}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^{0,5} + \frac{2}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_{0,5}^1 =$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left(\cos n\pi - 2 \cos \frac{n\pi}{2} + 1 \right).$$

Искомое разложение данной функции в неполный ряд Фурье, содержащий только синусы, таково:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\cos n\pi - 2 \cos \frac{n\pi}{2} + 1 \right) \sin n\pi x = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin 2\pi x}{1} + \frac{\sin 6\pi x}{3} + \frac{\sin 10\pi x}{5} + \dots \right) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2 \cdot (2k-1)\pi x)}{2k-1}. \blacktriangle$$

Пример 10. Записать разложение функции $f(x) = x$ в интервале $(-\pi; \pi)$ в ряд Фурье в комплексной форме. Преобразовать полученный ряд в действительный ряд Фурье.

Δ Вычислим коэффициенты c_n :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \left| \begin{array}{l} x = u, \quad dv = e^{-inx} dx \\ du = dx, \quad v = -\frac{1}{in} e^{-inx} \end{array} \right| = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-x}{in} e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-\pi}{in} e^{-in\pi} - \frac{\pi}{in} e^{in\pi} + \frac{1}{n^2} (e^{-in\pi} - e^{in\pi}) \right) = \frac{-1}{2in} (\cos n\pi - i \sin n\pi + \cos n\pi + i \sin n\pi) =$$

$$= -\frac{(-1)^n \cdot 2}{2in} = \frac{(-1)^n \cdot i}{n}, \quad n \neq 0.$$

При $n = 0$ $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0.$

Получим разложение $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n i}{n} e^{inx}, \quad n \neq 0, \quad -\pi < x < \pi.$

Чтобы записать действительный ряд Фурье, воспользуемся тем, что $\frac{a_0}{2} = c_0, \quad a_n = \operatorname{Re} 2c_n, \quad b_n = -\operatorname{Im} 2c_n.$ Следовательно, $\frac{a_0}{2} = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$

Действительный ряд Фурье имеет вид $x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad -\pi < x < \pi. \blacktriangle$

Пример 11. Разложить в комплексный ряд Фурье функцию $f(x) = e^{-x},$

заданную в интервале $(-\pi; \pi)$. Записать действительный ряд Фурье.

Δ Вычисляем коэффициент c_n :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+in)x} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{-1}{1+in} e^{-(1+in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= -\frac{1}{2\pi(1+in)} \left(e^{-\pi(1+in)} - e^{\pi(1+in)} \right) = \frac{1}{2\pi(1+in)} \left(e^{\pi} \cdot e^{in\pi} - e^{-\pi} \cdot e^{-in\pi} \right) = \\ &= \left| e^{\pm i\pi n} = (-1)^n \right| = \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1+in)} = \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})(1-in)}{2\pi(1+n^2)}. \end{aligned}$$

Получаем разложение $e^{-x} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+in} e^{inx}$, $-\pi < x < \pi$.

$$\begin{aligned} \text{Так как } \frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}, \quad a_n = \operatorname{Re} 2c_n = \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}, \quad b_n = -\operatorname{Im} 2c_n = \\ = \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})n}{\pi(1+n^2)}, \end{aligned}$$

$$\text{то } e^{-x} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\cos nx + n \sin nx)}{1+n^2} \right), \quad -\pi < x < \pi. \quad \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Разложить в ряд Фурье 2π -периодическую функцию $f(x)$, построить график функции и график ее ряда Фурье, если

$$f(x) = \begin{cases} 5, & -\pi < x < 0, \\ 3, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = -\pi; 0; \pi. \end{cases} \quad \text{Ответ: } f(x) = 4 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x.$$

2. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 2$) функцию, определенную на всей числовой оси и заданную на отрезке $[-1; 1]$ равенством

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0, \\ 0,5 & \text{при } x = 0, \\ x, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } f(x) = \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}.$$

3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a; b]$, построить график функции и график ее ряда Фурье при следующих условиях:

а) $f(x) = x - 6, 3 \leq x \leq 9.$ **Ответ:** $f(x) = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{\pi n x}{3}.$

б) $f(x) = \begin{cases} 1, & 3\pi < x < 4\pi, \\ 3, & 4\pi < x < 5\pi. \end{cases}$ **Ответ:** $f(x) = 2 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)x}{2n-1}.$

в) $f(x) = \begin{cases} 5-x, & -\pi < x < 0, \\ 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

Ответ: $f(x) = \frac{\pi+10}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} - \frac{\pi+10}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} +$
 $+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k}.$

г) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{3}{2}, \\ -1, & \frac{3}{2} < x < 3. \end{cases}$

Ответ: $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi x}{3}}{2n+1}.$

4. Разложить по синусам на отрезке $[0; \pi]$ функцию $f(x) = \cos 2x.$

Ответ: $f(x) = -\frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{2^2-1} + \frac{3\sin 3x}{2^2-3^2} + \frac{5\sin 5x}{2^2-5^2} + \dots \right).$

5. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[0; l]$:

$f(x) = e^{-3x}, 0 \leq x \leq 1.$

Ответ: $f(x) = \frac{1-e^{-3}}{3} - 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-3} - 1}{\pi^2 n^2 + 9} \cos \pi n x.$

6. Используя разложение функции $f(x) = x^2$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$, найти сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$

Ответ: $S = \frac{\pi^2}{12}.$

7. Записать ряд Фурье в комплексной форме для T -периодической функции $f(x)$:

$f(x) = \begin{cases} 4-x, & -3 < x < 3, \\ 5, & x = -3; 3. \end{cases} \quad (T=6)$

Ответ: $f(x) = 4 + \frac{3i}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{i \frac{\pi n x}{3}}.$

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Функцию $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{при } 1 < x < \pi, \end{cases}$ заданную в интервале $(0; \pi)$, раз-

ложить по косинусам. Начертить график функции и график ряда Фурье.

Ответ: $\frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos nx \right).$

2. Функцию $f(x) = x$ ($0 < x < 2$) разложить в неполные ряды Фурье:

а) по синусам; б) по косинусам. Начертить график функции и графики рядов Фурье.

Ответ: а) $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{n\pi x}{2}}{n}$; б) $1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}}{(2n-1)^2}.$

3. Разложить в ряд Фурье $f(x) = \begin{cases} 3, & -3 < x < 0, \\ \frac{3}{2}, & x = 0, \\ -x, & 0 < x < 3. \end{cases} \quad (l = 3)$

Ответ:

$$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n-1)\pi x}{3}}{(2n-1)^2} - \frac{9}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n-1)\pi x}{3}}{2n-1} + \frac{3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2k\pi x}{3}}{2k}.$$

Вариант 2

1. Функцию $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{при } 2 < x < \pi, \end{cases}$ заданную в интервале $(0; \pi)$, раз-

ложить по синусам. Начертить график функции и график ряда Фурье.

Ответ: $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2n}{n} \sin nx.$

2. Функцию $f(x) = x$ ($0 < x < 3$) разложить в неполные ряды Фурье: а) по синусам; б) по косинусам. Начертить график функции и графики рядов Фурье.

Ответ: а) $\frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{n\pi x}{3}}{n}$; б) $\frac{3}{2} - \frac{12}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n-1)x\pi}{3}}{(2n-1)^2}$.

3. Разложить в ряд Фурье $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < 0, \\ -\frac{1}{2}, & x = 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 < x < 2. \end{cases} \quad (2l = 4)$

Ответ: $-\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n-1)n\pi x}{2}}{(2n-1)^2} + \frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n-1)n\pi x}{2}}{2n-1} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{2n}$.

Занятие 11

Интеграл Фурье

Пример 1. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty). \end{cases}$$

Δ Очевидно, что функция удовлетворяет условиям представимости интегралом Фурье. Запишем интеграл Фурье в виде

$$f(x) = \int_0^{\infty} (A(\omega) \cos \omega x dt + B(\omega) \sin \omega x) d\omega,$$

где $A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t$, $B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$.

Находим $A(\omega)$ и $B(\omega)$:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos \omega t dt = \frac{1}{\omega\pi} \sin \omega t \Big|_0^1 = \frac{\sin \omega}{\omega\pi};$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin \omega t dt = -\frac{1}{\omega\pi} \cos \omega t \Big|_0^1 = \frac{1 - \cos \omega}{\omega\pi}.$$

Интеграл Фурье для данной функции имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} (\sin \omega \cos \omega x + (1 - \cos \omega) \sin \omega x) d\omega.$$

В точках разрыва $x = 0$ и $x = 1$ интеграл сходится к числу $\frac{1}{2}$. ▲

Пример 2. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{при } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{при } x \geq \pi. \end{cases}$$

Δ На промежутке $(-\infty; 0)$ функцию $f(x)$ можно доопределить различными способами. Ограничимся двумя частными случаями. Доопределим функцию $f(x)$ четным образом (рис. 9).

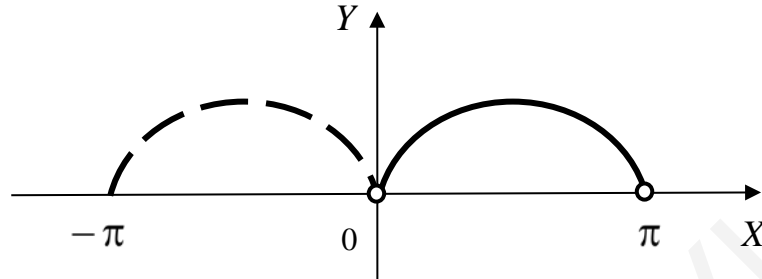


Рис. 9

Находим $F_c(\omega)$:

$$\begin{aligned} F_c(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin t \cos \omega t dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} (\sin(1+\omega)t + \sin(1-\omega)t) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{\cos(1+\omega)t}{1+\omega} - \frac{\cos(1-\omega)t}{1-\omega} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{1-\omega^2} - \frac{\cos(1+\omega)\pi}{1+\omega} - \right. \\ &\left. - \frac{\cos(1-\omega)\pi}{1-\omega} \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1+\cos\omega\pi}{1-\omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1+\cos\omega\pi}{1-\omega^2}. \end{aligned}$$

Если функцию $f(x)$ доопределить нечетным образом (рис. 10), то

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin t \sin \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \omega \pi}{1-\omega^2}.$$

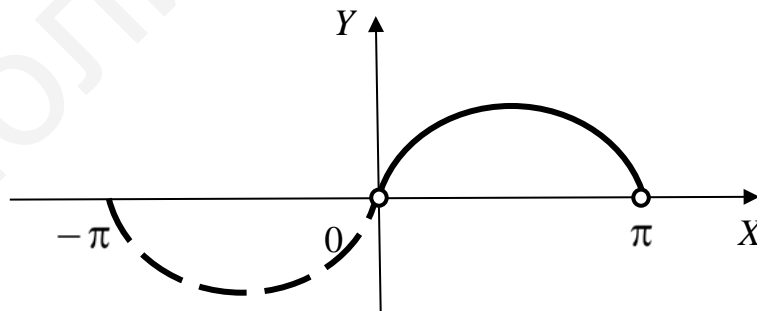


Рис. 10

$$\text{Тогда } f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega x d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1+\cos\omega\pi}{1-\omega^2} \cos \omega x d\omega \quad (x \geq 0)$$

$$\text{или } f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega x d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \pi}{1-\omega^2} \sin \omega x d\omega \quad (x \geq 0). \blacktriangle$$

Пример 3. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Δ Функция четная (рис. 11), поэтому

$$B(\omega) = 0,$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-t) \cos \omega t dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 1-t = u, du = -dt \\ \cos \omega t dt = dv, v = \frac{1}{\omega} \sin \omega t \end{array} \right| = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1-t}{\omega} \sin \omega t \Big|_0^1 + \frac{1}{\omega} \int_0^1 \sin \omega t dt \right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\omega^2} \cos \omega t \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi \omega^2} (1 - \cos \omega) = \frac{4 \sin^2 \frac{\omega}{2}}{\pi \omega^2} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right)^2.$$

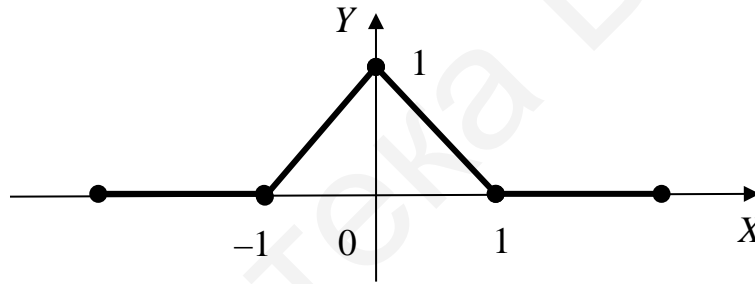


Рис. 11

Тогда $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right)^2 \cos \omega x d\omega$. Так как функция $f(x)$ непрерывна,

то интеграл Фурье при всех x совпадает с $f(x)$. ▲

Пример 4. Функцию $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| \geq 1 \end{cases}$ представить интегралом

Фурье в комплексной форме.

$$\Delta \text{ Имеем } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

$$\text{где } F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Функция $F(i\omega)$ называется прямым преобразованием Фурье, а функция $f(x)$ – обратным преобразованием Фурье.

Найдем $F(i\omega)$ и $f(x)$:

$$F(i\omega) = \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{i\omega} (e^{-i\omega} - e^{i\omega}) = \frac{2 \sin \omega}{\omega};$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin \omega}{\omega} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} e^{i\omega x} d\omega.$$

В полученном равенстве положим $x = 0$. Получим $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = 1$ или

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{x} = \frac{\pi}{2}. \quad \blacktriangle$$

Пример 5. Найти косинус- и синус-преобразования Фурье для функции $f(x) = e^{-x}$ ($x > 0$).

Δ Продолжим функцию $f(x)$ на отрицательную полуось четным образом.

$$\text{Найдем } F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} \cos \omega t dt.$$

$$\text{Как известно, } \int e^{ax} \cos bx dx = e^{ax} \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} + c.$$

Следовательно,

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-t} \frac{-\cos \omega t + \omega \sin \omega t}{1 + \omega^2} \Big|_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2}.$$

Продолжим функцию $f(x)$ ($x > 0$) на отрицательную полуось нечетным образом.

$$\text{Найдем } F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} \sin \omega t dt.$$

$$\text{Так как } \int e^{ax} \sin bx dx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} + c, \text{ то}$$

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-t} \frac{-\sin \omega t - \omega \cos \omega t}{1 + \omega^2} \Big|_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1 + \omega^2}.$$

Применив обратные преобразования Фурье, получим

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{1 + \omega^2} d\omega = e^{-x} (x \geq 0), \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega x}{1 + \omega^2} d\omega = e^{-x} (x > 0).$$

Отсюда найдем интегралы Лапласа:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{1 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-x} (x \geq 0); \quad \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega x}{1 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-x} (x > 0). \quad \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 2 \leq x \leq 6, \\ 0 & \text{при } x < 2 \text{ и } x > 6. \end{cases}$$

Ответ: $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\omega}{\omega} \cos \omega (x-4) d\omega.$

2. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{2} & \text{при } x \in [-\pi; \pi], \\ 0 & \text{при } x < -\pi \text{ и } x > \pi. \end{cases}$$

Ответ: $f(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \pi\omega}{1-4\omega^2} \cos \omega x d\omega.$

3. Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} \text{sign } x, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

Ответ: $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \omega}{\omega} \sin \omega x d\omega, \quad |x| < 1,$ в точках разрыва $x = \pm 1$

интеграл сходится к $\pm \frac{1}{2}$ соответственно.

4. Представить комплексной формой интеграла Фурье функцию

$$f(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0.$$

Ответ: $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + \omega^2} e^{i\omega x} d\omega.$

5. Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{-x}, & \text{если } x \in [0; +\infty], \\ 0, & \text{если } x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

Ответ: $F(i\omega) = \frac{1}{(1+i\omega)^2}.$

6. Найти косинус- и синус-преобразования Фурье функции $f(x) = e^{-5x}, \quad x \geq 0.$

Ответ: $F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\omega^2 + 25}; \quad F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 + 25}.$

Занятие 12

Последовательности комплексных чисел. Кривые и области на комплексной плоскости

Пример 1. Вычислить $\frac{4+5i}{3-4i}$.

Δ Находим $\frac{4+5i}{3-4i} = \frac{(4+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{-8+31i}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{31}{25}i$. ▲

Пример 2. Вычислить по формуле Муавра: $w = (1-i\sqrt{3})^{60}$.

Δ Применим формулу Муавра:

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

где φ – одно из значений $\arg z$.

Запишем число z в тригонометрической форме:

$$z = 1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right).$$

Применяя формулу Муавра, получим

$$(1 - i\sqrt{3})^{60} = 2^{60} (\cos(-20\pi) + i \sin(-20\pi)) = 2^{60}. \quad \blacktriangle$$

Пример 3. Вычислить $\sqrt[4]{-1+i}$.

Δ Корень n -й степени из комплексного числа z имеет n значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Представим комплексное число $z = -1+i$ в тригонометрической форме:

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Следовательно, $\sqrt[4]{-1+i} = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{4} \right)$.

Полагая $k = 0, 1, 2, 3$, найдем четыре значения корня:

$$k = 0, \quad w_0 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{16} + i \sin \frac{3\pi}{16} \right),$$

$$k = 1, \quad w_1 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{16} + i \sin \frac{11\pi}{16} \right),$$

$$k = 2, \quad w_2 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{16} + i \sin \frac{19\pi}{16} \right),$$

$$k = 3, w_3 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{27\pi}{16} + i \sin \frac{27\pi}{16} \right). \blacktriangle$$

Пример 4. Используя показательную форму комплексных чисел, вычислить $(1 + i\sqrt{3})^3 (1 + i)^2$.

$$\Delta (1 + i\sqrt{3})^3 (1 + i)^2 = \left(2e^{\frac{\pi i}{3}} \right)^3 \left(\sqrt{2} e^{\frac{\pi i}{4}} \right)^2 = 2^3 e^{\pi i} \cdot 2e^{\frac{\pi i}{2}} = 16e^{\frac{3}{2}\pi i} =$$

$$= 16 \left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi \right) = -16i. \blacktriangle$$

Пример 5. Исследовать на ограниченность последовательности $z_n = i^n$, $w_n = (1 + i)^n$.

Δ Так как $|z_n| = |i^n| = 1$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется, например, $|z_n| < 2$. По определению последовательность z_n – ограничена. Для последовательности w_n находим $|w_n| = |1 + i|^n = (\sqrt{2})^n$. Очевидно, что для любого $\mu > 0$ найдется такой номер N , при котором для любого $n > N$ выполняется $(\sqrt{2})^n > M$.

Таким образом, последовательность $w_n = (1 + i)^n$ является не только неограниченной, но и бесконечно большой. \blacktriangle

Пример 6. Пользуясь определением предела доказать, что последовательность $z_n = \frac{n + i}{n + 2}$ имеет пределом число $\alpha = 1$.

Δ Пусть задано произвольное число $\varepsilon > 0$. Покажем, что существует такой номер N , при котором $|z_n - 1| < \varepsilon$, как только $n > N$.

Так как $|z_n - 1| = \left| \frac{n + i}{n + 2} - 1 \right| = \left| \frac{i - 2}{n + 2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{n + 2}$, то неравенство $|z_n - 1| < \varepsilon$ будет выполнено, если $\frac{\sqrt{5}}{n + 2} < \varepsilon$, т. е. при $n > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} - 2$. Значит в качестве N можно взять $N = N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} - 2 \right\rceil$. \blacktriangle

Пример 7. Доказать, что последовательность $z_n = \frac{i^n + (-i)^n}{2}$ ограничена, но расходится.

$$\Delta \text{ Имеем } |z_n| = \left| \frac{i^n + (-i)^n}{2} \right| \leq \frac{|i^n| + |(-i)^n|}{2} = 1.$$

Последовательность ограничена. Находим $z_{4n} = \frac{i^{4n} + (-i)^{4n}}{2} = 1,$
 $z_{4n+1} = \frac{i^{4n+1} + (-i)^{4n+1}}{2} = \frac{i-i}{2} = 0.$

Последовательность z_n является расходящейся. ▲

Пример 8. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4ni}{i-2n}.$

Δ Первый способ. Обозначим $z_n = \frac{1+4ni}{i-2n}$ и найдем $x_n = \operatorname{Re} z_n, y_n = \operatorname{Im} z_n:$

$$\frac{1+4ni}{i-2n} = \frac{(1+4ni)(-2n-i)}{(-2n+i)(-2n-i)} = \frac{-2n-i-8n^2i+4n}{4n^2+1} = \frac{2n}{4n^2+1} + i \frac{-1-8n^2}{4n^2+1}.$$

Находим пределы последовательностей действительных чисел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{4n^2+1} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1-8n^2}{4n^2+1} = -2.$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = -2i.$

Второй способ. Найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4ni}{i-2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + 4i}{\frac{i}{n} - 2} = -2i. \quad \blacktriangle$

Пример 9. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+3i)^n.$

Δ Запишем комплексное число $z = 1+3i$ в тригонометрической форме:
 $z = 1+3i = \sqrt{10} (\cos \operatorname{arctg} 3 + i \sin \operatorname{arctg} 3).$ Тогда

$$z_n = (\sqrt{10} (\cos \operatorname{arctg} 3 + i \sin \operatorname{arctg} 3))^n = \sqrt{10} (\cos n \operatorname{arctg} 3 + i \sin n \operatorname{arctg} 3).$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{10}^n = +\infty,$ а $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n \operatorname{arctg} 3$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n \operatorname{arctg} 3$ не существуют, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+3i)^n$ не существует.

Пример 10. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям:

а) $\frac{3\pi}{4} \leq \arg(z-2-i) \leq \pi, |\operatorname{Im} iz| \leq 1;$

б) $0 \leq \arg(z+1+i) \leq \frac{\pi}{2}, \operatorname{Re} iz \geq \operatorname{Re}(z-2).$

Δ а) Комплексное число $z - (2+i)$ изображается вектором, началом которого является точка $2+i,$ а концом – точка $z.$ Угол между этим вектором и осью

OX должен меняться в пределах от $\frac{3\pi}{4}$ до $\pi.$

Так как $|\operatorname{Im} iz| = |\operatorname{Im}(ix - y)| = |x|$, то множеству могут принадлежать лишь те точки, которые расположены внутри полосы $-1 \leq x \leq 1$.

Искомое множество изображено на рис. 12.

б) Угол между векторами, проходящими через точку $-1 - i$, и осью OX должен меняться в пределах от 0 до $\pi/2$.

Так как

$$\operatorname{Re} iz = \operatorname{Re}(ix - y) = -y, \quad \operatorname{Re}(z - 2) = x - 2,$$

то $y \leq 2 - x$.

Сверху искомое множество ограничено прямой $y = 2 - x$ (рис. 13). ▲

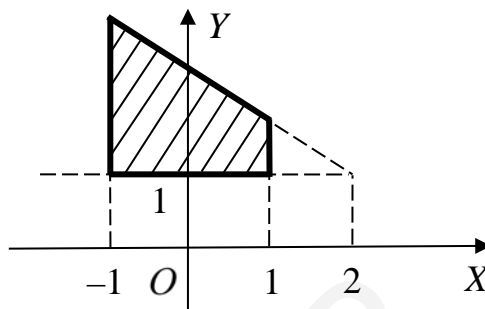


Рис. 12

Пример 11. Какие линии на плоскости представлены уравнениями:

а) $z = 6e^{it} + 3e^{-it}$;

б) $z = t - 2 + i(t^2 - 4t + 5)$.

Δ а) Так как

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad e^{-it} = \cos t - i \sin t,$$

то $z = 9 \cos t + 3i \sin t$. Отсюда следует, что па-

раметрическое уравнение линии $\begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 3 \sin t \end{cases}$

является уравнением эллипса.

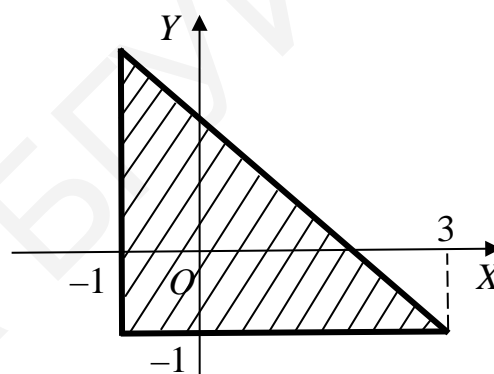


Рис. 13

Исключив параметр t , получим $\frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$.

б) Из данного уравнения следует, что $\begin{cases} x = t - 2, \\ y = t^2 - 4t + 5. \end{cases}$

Исключив параметр t , получим $\begin{cases} t = x + 2, \\ y = (x + 2)^2 - 4(x + 2) + 5, \quad y = x^2 + 1. \end{cases}$

Данное уравнение на плоскости XOY определяет параболу. ▲

Пример 12. Определить вид кривой, заданной соотношениями:

а) $|z + 4 - 10i| = |z - 4 - 2i|$; б) $|z + 4 - i| = |z - 2 - 7i|$.

Δ а) Подставив $z = x + iy$, запишем числа в алгебраической форме:

$$|(x + 4) + i(y - 10)| = |(x - 4) + i(y - 2)|.$$

Запишем равенство квадратов модулей полученных комплексных чисел:

$$(x + 4)^2 + (y - 10)^2 = (x - 4)^2 + (y - 2)^2,$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 20y + 100 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4, \quad y = x + 6.$$

б) Решим задачу геометрически. На плоскости XOY нанесем точки $A(-4; 1)$ и $B(2; 7)$. Очевидно, что геометрическое место точек есть прямая, которая перпендикулярна отрезку AB и проходит через его середину.

Находим угловой коэффициент прямой AB : $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-1}{2+4} = 1$. Угловой коэффициент искомой прямой $k_1 = -1$.

Середина отрезка AB имеет координату $C(-1; 4)$.

Уравнение прямой имеет вид $y - 4 = -(x + 1)$, $y = -x + 3$. ▲

Пример 13. Определить вид кривой, заданной уравнением $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = 1$.

Δ Находим

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \operatorname{Re} \frac{1}{x-iy} = \operatorname{Re} \frac{(x+iy)}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}; \quad \frac{x}{x^2+y^2} = 1, \quad x^2+y^2-x=0,$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

В результате получено уравнение окружности радиусом $R = \frac{1}{2}$ с центром в точке $C\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. ▲

Дополнительные задачи

1. Вычислить значение функции $f(z) = z^4 + 2z^3 - 3z^2 + 4z$ при $z = 1 - i$.

Ответ: $2 - 3i$.

2. Записать в тригонометрической форме число $(1+i)^5(\sqrt{3}-i)^7$.

Ответ: $z = 2^9 \cdot \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + 2\pi k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} + 2\pi k\right) \right)$.

3. Вычислить $\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}i}{4}}$.

Ответ: $w_0 = \sqrt[3]{1/2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{9}\right) \right)$; $w_1 = \sqrt[3]{1/2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{9}\right) \right)$;
 $w_2 = \sqrt[3]{1/2} \left(\cos\left(-\frac{7\pi}{9}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{9}\right) \right)$.

4. Пользуясь определением предела доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3ni}{n+1} = 1+3i$.

5. Вычислить пределы последовательностей:

а) $z_n = n \cdot \sin \frac{i}{n}$; б) $z_n = \frac{\operatorname{sh} in}{n}$; в) $z_n = n \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2}$.

Ответ: а) i ; б) 0 ; в) не существует.

6. Определить вид множества точек z , удовлетворяющих неравенству

$$\left| \frac{z+2}{z+4} \right| < 1.$$

Ответ: правая полуплоскость, $\operatorname{Re} z > -3$.

7. Какие из следующих уравнений являются уравнениями оси OX :

а) $\operatorname{Im} z = 0$; б) $\left| \arg z - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2}$; в) $z - \bar{z} = 0$; г) $|z - i| = |z + i|$.

Ответ: все уравнения определяют ось OX .

8. Какие из следующих уравнений являются уравнением оси OY :

а) $\operatorname{Re} z = 0$; б) $|\arg z| = \frac{\pi}{2}$; в) $z + \bar{z} = 0$; г) $|z - 1| = |z + 1|$.

Ответ: все уравнения определяют ось OY .

9. Определить вид кривой, заданной уравнением $\operatorname{Im} \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $x^2 + (y+1)^2 = 1$.

10. Записать в комплексной форме уравнение окружности единичного радиуса с центром на биссектрисе угла третьей четверти и касающейся осей координат.

Ответ: $|z + 1 + i| = 1$.

Занятие 13

Элементарные функции комплексной переменной

Пример 1. Найти действительные и мнимые части функций:

а) $w = \bar{z} - iz^2$; б) $w = \frac{z-i}{z+2}$.

Δ а) Полагая $\bar{z} = x - iy$ и $z = x + iy$, получим

$$w = x - iy - i(x + iy)^2 = x - iy - i(x^2 - y^2) + 2xy = (x + 2xy) + i(y^2 - y - x^2),$$

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x; y) = x + 2xy, \quad \operatorname{Im} f(z) = v(x; y) = y^2 - y - x^2.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } w &= \frac{z-i}{z+2} = \frac{x+iy-i}{x+iy+2} = \frac{x+i(y-1)}{(x+2)+iy} = \frac{(x+i(y-1))((x+2)-iy)}{((x+2)+iy)((x+2)-iy)} = \\ &= \frac{x(x+2) + y(y-1) + i((y-1)(x+2) - xy)}{(x+2)^2 + y^2}, \text{ т. е.} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x; y) = \frac{x^2 + y^2 + 2x - y}{(x+2)^2 + y^2}, \quad \operatorname{Im} f(z) = v(x; y) = \frac{2y - x - 2}{(x+2)^2 + y^2}. \quad \blacktriangle$$

Пример 2. Найти образ отрезка AB , где $A(1+i)$, $B(4+i)$ при отображении $w = 2iz - 3i$.

Δ При линейном отображении образом прямой является прямая. Поэтому достаточно найти образы концов отрезка. Точке A соответствует точка A' , для которой $w = 2i(1+i) - 3i = -2 - i$, а точке B – точка B' , для которой $w = 2i(4+i) - 3i = -2 + 5i$.

Используя геометрический смысл составляющих линейного отображения, можно проиллюстрировать этапы решения геометрически. Запишем составляющие: $w_1 = 2z$, $w_2 = iw_1$, $w = w_2 - 3i$. Отображение $w_1 = 2z$ представляет собой гомотеию с центром в начале координат и коэффициентом $k = 2$. Отображение $w_2 = iw_1$ представляет собой поворот относительно начала координат на угол $\alpha = \arg i = \frac{\pi}{2}$.

Наконец, отображение $w = w_2 - 3i$ является смещением на три единицы вниз. \blacktriangle

Пример 3. Найти образ окружности $|z| = 1$ при отображении $w = 2iz - 3i$.

Δ Из уравнения $w = 2iz - 3i$ выразим z :

$$z = \frac{w + 3i}{2i}.$$

Подставим полученное выражение z в уравнение $|z| = 1$:

$$\left| \frac{w + 3i}{2} \right| = 1 \quad \text{или} \quad |w + 3i| = 2.$$

Следовательно, искомый образ – окружность радиусом 2 с центром в точке $C(0; -3i)$. \blacktriangle

Пример 4. Найти образ оси OY при отображении $w = 2iz - 3i$.

Δ Уравнение оси OY в комплексной форме запишем как $z = 0x + iy = iy$, $-\infty < y < \infty$. Подставив в уравнение $w = 2iz - 3i$ $z = iy$, получим $w = -2y - 3i$, $-\infty < y < \infty$ или $u = -2y$, $v = -3$. Это есть уравнение прямой в плоскости w , параллельной действительной оси. \blacktriangle

Пример 5. Найти образ первого координатного угла комплексной плоскости z при отображении $w = z^2$.

Δ Найдем предварительно образ луча Oz при отображении $w = z^2$ (рис. 14).

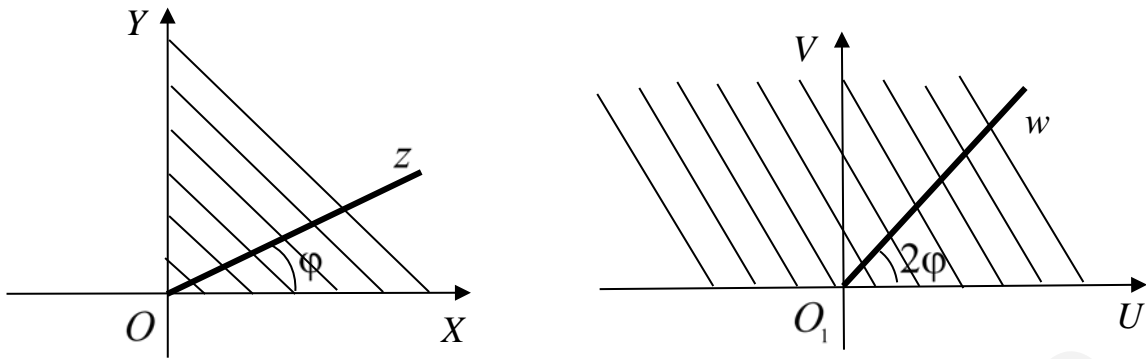


Рис. 14

Представим число z в показательной форме $z = |z| e^{i\varphi}$, тогда $w = |z|^2 \cdot e^{2i\varphi}$, $\arg w = 2\varphi$. Мы видим, что если луч Oz образует с осью OX угол φ , то его образ O_1w на плоскости w образует с осью O_1U угол, равный 2φ . Отсюда следует, что когда угол φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, тогда луч Oz описывает первый координатный угол на плоскости z , а его образ-луч O_1w описывает верхнюю полуплоскость плоскости w . ▲

Пример 6. Для числа $z = -e^{-2+i}$ найти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$.

Δ Запишем число z в показательной форме:

$$z = -1 \cdot e^{-2+i} = e^{\pi i} \cdot e^{-2+i} = e^{-2} \cdot e^{i(\pi+1)}.$$

Имеем $|z| = e^{-2}$, $\varphi = \pi + 1$, или $\arg z = -\pi + 1$, так как $-\pi < \arg z \leq \pi$. Так как $e^{-2} \cdot e^{i(\pi+1)} = e^{-2}((\cos(\pi+1) + i \sin(\pi+1))) = e^{-2}(-\cos 1 - i \sin 1)$, то $\operatorname{Re} z = -e^{-2} \cos 1$, $\operatorname{Im} z = -e^{-2} \sin 1$. ▲

Пример 7. Найти $\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$, если $f(z) = e^{z^2}$.

Δ Находим

$$e^{z^2} = e^{(x+iy)^2} = e^{x^2-y^2} \cdot e^{2ixy} = e^{x^2-y^2} (\cos 2xy + i \sin 2xy).$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re} f(z) = e^{x^2-y^2} \cdot \cos 2xy, \quad \operatorname{Im} f(z) = e^{x^2-y^2} \cdot \sin 2xy. \quad \blacktriangle$$

Пример 8. Показать, что функция e^{iz} является периодической и ее период – действительное число.

Δ Для любого z должно выполняться условие $e^{i(z+T)} = e^{iz}$, $e^{iz} \cdot e^{iT} = e^{iz}$, поэтому число T должно быть таким, чтобы $e^{iT} = \cos T + i \sin T = 1$, а это верно при $T = 2\pi$. ▲

Пример 9. Доказать, что $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$.

Δ Используя формулы Эйлера, находим:

$$\begin{aligned} \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 &= \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} = \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} + \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} = \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \sin(z_1 + z_2). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 10. Найти $\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$ при следующих условиях:

а) $f(z) = \sin z$; б) $f(z) = \operatorname{ch} z$.

Δ а) $f(z) = \sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \sin iy \cos x = \sin x \cdot \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cdot \cos x$, поэтому $\operatorname{Re} f(z) = \sin x \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{sh} y \cdot \cos x$;

б) $f(z) = \operatorname{ch} z = \cos iz = \cos(ix - y) = \cos ix \cdot \cos y + \sin ix \cdot \sin y = \cos y \cdot \operatorname{ch} x + i \operatorname{sh} x \cdot \sin y$, поэтому $\operatorname{Re} f(z) = \cos y \operatorname{ch} x$, $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{sh} x \cdot \sin y$. \blacktriangle

Пример 11. Найти модуль и аргумент числа $f(i)$, если $f(z) = \operatorname{tg} z$.

$$\Delta f(i) = \frac{\sin i}{\cos i} = \frac{i \operatorname{sh} 1}{\operatorname{ch} 1} = i \operatorname{th} 1; \operatorname{Re} f(i) = 0, \operatorname{Im} f(i) = \operatorname{th} 1 = \frac{\operatorname{sh} 1}{\operatorname{ch} 1} = \frac{e^1 - e^{-1}}{e^1 + e^{-1}} > 0,$$

поэтому $|f(i)| = \operatorname{th} 1 = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$, $\arg f(i) = \frac{\pi}{2}$. \blacktriangle

Пример 12. Найти $\operatorname{Ln} z$ и $\ln z$ для числа $z = 2 - i$.

Δ Найдем модуль и аргумент числа z :

$$|z| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}, \arg z = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right).$$

Получаем ответ:

$$\operatorname{Ln}(2 - i) = \ln \sqrt{5} + i \left(\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) + 2k\pi \right); \ln(2 - i) = \ln \sqrt{5} + i \left(\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right). \quad \blacktriangle$$

Пример 13. Найти модуль, аргумент, действительную и мнимую части числа $\ln 2i$.

Δ Находим модуль и аргумент числа $2i$: $|z| = 2$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$. Получаем

$$\ln 2i = \ln 2 + i \frac{\pi}{2}. \text{ Поэтому}$$

$$\operatorname{Re} \ln 2i = \ln 2, \operatorname{Im} \ln 2i = \frac{\pi}{2}; |\ln 2i| = \sqrt{\ln^2 2 + \frac{\pi^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{\ln^2 4 + \pi^2},$$

$$\arg(\ln 2i) = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2 \ln 2}. \quad \blacktriangle$$

Пример 14. Найти $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$.

Δ Находим $\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right|=1$, $\arg\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$. Так как $a^z=e^{z\text{Ln}a}$, то

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}=e^{2i\text{Ln}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)}=e^{2i\left(\ln 1+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)}=e^{-\left(4k+\frac{1}{2}\right)\pi}. \blacktriangle$$

Пример 15. Решить уравнение $\sin z=2$.

Δ Множество решений уравнения определяется выражением $z=\arcsin 2$.

Как известно, $\arcsin z=\frac{1}{i}\text{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2})$.

Следовательно, $\arcsin 2=-i\text{Ln}(2i+\sqrt{1-4})$.

Выражение в скобках в силу двужначности корня записывается в виде $a=2i+\sqrt{3}i$ и $b=2i-\sqrt{3}i$. Для числа $a=(2+\sqrt{3})i$ имеем $|a|=2+\sqrt{3}$, $\arg a=\frac{\pi}{2}$, поэтому $\text{Ln}(2+\sqrt{3})i=\ln(2+\sqrt{3})+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$; для числа

$b=(2-\sqrt{3})i$ имеем $|b|=2-\sqrt{3}$, $\arg b=\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$\text{Ln}(2-\sqrt{3})i=\ln(2-\sqrt{3})+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right).$$

Получаем два множества решений уравнения:

$$z_k=\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)-i\ln(2+\sqrt{3}) \text{ и } z_k=\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)-i\ln(2-\sqrt{3}). \blacktriangle$$

Пример 16. Найти z из уравнения $\text{ch}z=-2i$.

Δ Уравнение $\frac{e^z+e^{-z}}{2}=-2i$ сведем к решению квадратного уравнения

относительно функции e^z : $e^{2z}+4ie^z+1=0$, корнями которого являются числа $(-2+\sqrt{5})i$ и $(-2-\sqrt{5})i$. Нужно найти логарифмы этих чисел:

$$z_k=\text{Ln}(-2+\sqrt{5})i=\ln(\sqrt{5}-2)+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right).$$

$$z_k^*=\text{Ln}(-2+\sqrt{5})i=\ln(\sqrt{5}+2)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right). \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Найти действительные и мнимые части функций: а) $w=i-z^3$;

б) $w=\frac{1}{z-2i}$.

Ответ: а) $u = 3xy^2 - x^3$, $v = 1 - 3x^2y + y^3$;

б) $u = \frac{x}{x^2 + (y-2)^2}$, $v = \frac{2-y}{x^2 + (y-2)^2}$.

2. Найти образ оси OY при отображении $w = \frac{z+2}{z+i}$.

Ответ: $2u - v = 2$.

3. При отображении $w = iz + 1 - 2i$ найти образы прямых: а) $\operatorname{Re} z = 1$;
б) $\operatorname{Im} z = 1$.

Ответ: а) $\operatorname{Im} w = -1$; б) $\operatorname{Re} w = 0$.

4. Записать в показательной форме число $f(i)$, если $f(z) = z \cdot \operatorname{ch} z$.

Ответ: $f(i) = \cos 1 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i}$.

5. Найти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, если $z = e^i (\cos 1 + \operatorname{ch} i)$.

Ответ: $\operatorname{Re} z = 2 \cos^2 1$, $\operatorname{Im} z = \sin 2$.

6. Доказать формулы: а) $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2$;

б) $\sin 2z = 2 \sin z \cdot \cos z$.

7. Найти $|z|$ и $\arg z$, если $z = i \sin^2 \frac{1}{i}$.

Ответ: $|z| = \sin^2 1$, $\arg z = -\frac{\pi}{2}$.

8. Найти $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1+i}$.

Ответ: $e^{(i-1)\left(2k + \frac{1}{6}\right)\pi}$.

9. Решить уравнения:

а) $e^{z+1} = \pi i$; б) $\operatorname{tg} z = \frac{i}{3}$.

Ответ: а) $z = \ln \frac{\pi}{e} + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$;

б) $z_k = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi - i \ln(\sqrt{2} + 1)$, $z_k^* = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi - i \ln(\sqrt{2} - 1)$.

Занятие 14

Аналитические функции

Пример 1. Доказать, что функция $f(z) = z^2$ является непрерывной при любом значении z .

Δ Зафиксируем значение z_0 и рассмотрим разность $z^2 - z_0^2 = (z - z_0)(z + z_0)$. Когда $z \rightarrow z_0$, существует такое положительное значение M , при котором выполняются неравенства $|z| < M$ и $|z_0| < M$, поэтому

$$|z^2 - z_0^2| = |z - z_0||z + z_0| \leq |z - z_0|(|z| + |z_0|) = 2M|z - z_0|.$$

В качестве δ положим число $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$, где $\varepsilon > 0$. Из неравенства $|z - z_0| < \delta$ следует, что $|z^2 - z_0^2| < 2M\delta = \varepsilon$, $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$. Точка z_0 была зафиксирована произвольно, следовательно функция $f(z) = z^2$ непрерывна в любой точке. ▲

Пример 2. Исследовать на непрерывность функцию $w = z^2 \operatorname{Im} z + i \operatorname{Re} (z)^2$.

Δ Представим функцию $f(z)$ в виде $w = u(x; y) + i v(x; y)$:

$$w = (x + iy)^2 \operatorname{Im} (x + iy) + i \operatorname{Re} (x + iy)^2 = (x^2 - y^2 + 2ixy) \cdot y + i \operatorname{Re} (x^2 - y^2 + 2ixy) = x^2 y - y^3 + i(2xy^2 + x^2 - y^2).$$

Отсюда следует, что $u(x; y) = x^2 y - y^3$, $v(x; y) = 2xy^2 + x^2 - y^2$, функции $u(x; y)$ и $v(x; y)$ непрерывны на плоскости XOY , следовательно, данная функция w также непрерывна на всей комплексной плоскости z . ▲

Пример 3. Исследовать на непрерывность функции $\frac{z^2 + 4}{2z - 1}$ и $\frac{2z - 1}{2z^2 + 4}$.

Δ Элементарные функции непрерывны в их области определения, поэтому функция $\frac{z^2 + 4}{2z - 1}$ непрерывна на всей комплексной плоскости z , за исключением точки $\frac{1}{2}$, а функция $\frac{2z - 1}{2z^2 + 4}$ – за исключением точек $\pm 2i$. ▲

Пример 4. Найти пределы:

$$\text{а) } \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{3z + 2}; \quad \text{б) } \lim_{z \rightarrow i} \frac{3z + 2}{z^2 + 1}; \quad \text{в) } \lim_{z \rightarrow -1 + 2i} \frac{z^2 + 2z + 5}{z + 1 - 2i}.$$

Δ а) Ввиду непрерывности функции $\frac{z^2+1}{3z+2}$ в точке i получаем $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2+1}{3z+2} = \frac{-1+1}{3i+2} = 0$. Отметим, что функция $\frac{z^2+1}{3z+2}$ является бесконечно малой в точке i .

б) Так как функция $\frac{z^2+1}{3z+2}$ является бесконечно малой в точке, то обратная ей дробь $\frac{1}{f(z)} = \frac{3z+2}{z^2+1}$ является бесконечно большой в этой точке.

Поэтому $\lim_{z \rightarrow i} \frac{3z+2}{z^2+1} = \infty$.

в) $\lim_{z \rightarrow -1+2i} \frac{z^2+2z+5}{z+1-2i} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{z \rightarrow -1+2i} \frac{(z+1-2i)(z+1+2i)}{z+1-2i} = \lim_{z \rightarrow -1+2i} (z+1+2i) = 4i$. ▲

Пример 5. Доказать дифференцируемость на всей плоскости функции $w = z^2$. Найти ее производную.

Δ Для любой точки z_0 и любого приращения Δz рассмотрим предел $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z_0 + 2z_0\Delta z + (\Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z(2z_0 + \Delta z)}{\Delta z} = 2z_0$.

Предел существует, следовательно, функция дифференцируема в точке z_0 . Так как z_0 – произвольная точка, то $(z^2)' = 2z$. ▲

Пример 6. Исследовать на дифференцируемость функции: а) $f(z) = \bar{z}$; б) $f(z) = (z-i)\operatorname{Re}(z-1)$. Найти их производные, если они существуют.

Δ а) Находим $\operatorname{Re} z = u(x; y) = x$; $\operatorname{Im} z = v(x; y) = -y$. Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$, то условия Коши – Римана не выполняются ни в одной точке. Функция не дифференцируема на всей комплексной плоскости.

б) $w = (z-i)\operatorname{Re}(z-1) = (x+iy-i)\operatorname{Re}(x-1+iy) = (x+iy-i)(x-1) = (x^2-x) + i(yx-y-x+1)$.

Находим частные производные: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x-1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = y-1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = x-1$.

Решаем систему уравнений: $\begin{cases} 2x-1 = x-1, \\ 0 = 1-y. \end{cases}$

Система имеет единственное решение: $x = 0, y = 1$. Следовательно, функция дифференцируема в единственной точке $z = i$. Находим

$$f'(z)|_{z=i} = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=0 \\ y=1}} + i \frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = (2x-1)\bigg|_{\substack{x=0 \\ y=1}} + i(y-1)\bigg|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = -1. \blacktriangle$$

Пример 7. Проверить условия Коши – Римана в произвольной точке, и в случае их выполнения найти $f'(z)$ для функций:

а) $f(z) = 3z \cdot e^{2z}$; б) $f(z) = \cos(z + 2i)$.

Δ а) Определим действительную и мнимую части функции $f(z) = 3z \cdot e^{2z}$:

$$w = 3(x + iy) e^{2x+2iy} = 3(x + iy) e^{2x} (\cos 2y + i \sin 2y) = \\ = 3e^{2x} (x \cos 2y - y \sin 2y) + 3ie^{2x} (y \cos 2y + x \sin 2y).$$

Найдем частные производные функций $u(x; y) = 3e^{2x} (x \cos 2y - y \sin 2y)$ и $v(x; y) = 3e^{2x} (y \cos 2y + x \sin 2y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6e^{2x} (x \cos 2y - y \sin 2y) + 3e^{2x} \cos 2y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3e^{2x} (-2x \sin 2y - \sin 2y - 2y \cos 2y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6e^{2x} (y \cos 2y + x \sin 2y) + 3e^{2x} \sin 2y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3e^{2x} (\cos 2y - 2y \sin 2y + 2x \cos 2y).$$

На всей комплексной плоскости z частные производные непрерывны и удовлетворяют условиям $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Функция $f(z) = 3z \cdot e^{2z}$ является дифференцируемой и аналитической на всей комплексной плоскости z , а значит,

$$f'(z) = (3z \cdot e^{2z})' = 3e^{2z} + 6ze^{2z} = 3e^{2z} (1 + 2z).$$

$$\text{б) } w = \cos(z + 2i) = \cos(x + i(y + 2)) = \cos x \cdot \cos i(y + 2) - \sin x \cdot \sin i(y + 2) = \\ = \cos x \cdot \operatorname{ch}(y + 2) - i \cdot \sin x \operatorname{sh}(y + 2).$$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \cdot \operatorname{ch}(y + 2), \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \cdot \operatorname{sh}(y + 2), \frac{\partial v}{\partial x} = -\cos x \cdot \operatorname{sh}(y + 2),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\sin x \cdot \operatorname{ch}(y + 2).$$

Функция $f(z) = \cos(z + 2i)$ является дифференцируемой и аналитической на всей комплексной плоскости z , поэтому $f'(z) = (\cos(z + 2i))' = -\sin(z + 2i)$. \blacktriangle

Пример 8. Найти коэффициент растяжения и угол поворота любой гладкой кривой, проходящей через точку $z_0 = 1 - i$ при отображении $f(z) = \frac{z - 4i}{z + 2i}$.

Δ Находим

$$f'(z) = \frac{z + 2i - (z - 4i)}{(z + 2i)^2} = \frac{6i}{(z + 2i)^2}, \quad f'(z_0) = \frac{6i}{(z_0 + 2i)^2},$$

$$f'(1 - i) = \frac{6i}{(1 + i)^2} = \frac{6i}{2i} = 3.$$

Так как $|f'(z_0)| = 3$, $\arg f'(z_0) = 0$, то коэффициент растяжения равен 3, а угол поворота кривой $\varphi = 0$. ▲

Пример 9. Определить, при каком условии трехчлен $u(x; y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ является гармонической функцией.

Δ Находим частные производные первого и второго порядка:

$$U'_x = 2ax + 2by, \quad U''_{xx} = 2a, \quad U'_y = 2bx + 2cy, \quad U''_{yy} = 2c.$$

Вторые частные производные должны удовлетворять уравнению $2a + 2c = 0$, т. е. $c = -a$.

При этом условии данный трехчлен будет гармонической функцией, которая имеет вид $u(x; y) = ax^2 + 2bxy - ay^2$. ▲

Пример 10. Восстановить, если это возможно, аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной или мнимой части:

а) $u(x; y) = 2x^2 - 2y^2 - 3y + 1$, $f(1) = 3 + 3i$;

б) $v(x; y) = -6xy + 2x$, $f(1) = 1 + 2i$.

Δ а) Задачу можно решить лишь в том случае, если функция $u = 2x^2 - 2y^2 - 3y + 1$ гармоническая на всей плоскости. Проверим это:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -4y - 3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4.$$

Функция $u(x; y)$ гармоническая, так как $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = 4x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -4y - 3$, то из условий Коши – Римана находим

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 4x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 4y + 3. \text{ Воспользовавшись первым из этих уравнений, находим}$$

$$v(x; y) = \int 4x dy + c(x) = 4xy + c(x).$$

Так как $\frac{\partial v}{\partial x} = 4y + c'(x) = 4y + 3$, то $c'(x) = 3$, $c(x) = \int 3 dx + c = 3x + c$.

Следовательно, $v(x; y) = 4xy + 3x + c$. Получим

$$w = 2x^2 - 2y^2 - 3y + 1 + i(4xy + 3x + c)$$

или

$$w = 2(x + iy)^2 + 3i(x + iy) + ic = 2z^2 + 3iz + ic + 1.$$

Так как $f(1) = 3 + 3i$, то $c = 0$, и окончательно будем иметь

$$w = f(z) = 2z^2 + 3iz + 1.$$

б) Очевидно, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Так как $\frac{\partial v}{\partial x} = -6y + 2$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -6x$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6y - 2.$$

Воспользовавшись первым из уравнений, находим

$$u(x; y) = -\int 6x dx + c(y) = -3x^2 + c(y).$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial y} = c'(y) = 6y - 2$, то $c(y) = \int (6y - 2) dy + c = 3y^2 - 2y + c$.

Следовательно, $u(x; y) = -3x^2 + 3y^2 - 2y + c$. Получим

$$w = -3x^2 + 3y^2 - 2y + c + i(-6xy + 2x) = -3(x + iy)^2 + 2i(x + iy) + c = -3z^2 + 2iz + c.$$

Так как $f(1) = 1 + 2i$, то $c = 4$, и окончательно получим

$$w = f(z) = -3z^2 + 2iz + 4. \quad \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Вычислить пределы: а) $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i}$; б) $\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2z}{\operatorname{ch} iz + i \operatorname{sh} iz}$.

Ответ: а) i ; б) $\sqrt{2}$.

2. Используя формулу бинома Ньютона, найти по определению производную функции $f(z) = z^n$.

Ответ: $f'(z) = n \cdot z^{n-1}$.

3. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = (z - 1) \operatorname{Im}(z + 2i)$, найти ее производную, если она существует. Найти область аналитичности функции.

Ответ: функция не является аналитической, $f'(1) = 2$.

4. Проверить условия Коши – Римана в произвольной точке и в случае их выполнения найти $f'(z)$ для функций:

а) $f(z) = e^{iz^2}$; б) $f(z) = \frac{1}{z-2}$, $z \neq 2$.

Ответ: а) $f'(z) = 2ize^{iz^2}$; б) $f'(z) = -\frac{1}{(z-2)^2}$.

5. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке $z = 2i$ при отображении $w = \frac{z+1}{z+i}$.

Ответ: $k = \frac{1}{9}\sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

6. Восстановить, если это возможно, аналитическую функцию $f(z)$ по заданной ее действительной части $u(x; y) = y^3 - 3x^2y$.

Ответ: $f(z) = i(z^3 + c)$.

Занятие 15

Интегрирование функций комплексной переменной

Пример 1. Вычислить $\int_C \operatorname{Re} z dz$, где C – ломаная OBA ; $O(0;0)$, $B(1;0)$, $A(1;1)$.

Δ Так как путь интегрирования состоит из двух отрезков, запишем интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_{OB} \operatorname{Re} z dz + \int_{BA} \operatorname{Re} z dz = \int_{OB} x(dx + idy) + \int_{BA} x(dx + idy).$$

Для отрезка OB имеем $\begin{cases} y = 0, \\ 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$ а для отрезка BA $\begin{cases} x = 1, \\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$

Производим вычисления:

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 x dx + i \int_0^1 1 \cdot dy = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + iy \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + i. \blacktriangle$$

Пример 2. Вычислить $\int_{AB} (z + 2\bar{z}) dz$, где AB – отрезок прямой: $z_A = 1 + 3i$, $z_B = 2 + 5i$.

Δ Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $(1; 3)$ и $(2; 5)$:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-3}{5-3}, \quad y = 2x + 1.$$

Уравнение линии AB есть $y = 2x + 1$, где $1 \leq x \leq 2$.

Имеем $z = x + i(2x + 1)$, $\bar{z} = x - i(2x + 1)$, $dz = dx + 2i dx$.

Находим

$$\begin{aligned} \int_{AB} (z + 2\bar{z}) dz &= \int_1^2 (x + 2ix + i + 2x - 4ix - 2i) (dx + 2idix) = \\ &= \int_1^2 (3x - 2ix - i) (dx + 2i dx) = \int_1^2 (3x + 4x + 2) dx + i \int_1^2 (6x - 2x - 1) dx = \\ &= \left(\frac{7}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_1^2 + i (2x^2 - x) \Big|_1^2 = \left(14 + 4 - \frac{7}{2} - 2 \right) + i (8 - 2 - 2 + 1) = \\ &= \frac{25}{2} + 5i. \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить $\int_C |z| \cdot \bar{z} dz$, где C – верхняя полуокружность $|z|=1$, обход кривой C против часовой стрелки.

Δ Здесь удобно использовать формулу $\int_C f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \cdot z'(t) dt$.

Кривая C имеет параметрическое уравнение $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Для $z = e^{it}$ находим $\bar{z} = e^{-it}$, $|z| = 1$, $dz = ie^{it} dt$. Вычисляем интеграл

$$\int_C |z| \bar{z} dz = \int_0^{\pi} 1 \cdot e^{-it} \cdot i e^{it} dt = \int_0^{\pi} i dt = i\pi. \blacktriangle$$

Пример 4. Вычислить $\int_C \frac{dz}{(z-a)^n}$, где C – окружность $|z-a|=R$.

Δ Запишем уравнение окружности в параметрической форме: $z = a + Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Находим $dz = Rie^{it} dt$. Подставляем z и dz в подынтегральное выражение и вычисляем полученный интеграл:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dz}{(z-a)^n} &= \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}}{R^n e^{int}} dt = \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{it(1-n)} dt = \frac{i}{R^{n-1}} \cdot \frac{1}{i(1-n)} e^{it(1-n)} \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{R^{n-1}(1-n)} (e^{2\pi i(1-n)} - 1) = 0, \quad n \neq 1. \end{aligned}$$

При $n=1$ получим $\int_C \frac{dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i. \blacktriangle$

Пример 5. Вычислить $\int_C z \cos z dz$, где C – произвольная линия, соединяющая точки $z_1=0$ и $z_2=i$.

Δ Подынтегральная функция $f(z) = z \cdot \cos z$ является аналитической на всей комплексной плоскости z , поэтому интеграл можно вычислить по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_C z \cos z \, dz = \int_0^i z \cos z \, dz = \left| \begin{array}{l} z = u, \, du = dz, \\ \cos z \, dz = dv, \, v = \sin z \end{array} \right| = z \sin z \Big|_0^i - \int_0^i \sin z \, dz =$$

$$= i \sin i + \cos i - 1 = \frac{i(e^{-1} - e^1)}{2i} + \frac{e^{-1} + e^1}{2} - 1 = e^{-1} - 1. \blacktriangle$$

Пример 6. Вычислить $\int_C \frac{e^{2z}}{4z^2 + 1} dz$, где C – контур, образованный кривыми $x = y^2$, $x = 1$.

Δ Функция $f(z) = \frac{e^{2z}}{4z^2 + 1}$ является аналитической на всей комплексной плоскости z , за исключением точек $\pm \frac{1}{2}i$. Эти точки расположены вне контура C .

По теореме Коши $\int_C \frac{e^{2z}}{4z^2 + 1} dz = 0$. \blacktriangle

Пример 7. Вычислить $\int_C \frac{\sin z}{z^3 + 16z} dz$, где контур $C: |z - 2 - i| = 2$.

Δ Находим нули знаменателя – особые точки подынтегральной функции. Это точки $z_1 = 0$, $z_2 = 4i$, $z_3 = -4i$. Контур интегрирования представляет собой окружность радиусом 2 с центром в точке $z_0 = 2 + i$. Найдем расстояния от точек z_1 , z_2 и z_3 до точки z_0 :

$$|z_1 - z_0| = |0 - 2 - i| = \sqrt{5} > 2;$$

$$|z_2 - z_0| = |4i - 2 - i| = |-2 + 3i| = \sqrt{13} > 2;$$

$$|z_3 - z_0| = |-4i - 2 - i| = |-2 - 5i| = \sqrt{29} > 2.$$

Все особые точки расположены вне контура интегрирования. Следовательно, согласно теореме Коши интеграл равен нулю. \blacktriangle

Пример 8. Вычислить $\int_C \frac{\sin z}{z^3 + 16z} dz$, где контур $C: |z + 4i| = 2$.

Δ Внутри круга $|z + 4i| = 2$ попадает одна особая точка подынтегральной функции $z = -4i$. Функцию $\frac{\sin z}{z^3 + 16z}$ запишем в виде $\frac{\sin z}{z(z - 4i)}$, где числитель

$\frac{\sin z}{z(z - 4i)}$ является аналитической функцией в круге $|z + 4i| \leq 2$.

Применяя интегральную формулу Коши, получим ответ:

$$\int_C \frac{\sin z}{z^3 + 16z} dz = 2\pi i \frac{\sin z}{z(z - 4i)} \Big|_{z=-4i} = 2\pi i \frac{-\sin 4i}{-32} = \frac{\pi i}{16} \cdot i \cdot \operatorname{sh} 4 = -\frac{\pi}{16} \operatorname{sh} 4. \blacktriangle$$

Пример 9. Вычислить $\int_C \frac{e^z}{(z-i)^2 \cdot (z+2)} dz$ для следующих контуров:

а) $C_1: |z+2+i|=2;$

б) $C_2: |z-i|=2;$

в) $C_3: |z+2-i|=3.$

Δ Находим особые точки подынтегральной функции – нули знаменателя $z_1 = i, z_2 = -2$. Определяем принадлежность точек соответствующим областям. В случае «а» внутри контура интегрирования находится точка $z = -2$. Запишем

дробь в виде $\frac{e^z}{z+2} \cdot \frac{1}{(z-i)^2}$, где $f(z) = \frac{e^z}{z+2}$ – аналитическая функция в круге $|z+2+i| \leq 2$.

Вычисляем интеграл:

$$\int_{C_1} \frac{e^z}{z+2} dz = 2\pi i \frac{e^{-2}}{(2+i)^2}.$$

В случае «б» внутрь контура интегрирования попадает точка $z = i$. Записываем

функцию $\frac{e^z}{z+2}$ и вычисляем интеграл:

$$\int_{C_2} \frac{e^z}{z+2} dz = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z+2} \right)' \Big|_{z=i} = 2\pi i \frac{e^z(z+2) - e^z}{(z+2)^2} \Big|_{z=i} = \frac{2\pi i (1+i)}{(2+i)^2} e^i.$$

В круг $|z+2-i| < 3$ входят обе точки $z_1 = -2, z_2 = i$.

Построим контур C_3 и две окружности γ_1 и γ_2 с центрами в точках $z_1 = -2$ и $z_2 = i$ достаточно малыми радиусами, такими, чтобы все три окружности не пересекались между собой (рис. 15).

По теореме Коши для многосвязной области

$$\int_{C_3} \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)} dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)} dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)} dz.$$

Но

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)} dz = \int_{C_1} \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)} dz,$$

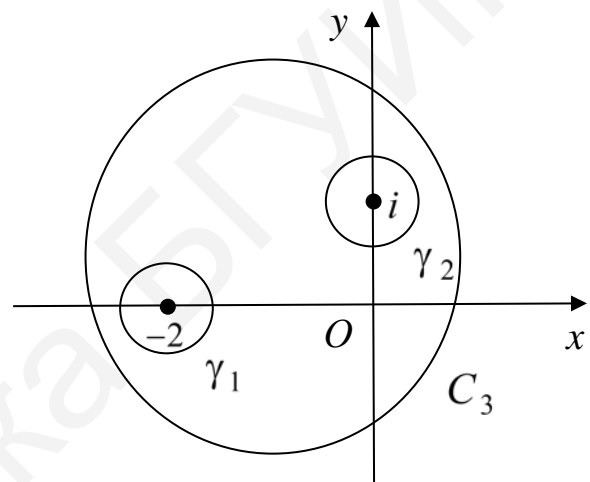


Рис. 15

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)} dz = \int_{C_2} \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)} dz.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{C_3} \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)} dz &= 2\pi i \frac{e^{-2}}{(2+i)^2} + 2\pi i \frac{1+i}{(2+i)^2} e^i = 2\pi i \frac{1+i}{(2+i)^2} e^i = \\ &= \frac{2\pi i}{(2+i)^2} (e^{-2} + e^i(1+i)). \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислить $\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}$.

Δ Внутри контура интегрирования находится одна особая точка $z = -1$.

Представим подынтегральную функцию в виде $\frac{1}{(z-1)^3(z+1)^3} = \frac{1}{(z-1)^3} \cdot \frac{1}{(z+1)^3}$. Так как функция $\frac{1}{(z-1)^3}$ является аналитической внутри контура интегрирования,

$$\text{то } \int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3} = \frac{2\pi i}{2!} \left(\frac{1}{(z-1)^3} \right)'' \Bigg|_{z=-1} = \pi i \cdot \frac{12}{(z-1)^5} \Bigg|_{z=-1} = -\frac{3\pi i}{8}. \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Вычислить $\int_C \bar{z} \operatorname{Re} z dz$, где C – отрезок прямой, содержащей точки $z_1 = -2 - i$ и $z_2 = 1 + 2i$.

Ответ: $\frac{9}{2} + \frac{3}{2}i$.

2. Вычислить $\int_{AB} (1+i-2\bar{z}) dz$, где AB – часть параболы $y = x^2$ от точки $A = 0$ до точки $B = 1+i$.

Ответ: $-2 + \frac{4}{3}i$.

3. Вычислить $\int_C z \cdot \bar{z} dz$, $C: |z|=1$. Обход против часовой стрелки.

Ответ: 0.

4. Вычислить $\int_0^i (z-i) e^{-z} dz$.

Ответ: $1 - \cos 1 + i(\sin 1 - 1)$.

5. Вычислить $\int_C \frac{dz}{z^2 - z - 12}$, $C: x = 2 \cos t, y = \sin t$.

Ответ: 0.

6. Вычислить $\int_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2 - 4z + 3} dz$.

Ответ: $\pi \cdot \operatorname{sh} 1$.

7. Вычислить $\int_{|z|=10} \frac{e^{z-3}}{(z-1)(z-5)} dz$.

Ответ: $\pi i \cdot \operatorname{sh} 2$.

8. Вычислить $\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz$.

Ответ: $-\pi i \cdot \operatorname{ch} 1$.

Занятие 16

Контрольная работа

Вариант 1

1. Найти образы линий $y = 2$ и $y = x + 1$ при отображении $w = (1 + i)z + 1 - i$. Проверить, изменился ли угол между заданными прямыми при указанном отображении.

Ответ: $u = 0, u = v - 2$. Не изменился.

2. Определить вид кривой, заданной соотношением $|z + 3 - 9i| = |z - 5 - i|$.

Ответ: $y = x + 4$.

3. Вычислить 2^{1+i} .

Ответ: $e^{\ln 2 - 2k\pi} (\cos \ln 2 + i \sin \ln 2)$.

4. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = (z - 3i) \operatorname{Re}(z - 2)$, найти ее производную, если она существует. Найти область аналитичности функции.

Ответ: $f'(z) \Big|_{z=3i} = -2$. Функция не является аналитической.

5. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x; y) = y^2 - x^2 + 2y - 6$ и значению $f(1) = 2 - 7i$.

Ответ: $f(z) = -iz^2 + 2z - 6i$.

6. Вычислить $\int_{AB} (3z - \bar{z}) dz$, AB – отрезок прямой $z_A = -2 + 3i$, $z_B = -1 + i$.

Ответ: $13 + 14i$.

7. Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить $\int_{|z-1|=2} \frac{\cos z}{z^2 + 3z} dz$.

Ответ: $\frac{2}{3} \pi i$.

8. Пользуясь интегральной формулой Коши для многосвязной области, вычислить $\int_{|z|=10} \frac{\cos(z-3)}{(z-3)(z+2)} dz$.

Ответ: $\frac{2\pi i}{5} (1 - \cos 5)$.

9. Вычислить $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2} \cos \frac{\pi}{z+2} dz$.

Ответ: $\frac{1}{2} \pi^2 i$.

Вариант 2

1. Найти образы линий $x=1$ и $y=x-1$ при отображении $w = (1-i)z + 1 + i$. Проверить, изменился ли угол между заданными прямыми при указанном отображении.

Ответ: не изменился.

2. Определить вид кривой, заданной соотношением $|z+6+i| = |z+2-3i|$.

Ответ: $y = -x - 3$.

3. Вычислить i^{2i} .

Ответ: $e^{-\pi+4k\pi}$.

4. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = (z+2i)\operatorname{Re}(z+5)$, найти ее производную, если она существует. Найти область аналитичности функции.

Ответ: $f'(z) \Big|_{z=-2i} = 5$. Функция не является аналитической.

5. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по известной ее действительной части $u(x; y) = 4xy + x$ и значению $f(1) = -i + 1$.

Ответ: $f(z) = -2z^2 i + z + i$.

6. Вычислить $\int_{AB} (2z + \bar{z}) dz$, где AB – отрезок прямой $z_A = -2 - 3i$, $z_B = -1 - i$.

Ответ: $-\frac{1}{2} - 11i$.

7. Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить $\int_{|z+3|=1} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2 + 3z} dz$.

Ответ: $-\frac{2}{3} \pi i \cos 3$.

8. Пользуясь интегральной формулой Коши для многосвязной области, вычислить $\int_{|z|=10} \frac{\operatorname{sh}(z+2)}{(z-1)(z+5)} dz$.

Ответ: $\frac{2}{3} \pi i \operatorname{sh} 3$.

9. Вычислить $\int_{|z-1|=0,5} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2} dz$. Ответ: $-\frac{\pi}{2} e^i (1+i)$.

Занятие 17

Ряды в комплексной области

Пример 1. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 2ni + 3}{3in^2 + 5n + 1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2ni + 5}{3in^4 + n^2 + 3i}$.

Δ а) Здесь $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2ni + 3}{3in^2 + 5n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n}i + \frac{3}{n^2}}{3i + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{3i} \neq 0$.

Ряд расходится.

б) Пусть $a_n = \frac{n^2 + 2ni + 5}{3in^4 + n^2 + 3i}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$.

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = \frac{1}{3} \neq 0$, то в смысле сходимости оба ряда ведут себя

одинаково. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится абсолютно, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится абсолютно. ▲

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2-3i)^n}$. В случае сходимости найти его сумму.

Δ Ряд сходится как ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} q^n, |q| < 1$ (в нашем случае $|q| = \frac{1}{\sqrt{13}}$).

Его сумма равна $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2-3i}} = \frac{2-3i}{1-3i} = \frac{(2-3i)(1+3i)}{10} = \frac{11+3i}{10}$. ▲

Пример 3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+in}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-i)\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n+i}{n^2}$.

Δ а) Так как $z_n = \frac{1}{\sqrt{n+in}} = \frac{\sqrt{n-in}}{n+n^2} = \frac{\sqrt{n}}{n+n^2} + i \frac{-1}{1+n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n+1}$ является расходящимся, то расходится и искомый ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+in}}$.

б) Имеем $|z_n| = \left| \frac{1}{(n-i)\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} \cdot \sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}, n \rightarrow \infty$.

Ряд сходится абсолютно.

в) Имеем $z_n = \frac{(-1)^n \cdot n+i}{n^2} = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{i}{n^2}$. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходятся.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n+i}{n^2}$ тоже сходится.

Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}$. Так как $\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2} \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}$ расходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n+i}{n^2}$ сходится условно. ▲

Пример 4. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)^n}{n \cdot 2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-i}{3} \right)^{n^2}$.

Δ а) Используя признак Даламбера, находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2+i)^{n+1} \cdot n \cdot 2^n}{(n+1) 2^{n+1} \cdot (2+i)^n} \right| = \left| \frac{2+i}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$. Ряд расходится.

б) Используя признак Коши, находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2-i}{3} \right|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^n = 0.$$

Ряд сходится абсолютно. ▲

Пример 5. Исследовать сходимость ряда

$$\dots + \frac{(3+4i)^3}{z^3} + \frac{(3+4i)^2}{z^2} + \frac{3+4i}{z} + 1 + \frac{z}{i} + \frac{z^2}{i^2} + \frac{z^3}{i^3} + \dots$$

Δ Рассмотрим два ряда:

$$\frac{3+4i}{z} + \frac{(3+4i)^2}{z^2} + \frac{(3+4i)^3}{z^3} + \dots; \quad 1 + \frac{z}{i} + \frac{z^2}{i^2} + \frac{z^3}{i^3} + \dots$$

Эти ряды – геометрические прогрессии со знаменателями $\frac{3+4i}{z}$ и $\frac{z}{i}$.

Ряды сходятся в области $\begin{cases} \left| \frac{3+4i}{z} \right| < 1, \\ \left| \frac{z}{i} \right| < 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} |z| > 5, \\ |z| < 1. \end{cases}$ Эта система несов-

местна, следовательно искомым ряд не сходится ни в одной точке плоскости. ▲

Пример 6. Исследовать сходимость функциональных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-i}{2z+i} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot e^{i+nz}$.

Δ а) Точка $z=0$, очевидно, не входит в область сходимости этого ряда.

Сходимость в других точках исследуем с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n! z^n}{(n+1)! z^{n+1}} \right| = \frac{1}{|z|} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Ряд сходится на всей комплексной плоскости, за исключением точки $z=0$.

б) Применим признак Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{z-i}{2z+i} \right|^n} = \left| \frac{z-i}{2z+i} \right|.$$

Ряд сходится в области

$$\left| \frac{z-i}{2z+i} \right| < 1, |z-i| < |2z+i|, \sqrt{x^2 + (y-1)^2} < \sqrt{4x^2 + (2y+1)^2},$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 < 4x^2 + 4y^2 + 4y + 1, 3x^2 + 3y^2 + 6y > 0,$$

$$x^2 + (y+1)^2 > 1, \sqrt{x^2 + (y+1)^2} > 1, |z+i| > 1.$$

На границе круга $|z-i| = |2z+i|$, т. е. $|z+i| = 1$ ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости.

Ряд сходится в области $|z + i| > 1$.

в) Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1} e^{i+(n+1)z}}{2^n e^{i+nz}} \right| = |2e^z| = |2e^{x+iy}| = 2e^x.$$

Ряд сходится в области $2e^x < 1$, $e^x < \frac{1}{2}$, $x < -\ln 2$.

На границе области ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости. Ряд сходится в области $\operatorname{Re} z < -\ln 2$. ▲

Пример 7. Найти области сходимости степенных рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(z-2+i)^n}{2^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1+2i)^n}{(n+2) \cdot 3^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^{2n}}{4^n}.$$

$$\Delta \text{ а) Находим } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 2^{n+1}}{2^n \cdot (n+1)!} = 0. \text{ Ряд сходится в един-$$

ственной точке $z = 2 - i$.

$$\text{б) } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3) \cdot 3^{n+1}}{(n+2) \cdot 3^n} = 3. \text{ Область сходимости определяется}$$

неравенством $|z + 1 + 2i| < 3$. Мы не исследуем сходимость ряда на границе области. Отметим только, что в данном случае на границе существуют как точки сходимости ряда, например $z = -4 - 2i$, так и точки расходимости, например $z = 2 - 2i$.

в) Так как ряд содержит бесконечное число нулевых членов, следует применить непосредственно признак Даламбера или Коши.

$$\text{Воспользуемся признаком Коши: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|z-i|^{2n}}{4^n}} = \frac{|z-i|^2}{4}.$$

Из равенства $\frac{|z-i|^2}{4} < 1$ находим $|z-i| < 2$. Очевидно, что граничные точки не

входят в область сходимости ряда. Ряд сходится в области $|z-i| < 2$. ▲

Пример 8. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{(3n-1)^2 \cdot 3^n}$ сходится равномерно

в области $|z| \leq \sqrt[3]{3}$.

Δ Для точек z , удовлетворяющих неравенству $|z| \leq \sqrt[3]{3}$, выполняются не-

равенства $|z| \leq \sqrt[3]{3}$ и $\left| \frac{z^{3n+1}}{(3n-1)^2 \cdot 3^n} \right| \leq \frac{\sqrt[3]{3}}{(3n-1)^2}$, т. е. искомый степенной ряд

мажорируется числовым знакоположительным рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{3}}{(3n-1)^2}$.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{3}}{(3n-1)^2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{(3n-1)^2 \cdot 3^n}$ в круге $|z| \leq \sqrt[3]{3}$ сходится равномерно. ▲

Пример 9. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot z^{2n}$.

Δ Ряд сходится в области $|z| < 1$. Как известно, внутри круга сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать. Пусть $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot z^{2n}$;

$S_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot z^{2n-1}$, тогда $S(z) = \frac{1}{2} z \cdot S_1(z)$.

$$\int_0^z S_1(t) dt = \int_0^z \sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot t^{2n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n} = \frac{z^2}{1-z^2};$$

$$S_1(z) = \left(\frac{z^2}{1-z^2} \right)' = \frac{2z(1-z^2) + 2z \cdot z^2}{(1-z^2)^2} = \frac{2z}{(1-z^2)^2};$$

$$S(z) = \frac{1}{2} z \cdot \frac{2z}{(1-z^2)^2} = \frac{z^2}{(1-z^2)^2}. \quad \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in^2}{3^{n^2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \pi n \cdot \sin \frac{1}{n} + i \frac{2^n}{n!} \right)$.

Ответ: а) расходится; б) сходится абсолютно; в) сходится условно.

2. Найти области сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(n+1)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (1-i)^n}{\sqrt{(3n-2) \cdot 8^n}} (z-i+1)^n$;

г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{(3n-1) \cdot 3^n}$; д) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sin^n(1+in)}$.

Ответ: а) $|z| < \infty$; б) $z = 0$; в) $|z-i+1| < \frac{1}{3}$; г) $|z| < \sqrt[3]{3}$; д) $|z| < \infty$.

3. Найти области сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z+3}{z-3i} \right)^n$.

Ответ: полуплоскость $x + y < 0$.

4. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{z^n}{3^n}$.

Ответ: $\frac{3z}{(3-z)^2}$.

5. Показать, что область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{(-1)^{n+1}}{3^n} - 1 \right) + \left(\frac{(-1)^n}{2^n} + 1 \right) \right) z^n$

больше, чем общая область сходимости рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{3^n} - 1 \right) z^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^n} + 1 \right) z^n.$$

Занятие 18

Ряды Тейлора и Лорана

Пример 1. Разложить функцию $f(z) = e^{3z-2}$ по степеням $z-1$ и указать область сходимости полученного ряда.

Δ Первый способ. Функция $f(z) = e^{3z-2}$ является аналитической в области $|z-1| < \infty$, т. е. на всей комплексной плоскости. Следовательно, функцию $f(z)$ можно представить рядом Тейлора по степеням $z-1$, который сходится на всей комплексной плоскости. Находим производные данной функции и вычисляем их в точке $z=1$:

$$f(z) = e^{3z-2}, \quad f(1) = e;$$

$$f'(z) = 3e^{3z-2}, \quad f'(1) = 3e;$$

$$f''(z) = 3^2 e^{3z-2}, \quad f''(1) = 3^2 e;$$

$$f^{(n)}(z) = 3^n e^{3z-2}, \quad f^{(n)}(1) = 3^n e$$

Таким образом, для данной функции имеем

$$e^{3z-2} = e \left(1 + \frac{3}{1!} (z-1) + \frac{3^2}{2!} (z-1)^2 + \dots + \frac{3^n}{n!} (z-1)^n + \dots \right) = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} (z-1)^n, \quad |z-1| < \infty.$$

Второй способ. Так как данную функцию можно представить в виде

$e^{3z-2} = e \cdot e^{3(z-1)}$, то, используя представление $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$, $|t| < \infty$, получаем

$$e^{3z-2} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} (z-1)^n, \quad |z-1| < \infty. \quad \blacktriangle$$

Пример 2. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(z) = \sin(2z-1)$.

Δ Представим функцию $f(z)$ в виде $\sin(2z-1) = \cos 1 \cdot \sin 2z - \sin 1 \cdot \cos 2z$.

Так как $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $|z| < \infty$ и $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$, $|z| < \infty$,

то $\sin 2z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $|z| < \infty$ и $\cos 2z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{(2n)!} z^{2n}$, $|z| < \infty$.

Окончательно получаем

$$\sin(2z-1) = \cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1} - \sin 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < \infty. \quad \blacktriangle$$

Пример 3. Разложим по степеням $(z-1)$ функцию $\frac{z+2}{z^2-2z-3}$.

Δ Разложить дробь на элементарные:

$$\frac{z+2}{z^2-2z-3} = \frac{z+2}{(z-3)(z+1)} = \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z+1}; \quad A(z+1) + B(z-3) \equiv z+2.$$

Полагая $z=3$, получим $A = \frac{5}{4}$. Полагая $z=-1$, получим $B = -\frac{1}{4}$.

Таким образом, $\frac{z+2}{z^2-2z-3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{z-3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z+1}$;

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z-1)-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n};$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n};$$

$$\frac{z+2}{z^2-2z-3} = -\frac{5}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n} - \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}} ((-1)^{n+1} - 5) (z-1)^n.$$

Расстояние от точки $z_0 = 1$ до ближайшей особой точки равно 2. Следовательно, разложение справедливо в области $|z-1| < 2$. \blacktriangle

Пример 4. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(z) = \frac{z}{z^2-i}$.

Δ Используя основные разложения, получим

$$\frac{z}{z^2 - i} = \frac{z}{-i} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{i}} = \frac{z}{-i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{i^n} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{i^{n+1}}.$$

Разложение справедливо в области $\left| \frac{z^2}{i} \right| < 1$, $|z| < 1$. ▲

Пример 5. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $z = 2$ функцию $f(z) = \ln(2z - z^2 + 3)$.

Δ Так как $2z - z^2 + 3 = (3 - z)(z + 1)$, то полагая $z - 2 = t$, получаем

$$2z - z^2 + 3 = (1 - t)(3 + t) = 3(1 - t) \left(1 + \frac{t}{3} \right).$$

Отсюда следует, что $g(t) = \ln 3 + \ln(1 - t) + \ln \left(1 + \frac{t}{3} \right) = \ln 3 - t - \frac{t^2}{2} - \dots + \frac{t}{3} - \frac{t^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{t^3}{3 \cdot 3^2} - \dots = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{3^n} - 1 \right) \frac{t^n}{n}$.

Следовательно, $f(z) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{3^n} - 1 \right) \frac{(z - 2)^n}{n}$. Так как расстоя-

ние между точкой $z = 2$ и ближайшей особой точкой $z = 3$ равно 1, то ряд сходится в области $|z - 2| < 1$. ▲

Пример 6. Разложить функцию $f(z) = e^{\sin z}$ по степеням z до члена, содержащего z^5 .

Δ Применим метод подстановки ряд в ряд, используя основные разложения для функций e^z и $\sin z$.

$$\begin{aligned} \text{Имеем } e^{\sin z} &= 1 + \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) + \frac{1}{2!} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right)^3 + \frac{1}{4!} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right)^4 + \frac{1}{5!} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right)^5 + \dots = \\ &= 1 + z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{1}{2!} (z + a)^2 + \frac{1}{3!} (z + a)^3 + \frac{1}{4!} (z + a)^4 + \frac{1}{5!} (z + a)^5 \dots, \end{aligned}$$

где $a = \left(-\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right)$.

При возведении в степень будем использовать формулу бинома Ньютона:

$$(z + a)^n = z^n + n z^{n-1} a + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2} a^2 + \dots + a^n.$$

Оставляя члены ряда степени не выше пяти, получим

$$e^{\sin z} = 1 + z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{1}{2!} \left(z^2 + 2z \left(-\frac{z^3}{3!} \right) \right) + \frac{1}{3!} \left(z^3 + 3z^2 \left(-\frac{z^3}{3!} \right) \right) +$$

$$+ \frac{1}{4!} z^4 + \frac{1}{5!} z^5 + \dots = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{8} z^4 - \frac{1}{15} z^5 \dots$$

Функция $f(z) = e^{\sin z}$ является аналитической на всей комплексной плоскости, следовательно, ряд сходится в области $|z| < \infty$. ▲

Пример 7. Функцию $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ разложить в ряд Лорана в указанных кольцах: а) $2 < |z| < 3$; б) $3 < |z| < \infty$.

Δ а) Представим функцию $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2};$$

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}};$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}.$$

Таким образом,

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad 2 < |z| < 3.$$

$$\text{б) } \frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}}; \quad \frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}};$$

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{z^{n+1}}, \quad 3 < |z| < \infty. \quad \blacktriangle$$

Пример 8. Функцию $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z-3}$ разложить в ряд Лорана:

а) в окрестности точки $z_0 = -1$; б) в окрестности точки $z_0 = 3$.

Δ а) В разложении $\frac{z+2}{z^2-2z-3} = \frac{-1}{z+1} + \frac{5}{z-3}$ первое слагаемое уже за-

писано по степеням $(z+1)$. Это разложение содержит только главную часть ряда Лорана. Второе слагаемое в окрестности точки $z_0 = -1$ раскладывается в ряд Тейлора в круге $|z+1| < 4$. Для исходной дроби это будет правильная часть ряда Лорана:

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z+1)-4} = \frac{-1}{4\left(1-\frac{z+1}{4}\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{4^{n+1}}, \quad \left|\frac{z+1}{4}\right| < 1.$$

Получаем ответ: $\frac{z+2}{z^2-2z-3} = -\frac{1}{4} \frac{1}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(z+1)^n}{4^{n+2}}, \quad 0 < |z+1| < 4.$

б) Для точки $z_0 = 3$ задача решается аналогично:

$$\frac{z+2}{z^2-2z-3} = \frac{5}{4} \frac{1}{z-3} - \frac{1}{4} \frac{1}{(z-3)+4} = \frac{5}{4} \frac{1}{z-3} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-3)^n}{4^{n+2}}.$$

Получаем ответ: $\frac{z+2}{z^2-2z-3} = \frac{5}{4} \frac{1}{z-3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+2}} (z-3)^n, \quad 0 < |z-3| < 4. \blacktriangle$

Пример 9. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ в ряд Лорана в кольце $0 < |z-i| < 2.$

Δ Запишем заданную функцию следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}.$$

Используя разложение функции $\frac{1}{1-q}, |q| < 1,$ получаем

$$f(z) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z-i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^n}{(2i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^{n-1}}{(2i)^{n+1}}, \quad 0 < |z-i| < 2. \blacktriangle$$

Пример 10. Функцию $f(z) = \frac{z^4}{(z-2)^2}$ разложить в ряд Лорана по степеням $z-2.$

Δ Введем новую переменную t по формуле $t = z-2,$ тогда

$$f(z) = \frac{z^4}{(z-2)^2} = \frac{(t+2)^4}{t^2} = \frac{t^4 + 8t^3 + 24t^2 + 32t + 16}{t^2} = \frac{16}{t^2} + \frac{32}{t} + 24 + 8t + t^2,$$

т. е. $\frac{z^4}{(z-2)^2} = \frac{16}{(t-2)^2} + \frac{32}{z-2} + 24 + 8(z-2) + (z-2)^2, \quad z \neq 2. \blacktriangle$

Пример 11. Функцию $f(z) = (z+1)e^{\frac{z}{z-2}}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 2.$

Δ Представив функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = ((z-2)+3) \cdot e^{\frac{z-2+2}{z-2}} = ((z-2)+3) \cdot e^{1+\frac{2}{z-2}} = e \cdot ((z-2)+3) e^{\frac{2}{z-2}},$$

получим

$$f(z) = e \cdot ((z-2)+3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!(z-2)^n} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!n!(z-2)^{n-1}} + 3e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z-2)^n \cdot n!},$$

$$0 < |z-2| < \infty. \blacktriangle$$

Пример 12. Разложить функцию $f(z) = \frac{z-4}{z^2-8z+65}$ в ряд Лорана в

окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$ и указать область сходимости ряда.

Δ Разложим функцию $f(z)$ на простейшие дроби:

$$f(z) = \frac{z-4}{z^2-8z+65} = \frac{z-4}{(z-(4-7i))(z-(4+7i))} = \frac{1}{2} \frac{1}{z-(4-7i)} + \frac{1}{2} \frac{1}{z-(4+7i)}.$$

Так как $|4 \pm 7i| = \sqrt{65}$, функция будет аналитической в области $\sqrt{65} < |z| < \infty$. В этом кольце разложим каждое слагаемое по степеням z :

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4-7i}{z}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4+7i}{z}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4-7i}{z} \right)^n + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4+7i}{z} \right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4-7i)^n + (4+7i)^n}{z^{n+1}}, \quad \sqrt{65} < |z| < \infty. \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Функцию $f(z) = \frac{z^2-2z-3}{z^2+2z-3}$ разложить в ряд Тейлора в окрестности

точки $z_0 = 3$.

Ответ: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n+1}{6^{n+1}} (z-3)^n, \quad |z-3| < 2.$

2. Разложить функцию $f(z) = e^z \cdot \ln(1+z)$ по степеням z до члена, содержащего z^4 .

Ответ: $f(z) = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + 0z^4 + \dots, \quad |z| < 1.$

3. Вычислить $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin 2iz - 2iz \operatorname{ch} iz}{z^3}$.

Ответ: $\frac{7}{3}i$.

4. Функцию $f(z) = \sin \frac{z-1}{z-2}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 2$.

Ответ:

$$f(z) = \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(z-2)^{2n} \cdot (2n)!} + \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(z-2)^{2n+1} \cdot (2n+1)!},$$

$|z-2| > 0$.

5. Разложить в ряд Лорана в окрестностях бесконечно удаленных точек функции: а) $f(z) = \frac{1}{2z+3}$; б) $f(z) = \frac{\cos^2 2z}{z^5}$.

Ответ: а) $f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{z^{n+1}}, |z| > \frac{3}{2};$

б) $f(z) = \frac{1}{2z^5} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} z^{2n-5}}{(2n)!}, |z| > 0.$

6. Функцию $f(z) = \frac{z^2 - 2z - 3}{(z-1)^2(z+3)}$ разложить в ряд Лорана:

а) в невырожденном кольце по степеням z ;

б) в окрестности точки $z_0 = 1$.

Ответ: а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4 \cdot 3^n} z^n + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{z^n}, 1 < |z| < 3;$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot (-1)^n}{4^{n+3}} (z-1)^n + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2}, 0 < |z-1| < 4.$

Занятие 19

Нули и изолированные особые точки аналитических функций

Пример 1. Найти все нули функции $f(z) = z^6 - z^5 + 2z^4 - 2z^3$ и определить их порядок.

Δ Раскладываем многочлен на множители:

$$f(z) = z^5(z-1) + 2z^3(z-1) = z^3(z-1)(z^2+2) = z^3(z-1)(z+\sqrt{2}i)(z-\sqrt{2}i).$$

Точка $z_1 = 0$ является нулем третьего порядка, точки $z_2 = 1$, $z_3 = -\sqrt{2}i$, $z_4 = \sqrt{2}i$ являются нулями первого порядка (простыми нулями). ▲

Пример 2. Определить порядок нуля $z_0 = 0$ для функции

$$f(z) = 3\cos 2z + 6\sin z^2 - 3.$$

Δ Здесь удобно разложить функцию $f(z)$ в ряд Маклорена. Получаем

$$3\cos 2z + 6\sin z^2 - 3 = 3\left(1 - \frac{4z^2}{2!} + \frac{16z^4}{4!} - \dots\right) + 6\left(z^2 - \frac{z^6}{3!} + \dots\right) - 3 = 2z^4 + \dots$$

Точка $z = 0$ является нулем четвертого порядка для функции $f(z)$. ▲

Пример 3. Для функции $f(z) = -1 - \sin^3 z - \cos z$ определить порядок нуля в точке $z_0 = \pi$.

Δ Находим значения функции и ее производных в точке $z_0 = \pi$:

$$f(z) = -1 - \sin^3 z - \cos z, f(\pi) = 0;$$

$$f'(z) = -3\sin^2 z \cdot \cos z + \sin z, f'(\pi) = 0;$$

$$f''(z) = -6\sin z \cdot \cos^2 z + 3\sin^3 z + \cos z, f''(\pi) \neq 0.$$

Точка $z_0 = \pi$ является нулем второго порядка для функции $f(z)$. ▲

Пример 4. Для функции $f(z) = \sin^2 z \cdot (e^{z^2} - 1)^3$ определить порядок нуля в точке $z_0 = 0$.

Δ Пусть $\varphi_1(z) = \sin z$, $\varphi_2(z) = e^{z^2} - 1$. Так как $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots$ и $e^{z^2} - 1 = z^2 + \frac{z^4}{2!} + \dots$, то точка $z_0 = 0$ является нулем первого порядка для функции $\varphi_1(z)$ и нулем второго порядка для функции $\varphi_2(z)$, а также точка $z_0 = 0$ является нулем второго порядка для функции $\varphi_1^2(z)$ и нулем шестого порядка для функции $\varphi_2^3(z)$.

Как известно, порядок нуля в точке z_0 функции, полученной в результате перемножения аналитических функций, равен сумме порядков нуля в этой точке для функций сомножителей. Таким образом, точка $z_0 = 0$ является нулем восьмого порядка для функции $f(z) = \sin^2 z \cdot (e^{z^2} - 1)^3$. ▲

Пример 5. Для функции $f(z) = \frac{\cos^4 \pi z}{(4z^2 - 1)(z^2 + 1)}$ определить порядок нуля в точке $z_0 = \frac{1}{2}$.

Δ Запишем функцию $f(z)$ в виде $f(z) = \frac{(\cos \pi z)^4}{2 \left(z - \frac{1}{2}\right) (2z + 1)(z^2 + 1)}$.

Так как $\cos \pi z \Big|_{z=\frac{1}{2}} = 0$, $(\cos \pi z)' \Big|_{z=\frac{1}{2}} \neq 0$, то точка $z_0 = \frac{1}{2}$ является нулем первого порядка для функции $\cos \pi z$ и нулем четвертого порядка для функции $\cos^4 \pi z$. Очевидно, что точка $z_0 = \frac{1}{2}$ является нулем первого порядка для функции $2 \left(z - \frac{1}{2}\right) (2z + 1)(z^2 + 1)$. Следовательно, порядок нуля для функции $f(z)$ в точке $z_0 = \frac{1}{2}$ равен $4 - 1 = 3$. \blacktriangle

Пример 6. Пусть точка z_0 является нулем порядка k для функции $\varphi_1(z)$ и нулем порядка m для функции $\varphi_2(z)$, причем $k > m$. Найти порядок нуля для функции $f(z) = a \varphi_1(z) + b \varphi_2(z)$, $ab \neq 0$, в точке z_0 .

Δ Так как $f(z) = a(z - z_0)^k \varphi_3(z) + b(z - z_0)^m \varphi_4(z) = (z - z_0)^m (a(z - z_0)^{k-m} \varphi_3(z) + b \varphi_4(z))$, $\varphi_3(z_0) \neq 0$, $\varphi_4(z_0) \neq 0$, то $f(z) = (z - z_0)^m \cdot \varphi_5(z)$, где $\varphi_5(z) \neq 0$. Отсюда следует, что точка $z = z_0$ является нулем порядка m для функции $f(z)$. \blacktriangle

Пример 7. Для функции $f(z) = 3(e^{z^3} - 1)^5 - 2 \sin^{12} z$ определить порядок нуля в точке $z_0 = 0$.

Δ Так как $e^{z^3} - 1 = z^3 + \frac{z^6}{2} + \dots$, то для функции $(e^{z^3} - 1)^5$ точка $z_0 = 0$ является нулем пятнадцатого порядка.

Для функции $\varphi_2(z) = \sin^{12} z$ точка $z_0 = 0$ является нулем двенадцатого порядка. Таким образом, для функции $f(z)$ точка $z_0 = 0$ является нулем двенадцатого порядка. \blacktriangle

Пример 8. Для функции $f(z) = \frac{1}{\cos \frac{1}{z-2}}$ определить тип особой точки $z = 2$.

Δ Точка $z = 2$ является особой. Рассмотрим последовательность точек

$z_k = 2 + \frac{2}{\pi + 2\pi k}$. Эти точки являются полюсами. Но $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 2$. Таким образом, в любой окрестности точки $z_0 = 2$ имеются другие особые точки. Точка $z_0 = 2$ является неизолированной особой точкой. ▲

Пример 9. Определить тип особой точки $z = 0$ для функции

$$f(z) = \frac{\operatorname{ch} 3z - 1}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}.$$

Δ Пусть $\varphi(z) = \operatorname{ch} 3z - 1$, $\varphi(0) = 0$;

$\varphi'(z) = 3\operatorname{sh} 3z$, $\varphi'(0) = 0$;

$\varphi''(z) = 9\operatorname{ch} 3z$, $\varphi''(0) = 9 \neq 0$.

Точка $z_0 = 0$ является нулем второго порядка для числителя дроби.

Знаменатель функции разложим в ряд Маклорена:

$$\sin z - z + \frac{z^3}{6} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{5!} - \dots - z + \frac{z^3}{6} = \frac{z^5}{5!} + \dots$$

Точка $z_0 = 0$ является нулем пятого порядка для знаменателя дроби. Таким образом, точка $z_0 = 0$ является полюсом третьего порядка для функции $f(z)$. ▲

Пример 10. Для заданных функций найти конечные изолированные особые точки и определить их тип:

а) $f(z) = \frac{\cos \pi z}{(4z^2 - 1)(z^2 + 3)}$; б) $f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$;

в) $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(e^z - 1)(1 - z)^2}$.

Δ а) Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z = \pm \frac{1}{2}$, $z = \pm \sqrt{3}i$.

Для исследования точки $z = \frac{1}{2}$ функцию $f(z)$ запишем в виде

$$\frac{\cos \pi z}{2z - 1} \cdot \frac{1}{(2z + 1)(z^2 + 3)} = \frac{\cos \pi z}{2z - 1} \cdot \varphi(z),$$

где $\varphi(z) = \frac{1}{(2z + 1)(z^2 + 3)}$ – аналитическая функция в окрестности точки $z_0 = \frac{1}{2}$

и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Находим

$$\lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cos \pi z}{2z - 1} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-\pi \sin \pi z}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Точка $z_0 = \frac{1}{2}$ является устранимой особой точкой. Аналогично точка $z_1 = -\frac{1}{2}$ тоже является устранимой особой точкой.

Если функцию $f(z)$ записать в виде

$$\frac{\cos \pi z}{(4z^2 - 1)(z^2 + 3)} = \frac{1}{(z - \sqrt{3}i)} \cdot \frac{\cos \pi z}{(4z^2 - 1)(z + \sqrt{3}i)},$$

то очевидно, что точка $z_3 = \sqrt{3}i$ является полюсом первого порядка. Аналогично точка $z = -\sqrt{3}i$ тоже является полюсом первого порядка.

б) Функцию $f(z)$ запишем в виде

$$\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} = \frac{z - e^z + 1}{z(e^z - 1)} = \frac{z - \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots\right) + 1}{z \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots - 1\right)} = \frac{-\frac{z^2}{2!} - \dots}{z^2 + \dots}.$$

Отсюда следует, что точка $z = 0$ является устранимой особой точкой. Типы других особых точек для функций $f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$ и $f_1(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ совпадают. Особыми точками функции $f_1(z)$ будут точки, в которых знаменатель дроби обращается в нуль: $e^z = 1, z = 2k\pi i, k \neq 0$. Так как $(e^z = 1)|_{z=2k\pi i} = 0$ и $(e^z = 1)'|_{z=2k\pi i} = e^{2k\pi i} \neq 0$, то точки $z = 2k\pi i (k \neq 0)$ являются полюсами первого порядка.

Таким образом, $z = 2k\pi i, k \neq 0$, – простые полюсы, $z = 0$ – устранимая особая точка.

в) Запишем функцию $f(z)$ в виде
$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(e^z - 1)(1 - z)^2} = \frac{1}{e^z - 1} \cdot \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z - 1)^2}.$$

Согласно предыдущему примеру, точки $z = 2k\pi i, k \neq 0$, являются полюсами первого порядка.

Запишем функцию $f(z)$ в виде
$$f(z) = \frac{1}{(z - 1)^2} \cdot \frac{e^{\frac{1}{z}}}{e^z - 1}.$$

Очевидно, что точка $z = 1$ является полюсом второго порядка. Чтобы исследовать точку $z = 0$, выполним следующие преобразования:

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(e^z - 1)(z - 1)^2} = \frac{1}{(z - 1)^2} \cdot \frac{e^{\frac{1}{z}}}{\left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)} =$$

$$= \frac{1}{(z-1)^2 \left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots\right)} \cdot \frac{1}{z} e^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} e^{\frac{1}{z}} \varphi(z),$$

где $\varphi(z) = \frac{1}{(z-1)^2 \left(1 + \frac{z}{2!} + i\dots\right)}$, $\varphi(0) = 1$. Так как $\varphi(0) \neq 0$ и

$$f_1(z) = \frac{1}{z} \cdot e^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots\right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^3} + \dots,$$

то точка $z = 0$ является существенно особой точкой. ▲

Пример 11. Исследовать особую точку $z = \infty$ для функции $f(z) = \frac{z^3}{z-1}$.

Δ Первый способ. Обозначим $z = \frac{1}{\xi}$ и исследуем функцию $f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ в точке

$$\xi = 0: f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{1}{\xi^3 \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)} = \frac{1}{\xi^2 (1 - \xi)}. \text{ Точка } \xi = 0 \text{ является полюсом второго}$$

порядка для функции $\frac{1}{\xi^2 (1 - \xi)}$. Следовательно, точка $z = \infty$ является полюсом

второго порядка для функции $f(z) = \frac{z^3}{z-1}$.

Второй способ. Точка $z = \infty$ является полюсом третьего порядка для числителя и полюсом первого порядка для знаменателя. Следовательно, точка

$z = \infty$ является полюсом второго порядка для функции $f(z) = \frac{z^3}{z-1}$. ▲

Пример 12. Исследовать особую точку $z = \infty$ для функции

$$f(z) = z^7 - \frac{z^{11} + 5z^8 + 3z}{z^4 + 3} + \cos\left(\frac{3iz + 2}{2iz + 1}\right).$$

Δ Запишем функцию $f(z)$ в виде, где $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$,

$$\text{где } f_1(z) = z^7 - \frac{z^{11} + 5z^8 + 3z}{z^4 + 3} = \frac{-5z^8 + 3z^7 - 3z}{z^4 + 3},$$

$$f_2(z) = \cos\left(\frac{3iz + 2}{2iz + 1}\right) = \cos\left(\frac{3i + \frac{2}{z}}{2i + \frac{1}{z}}\right).$$

Для функции $f_1(z)$ точка $z = \infty$ является полюсом четвертого порядка, для функции $f_2(z)$ бесконечно удаленная точка является устранимой особой

точкой, следовательно особая точка $z = \infty$ для функции $f(z)$ является полюсом четвертого порядка. ▲

Дополнительные задачи

1. Найти все нули функции $f(z) = (z^4 + 2z^2 + 1)(z^2 - 2z + 2)$ и определить их порядок.

Ответ: $\pm i$ – нули второго порядка; $z = 1 \pm i$ – простые нули.

2. Для функции $f(z) = (e^{z^2} - 1 - z^2)^2 \cdot \sin^3 z$ определить порядок нуля в точке $z_0 = 0$.

Ответ: 11.

3. Для функции $f(z) = \frac{\sin z^4 - z^4}{\operatorname{sh} z - z - \frac{z^3}{6}}$ определить порядок нуля в точке $z_0 = 0$.

Ответ: 7.

4. Для следующих функций определить порядок нулей в указанных точках:

а) $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z(z + \pi)}$, $z = -\pi$; б) $f(z) = \frac{1}{z^6} - \frac{z^2 + z + 1}{z^8}$, $z = \infty$;

в) $f(z) = (e^z - 1)^2 - \sin^2 z$, $z = 0$.

Ответ: а) нуль первого порядка; б) нуль седьмого порядка; в) нуль третьего порядка.

5. Для функции $f(z) = \frac{\operatorname{ch} 5z - 1}{e^2 - 1 - z}$ определить тип особой точки $z = 0$.

Ответ: устранимая особая точка.

6. Для функции $f(z) = \frac{\sin 3z}{z(1 - \cos z)}$ найти конечные особые точки и определить их тип.

Ответ: $z = 0$ – полюс второго порядка; $z = 2\pi k$, $k \neq 0$, – полюс первого порядка.

7. Для функции $f(z) = \frac{\sin 2\pi z}{z^4 - 1} e^{\frac{1}{z}}$ найти конечные особые точки и определить их тип.

Ответ: $z = 0$ – существенно особая точка; $z = \pm 1$ – устранимые особые точки; $z = \pm i$ – простые полюсы.

8. Для функции $f(z) = z^7 - \frac{z^{11} + 5z^7 - 2z}{z^4 + 5} + e^{\frac{iz+3}{2z-4}}$ определить характер бесконечно удаленной точки.

Ответ: устранимая особая точка.

Занятия 20–21

Вычеты. Приложения вычетов

Пример 1. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z-3}$ в ее конечных особых точках.

Δ Особыми точками этой функции являются точки $z_1 = -1$ и $z_2 = 3$.

Ранее нами были получены разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестностях точек $z_1 = -1$ и $z_2 = 3$:

$$f(z) = \frac{-1/4}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(z+1)^n}{4^{n+2}}, \quad 0 < |z+1| < 4;$$

$$f(z) = \frac{5/4}{z-3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+2}} (z-3)^n, \quad 0 < |z-3| < 4.$$

Из этих разложений находим

$$\operatorname{Res}_{-1} f(z) = C_{-1} = -\frac{1}{4}; \quad \operatorname{Res}_3 f(z) = C_{-1} = \frac{5}{4}. \quad \blacktriangle$$

Пример 2. Найти вычет функции $f(z) = \frac{\sin^3 3z}{z(1-\cos z)}$ в точке $z_1 = 0$.

$$\Delta \text{ Находим } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin^3 3z}{z(1-\cos z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin^3 3z}{2z \cdot \sin^2 \frac{z}{2}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{27z^3}{2 \cdot z \cdot \frac{z^2}{4}} = 54.$$

Точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой. В разложении функции в ряд Лорана в окрестности этой точки будет отсутствовать главная часть. Следовательно, $C_{-1} = 0$ и $\operatorname{Res}_0 f(z) = 0$. \blacktriangle

Пример 3. Определить тип особой точки $z = i$ и найти вычеты в этой точке следующих функций:

$$\text{а) } f_1(z) = z \cdot \cos\left(\frac{1}{z-i}\right); \quad \text{б) } f_2(z) = \frac{e^{\frac{z}{z-i}}}{z-i}.$$

Δ а) Разложим функцию $f_1(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = i$.

$$f_1(z) = z \cdot \cos\left(\frac{1}{z-i}\right) = ((z-i) + i) \left(1 - \frac{1}{2!(z-i)^2} + \frac{1}{4!(z-i)^4} + \dots \right).$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов. Следовательно, точка $z = i$ является существенно особой точкой.

$$\text{Из полученного разложения находим } \operatorname{Res}_i f_1(z) = C_{-1} = -\frac{1}{2}.$$

б) Разложение функции $f_2(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = i$ имеет вид

$$f_2(z) = \frac{1}{z-i} \cdot e^{\frac{z}{z-i}} = \frac{1}{z-i} e^{\frac{z-i+i}{z-i}} = \frac{e}{z-i} \left(1 + \frac{i}{z-i} + \frac{i^2}{2!(z-i)^2} + \dots \right).$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов. Точка $z = i$ является существенно особой точкой.

Из полученного разложения находим $\operatorname{Res}_i f_2(z) = C_{-1} = e$. ▲

Пример 4. Найти вычет функции $f(z) = \frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$ в точке $z_0 = 3$.

Δ Точка $z_0 = 3$ является полюсом первого порядка. Используя формулу $\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)(z - z_0))$, получим

$$\operatorname{Res}_3 f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{(z+2)(z-3)}{(z+1)^2(z-3)} = \frac{5}{16}. \quad \blacktriangle$$

Пример 5. Найти вычет функции $f(z) = \frac{z+2i}{z^3+8i}$ в особых точках.

Δ Особыми точками функции являются нули знаменателя $z^3 + 8i = 0$ или $z^3 - (2i)^3 = 0$. Раскладывая на множители левую часть $(z-2i)(z^2 + 2zi - 4) = 0$, находим $z_1 = 2i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$, $z_3 = -\sqrt{3} - i$. Все эти три точки являются простыми полюсами. Здесь удобно использовать формулу

$$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Найдем вычеты в указанных точках:

$$\operatorname{Res}_{2i} \frac{z+2i}{z^3+8i} = \frac{z+2i}{3z^2} \Big|_{z=2i} = -\frac{i}{3};$$

$$\operatorname{Res}_{\sqrt{3}-i} \frac{z+2i}{z^3+8i} = \frac{z+2i}{3z^2} \Big|_{z=\sqrt{3}-i} = \frac{i}{6};$$

$$\operatorname{Res}_{-\sqrt{3}-i} \frac{z+2i}{z^3+8i} = \frac{z+2i}{3z^2} \Big|_{z=-\sqrt{3}-i} = \frac{i}{6}. \quad \blacktriangle$$

Пример 6. Найти вычет функции $f(z) = \frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$ в точке $z_0 = -1$.

Δ Точка z_0 является полюсом второго порядка.

Находим

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{-1} \frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)} &= \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{(z+2)(z+1)^2}{(z+1)^2(z-3)} \right)' = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z-3-(z+2)}{(z-3)^2} = \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{-5}{(z-3)^2} = -\frac{5}{16}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 7. Найти вычет функции $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$ в точке $z = -1$.

△ Точка $z = -1$ является полюсом третьего порядка.

Находим

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{-1} \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)} &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{e^z}{(z-2)} \right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{e^z(z-3)}{(z-2)^2} \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^z(z-2) \cdot (z-2)^2 - 2(z-2)e^z(z-3)}{(z-2)^4} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^z((z-2)^2 - 2(z-3))}{(z-2)^3} = -\frac{17}{54e}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 8. Вычислить $J = \int_{|z-2|=3} \frac{z^2+3}{z^3-4z} dz$.

△ Внутри контура интегрирования находятся две особые точки $z_1 = 2$ и $z_2 = 0$. Они являются полюсами первого порядка. Находим

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_2 \frac{z^2+3}{z^3-4z} &= \frac{z^2+3}{3z^2-4} \Big|_{z=2} = \frac{7}{8}; \\ \operatorname{Res}_0 \frac{z^2+3}{z^3-4z} &= \frac{z^2+3}{3z^2-4} \Big|_{z=0} = -\frac{3}{4}; \\ J &= 2\pi i \left(\frac{7}{8} - \frac{3}{4} \right) = \frac{\pi i}{4}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 9. Вычислить $J = \int_{|z-1|=2} \frac{\sin^2 z}{z \cdot \cos z} dz$.

△ Внутри контура интегрирования находятся две особые точки: $z_1 = 0$ — устранимая особая точка и $z_2 = \frac{\pi}{2}$ — полюс первого порядка. Находим

$$\operatorname{Res}_{z_1} f(z) = 0; \quad \operatorname{Res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 z}{z \cdot \cos z} = \frac{\sin^2 z}{(\cos z)'} \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi};$$

$$J = 2\pi i \cdot \left(-\frac{2}{\pi}\right) = -4i. \quad \blacktriangle$$

Пример 10. Вычислить $J = \int_{|z-1|=2} \frac{z^2+1}{(z-1)(z+2)z^2} dz$.

Δ Внутри контура интегрирования находятся две особые точки: $z_1 = 1$ – полюс первого порядка и $z_2 = 0$ – полюс второго порядка. Находим

$$\operatorname{Res}_1 \frac{z^2+1}{(z-1)(z+2) \cdot z^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2+1}{z^2(z+2)} = \frac{2}{3};$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_0 \frac{z^2+1}{(z-1)(z+2) \cdot z^2} &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z^2+1}{z^2+z-2} \right)' = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z(z^2+z-2) - (2z+1)(z^2+1)}{(z^2+z-2)^2} = -\frac{1}{4}; \end{aligned}$$

$$J = 2\pi i \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{5\pi i}{6}. \quad \blacktriangle$$

Пример 11. Вычислить $J = \int_{|z-1|=1} (z^2+5z-6) \sin \frac{3}{z-1} dz$.

Δ Разложим функцию $f(z)$ в окрестности особой точки $z=1$ в ряд Лорана:

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-1)(z+6) \left(\frac{3}{z-1} - \frac{3^3}{3!(z-1)^3} + \frac{3^5}{5!(z-1)^5} \dots \right) = \\ &= ((z-1)+7) \left(3 - \frac{9}{2!(z-1)^2} + \frac{3^5}{5!(z-1)^4} \dots \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что $c_{-1} = -\frac{9}{2}$.

Следовательно, $J = 2\pi i \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -9\pi i$.

Пример 12. Вычислить $J = \int_{|z|=2} (z^2+4z+3) e^{\frac{2}{z+1}} dz$.

Δ Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности особой точки $z=-1$:

$$(z^2 + 4z + 3) \cdot e^{\frac{2}{z+1}} = ((z+1)^2 + 2(z+1)) \cdot \left(1 + \frac{2}{z+1} + \frac{2^2}{2!(z+1)^2} + \frac{2^3}{3!(z+1)^3} + \dots \right).$$

Точка $z = -1$ является существенной особой точкой.

Легко видеть, что $C_{-1} = \frac{2^3}{3!} + 2 \cdot \frac{2^2}{2!} = \frac{16}{3}$; $J = 2\pi i \cdot \frac{16}{3} = \frac{32\pi i}{3}$. ▲

Пример 13. Используя вычет относительно бесконечно удаленной точки, вычислить $J = \int_{|z|=10} \frac{z^{20}}{z^7 + 2} dz$.

Δ Вне контура интегрирования находится единственная особая точка – бесконечно удаленная точка. Разложим подынтегральную функцию в ряд Лорана в окрестности этой точки:

$$\frac{z^{20}}{z^7 + 2} = \frac{z^{20}}{z^7} \frac{1}{1 + \frac{2}{z^7}} = z^{13} \left(1 - \frac{2}{z^7} + \frac{2^2}{z^{14}} - \frac{2^3}{z^{21}} + \dots \right);$$

$$\operatorname{Res}_{\infty} \frac{z^{20}}{z^{10} + 2} = -C_{-1} = -4.$$

Так как для всех особых точек, лежащих внутри контура интегрирования, выполняется соотношение $\sum_{k=1}^7 \operatorname{Res}_{z_k} f(z) = -\operatorname{Res}_{\infty} f(z)$, то

$$J = \int_{|z|=10} \frac{z^{20}}{z^7 + 2} dz = 2\pi i \cdot 4 = 8\pi i. \quad \blacktriangle$$

Пример 14. Вычислить с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + 2\sin t}$.

Δ Положим $e^{it} = z$. Тогда $\sin t = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$, $dt = \frac{dz}{iz}$.

Получим

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + 2\sin t} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(3 + \frac{z - 1/z}{i} \right)} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 3iz - 1}.$$

Решая уравнение $z^2 + 3iz - 1 = 0$, найдем два полюса первого порядка подынтегральной функции: $z_1 = \frac{i(-3 + \sqrt{5})}{2}$ и $z_2 = \frac{i(-3 - \sqrt{5})}{2}$. Из них только z_1 находится внутри контура интегрирования. Следовательно,

$$\operatorname{Res}_{z_1} \frac{1}{z^2 + 3iz - 1} = \frac{1}{2z + 3i} \Big|_{z=\frac{i(-3+\sqrt{5})}{2}} = \frac{1}{-3i + \sqrt{5}i + 3i} = \frac{1}{\sqrt{5}i};$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\sin t} = 2\pi i \cdot \frac{1}{\sqrt{5}i} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}. \blacktriangle$$

Пример 15. Вычислить с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{(5-4\cos t)^2} dt$.

Δ Положим $e^{it} = z$, получим

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{(5-4\cos t)^2} dt = \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}{iz \left(5 - 2\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^2} dz = \frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{(2z^2 - 5z + 2)^2} dz.$$

Решая уравнение $2z^2 - 5z + 2 = 0$, найдем два полюса второго порядка подынтегральной функции $z_1 = 0,5$ и $z_2 = 2$. Из них только z_1 находится внутри окружности $|z| = 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{0,5} \frac{z^2 + 1}{(2z^2 - 5z + 2)^2} &= \lim_{z \rightarrow 0,5} \left(\frac{(z - 0,5)^2 (z^2 + 1)}{4(z - 0,5)^2 (z - 2)^2} \right)' = \frac{1}{4} \lim_{z \rightarrow 0,5} \left(\frac{z^2 + 1}{(z - 2)^2} \right)' = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{z \rightarrow 0,5} \frac{2z(z - 2)^2 - 2(z^2 + 1)(z - 2)}{(z - 2)^4} = \frac{8}{27}; \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом, } \int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{(5-4\cos t)^2} dt = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{8}{27} = \frac{8\pi}{27}. \blacktriangle$$

Пример 16. Вычислить:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 3) dx}{(x^2 + 2x + 17)^2}.$$

$$\Delta \text{ а) Введем функцию } f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)}.$$

Функция $f(z)$ представляет собой рациональную дробь, знаменатель которой не имеет действительных корней. Так как степень знаменателя на 4 больше степени числителя, то несобственный интеграл может быть вычислен с помощью вычетов. Найдем все особые точки функции $f(z)$: $(z^2 + 1)(z^2 + 9) = 0$, $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 3i$, $z_4 = -3i$. В верхней полуплоскости лежат точки z_1 и z_3 . Они являются полюсами первого порядка. Найдем вычеты в этих точках:

$$\operatorname{Res}_i \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)} = \frac{1}{(z^4 + 10z^2 + 9)'} \Big|_{z=i} = \frac{1}{4z^3 + 20z} \Big|_{z=i} = \frac{1}{16i};$$

$$\operatorname{Res}_{3i} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)} = \frac{1}{4z^3+20z} \Big|_{z=3i} = \frac{1}{-48i}.$$

$$\text{Тогда } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = 2\pi i \left(\frac{1}{16i} - \frac{1}{48i} \right) = 2\pi i \cdot \frac{3-1}{48i} = \frac{\pi}{12}.$$

б) Так как в числителе многочлен степени $n=2$, а в знаменателе $m=4$, то условие $m-n \geq 2$ выполняется; уравнение $x^2+2x+17=0$ не имеет действительных корней. Интеграл может быть вычислен с помощью вычетов. Особыми

точками функции $f(z) = \frac{z^2+3}{(z^2+2z+17)^2}$ являются полюсы второго порядка

$$z_1 = -1+4i \text{ и } z_2 = -1-4i.$$

В верхней полуплоскости лежит только точка z_1 . Находим

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_1} \frac{z^2+3}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2} &= \lim_{z \rightarrow z_1} \left(\frac{(z^2+3)(z-z_1)^2}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow z_1} \left(\frac{(z^2+3)}{(z-z_2)^2} \right)' \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{2z(z-z_2)^2 - 2(z^2+3)(z-z_2)}{(z-z_2)^4} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{2z^2 - 2zz_2 - 2z^2 - 6}{(z-z_2)^3} = \\ &= \frac{-2z_1z_2 - 6}{(z-z_2)^3} \Big|_{z=z_1} = \frac{-2 \cdot 17 - 6}{(8i)^3} = \frac{5}{8^2 i}. \end{aligned}$$

$$\text{Записываем ответ: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+2x+17)^2} dx = 2\pi i \cdot \frac{5}{8^2 i} = \frac{5\pi}{32}. \blacktriangle$$

Пример 17. Вычислить с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^2-2x+2} dx$.

Δ Рассмотрим интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)e^{ix}}{x^2-2x+2} dx$. Функция $f(z) = \frac{(z+1)e^{iz}}{z^2-2z+2}$

удовлетворяет всем условиям леммы Жордана. Особые точки функции $z_1 = 1+i$ и $z_2 = 1-i$. В верхней полуплоскости лежит лишь точка $z_1 = 1+i$.

Так как точка z_1 является полюсом первого порядка, то

$$\operatorname{Res}_{1+i} \frac{z+1}{z^2-2z+2} e^{iz} = \frac{(z+1)e^{iz}}{(z^2-2z+2)'} \Big|_{z=1+i} = \frac{(2+i)e^{-1+i}}{2i}.$$

$$\text{Получаем } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)e^{ix}}{x^2-2x+2} dx = 2\pi i \frac{2+i}{2i} e^{-1+i} = \pi e^{-1}(2+i)(\cos 1 + i \sin 1).$$

Записываем ответ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^2 - 2x + 2} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)e^{ix}}{x^2 - 2x + 2} dx = \operatorname{Re} (\pi e^{-1}(2+i)(\cos 1 + i \sin 1)) =$$

$$= \pi e^{-1}(2 \cos 1 - \sin 1). \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Найти вычеты функций в конечных особых точках:

а) $f(z) = \frac{z^2}{z^3 + 3z^2 + z + 3}$.

Ответ: $\operatorname{Res}_i f(z) = \frac{1+3i}{20}$; $\operatorname{Res}_{-i} f(z) = \frac{1-3i}{20}$; $\operatorname{Res}_{-3} f(z) = \frac{9}{10}$.

б) $f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-1)}$.

Ответ: $\operatorname{Res}_0 f(z) = -\frac{5}{2}$; $\operatorname{Res}_1 f(z) = e$.

в) $f(z) = (z^2 + 2z - 1) \cos \frac{3}{z-1}$. **Ответ:** $\operatorname{Res}_1 f(z) = -18$.

2. При помощи вычетов вычислить следующие интегралы:

а) $\int_{|z-3|=\frac{1}{2}} \frac{e^z dz}{\sin z}$.

Ответ: $-2\pi i e^\pi$.

б) $\int_{|z|=4} \frac{z+8}{(z+2)^3(z+5)} dz$.

Ответ: $\frac{2}{9}\pi i$.

в) $\int_{|z|=1} z^2 \sin \frac{1}{z} dz$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3}i$.

3. Вычислить:

а) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \cos x}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 + 4 \cos x)^2}$.

Ответ: $\frac{10\pi}{27}$.

в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

г) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

$$д) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 3x}{x^2 + 16} dx.$$

Ответ: πe^{-12} .

$$е) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx.$$

Ответ: $3\pi e^{-5} \cos 5$.

Занятие 22

Контрольная работа

Вариант 1

1. Функцию $f(z) = \frac{z^2 - 2z - 3}{z^2 + 2z - 3}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$.

Ответ: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^{n+1}}{4^{n+1}} (z-1)^n + \frac{1}{4} - \frac{1}{z-1}, 0 < |z-1| < 4$.

2. Функцию $f(z) = z \cdot \cos \frac{1}{z+3}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = -3$.

Ответ: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z+3)^{2n-1} (2n)!} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z+3)^{2n} (2n)!}, 0 < |z+3| < \infty$.

3. Для функции $f(z) = \frac{\operatorname{sh} z - z - \frac{z^3}{6}}{\sin 6z - 6z}$ определить порядок нуля в точке $z_0 = 0$.

Ответ: нуль второго порядка.

4. Для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z^3 (1 - \cos z)}$ найти конечные изолированные особые точки и определить их тип.

Ответ: $z = 0$ – полюс четвертого порядка; $z = 2\pi k, k \neq 0$ – полюс первого порядка.

5. При помощи вычетов вычислить следующие интегралы:

а) $\int_{|z|=1,5} \frac{z^2 + 1}{z^3 - 3z^2 + 2z} dz$; б) $\int_{|z|=2} \frac{z+4}{(z+1)^3 (z+3)} dz$;

в) $\int_{|z|=3} (z^2 + 5z + 5) \cos \frac{2}{z+1} dz$.

Ответ: а) $-3\pi i$; б) $\frac{\pi i}{4}$; в) $-12\pi i$.

6. Вычислить интегралы:

а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{7} \sin t + 4}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 25)}$; в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx$.

Ответ: а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{30}$; в) $\pi e^{-2} \cos 2$.

Вариант 2

1. Функцию $f(z) = \frac{z^2 - 2z - 3}{z^2 + 2z - 3}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = -3$.

Ответ: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{4^{n+1}} + \frac{5}{4} - \frac{3}{z+3}$, $0 < |z+3| < 4$.

2. Функцию $f(z) = (z+2) \sin \frac{2}{z-1}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$.

Ответ: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{(z-1)^{2n} (2n+1)!} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(z-1)^{2n+1} (2n+1)!}$, $0 < |z-1| < \infty$.

3. Для функции $f(z) = \frac{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{z^2}{2}}{e^{5z} - 1}$ определить порядок нуля в точке $z_0 = 0$.

Ответ: нуль третьего порядка.

4. Для функции $f(z) = \frac{\sin^3 z}{z(1 - \cos z)^2}$ найти конечные изолированные особые точки и определить их тип.

Ответ: $z = 0$ – полюс второго порядка; $z = 2\pi k$, $k \neq 0$ – полюс первого порядка.

5. При помощи вычетов вычислить следующие интегралы:

а) $\int_{|z|=2} \frac{z^2 + 2}{z^3 - 4z^2 + 3z} dz$; б) $\int_{|z|=2,5} \frac{z-4}{(z-2)^3(z-3)} dz$;

в) $\int_{|z|=3} (z^2 - 5z + 6) \sin \frac{3}{z-1} dz$.

Ответ: а) $\frac{-5\pi i}{3}$; б) $2\pi i$; в) $3\pi i$.

6. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5\sin t + 3\sqrt{5}}; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}; \quad \text{в) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos x}{x^2 - 2x + 2} dx.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{\pi}{30}$; в) $-\pi e^{-1} \sin 1$.

Занятия 23–25

Операционное исчисление. Самостоятельная работа

Пример 1. Установить, являются ли оригиналами следующие функции:

$$\text{а) } f(t) = \begin{cases} e^{3t} \cdot \cos 2t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad \text{б) } f(t) = \begin{cases} \operatorname{tg} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Δ а) Функция $f(t)$ локально интегрируема, т. е. для любых t_1 и t_2 существует $\int_{t_1}^{t_2} f(z) dt$. Так как $|e^{3t} \cos 2t| \leq e^{3t}$, то в качестве M можно взять любое число ≥ 1 и $S_0 = 3$. Следовательно, функция $f(t)$ является оригиналом.

б) Функция $f(t)$ в точках $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ имеет разрывы второго рода. Функция $f(t) = \operatorname{tg} t$ не является оригиналом. \blacktriangle

Пример 2. Пользуясь определением, найти изображение функции-оригинала $f(t) = t \cdot e^t$.

$$\begin{aligned} \Delta \quad F(p) &= \int_0^{\infty} t e^t e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} t e^{(1-p)t} dt = \left| \begin{array}{l} t = u, \quad du = dt \\ e^{(1-p)t} dt = dv, \quad v = \frac{1}{1-p} e^{(1-p)t} \end{array} \right| = \\ &= \frac{t}{1-p} e^{(1-p)t} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{1-p} \int_0^{\infty} e^{(1-p)t} dt = -\frac{1}{(p-1)^2} e^{(1-p)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{(p-1)^2}, \quad \operatorname{Re} p > 1. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 3. Пользуясь соотношением $\cos t \doteq \frac{p}{p^2 + 1}$ и теоремой подобия, найти изображение функции $f(t) = \cos \omega t$.

$$\Delta \quad \text{По теореме подобия } F(p) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \quad \blacktriangle$$

Пример 4. Пользуясь соотношением $t \doteq \frac{1}{p^2}$, свойством линейности и теоремой смещения, найти изображение функции $f(t) = t \cdot \sin 2t$.

Δ Так как $f(t) = t \cdot \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} = \frac{1}{2i} t e^{2it} - \frac{1}{2i} t e^{-2it}$, то

$$F(p) = \frac{1}{2i} \cdot \left(\frac{1}{(p-2i)^2} - \frac{1}{(p+2i)^2} \right) = \frac{1}{2i} \frac{(p+2i)^2 - (p-2i)^2}{(p-2i)^2 (p+2i)^2} = \\ = \frac{1}{2i} \frac{8pi}{(p^2+4)^2} = \frac{4p}{(p^2+4)^2}. \blacktriangle$$

Пример 5. Пользуясь соотношением $\sin 2t \doteq \frac{2}{p^2+4}$ и теоремой о дифференцировании изображения, найти изображение функции $f(t) = t \cdot \sin 2t$.

$$\Delta F(p) = - \left(\frac{2}{p^2+4} \right)' = -2 \cdot (-1) \cdot (p^2+4)^{-2} \cdot 2p = \frac{4p}{(p^2+4)^2}. \blacktriangle$$

Пример 6. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображение функции $f(t) = \cos^2 t$.

Δ Пусть $f(t) \doteq F(p)$. Тогда $f'(t) \doteq p F(p) - f(0)$.

Но $f(0) = 1$, а $f'(t) = -2 \cos t \sin t = -\sin 2t \doteq -\frac{2}{p^2+4}$. Следовательно,

$$-\frac{2}{p^2+4} = p \cdot F(p) - 1, \text{ откуда } F(p) = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{2}{p^2+4} \right) = \frac{p^2+2}{(p^2+4) \cdot p}. \blacktriangle$$

Пример 7. Используя теорему запаздывания, найти изображения следующих функций (рис. 16).

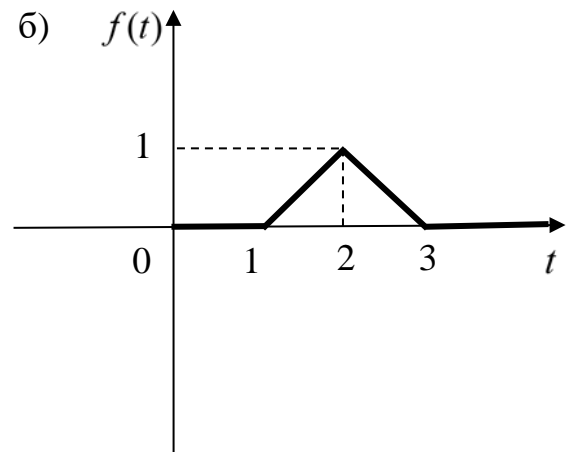
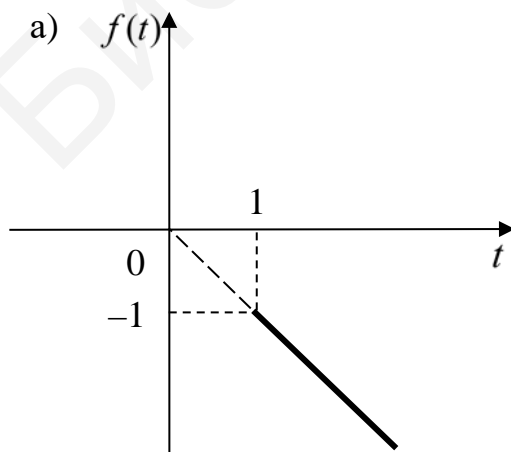


Рис. 16

Δ а) Запишем изображенную функцию в виде
 $f(t) = -t \cdot 1(t-1) = -(t-1) \cdot 1(t-1) - 1 \cdot 1(t-1)$.

По теореме запаздывания $F(p) = -\frac{1}{p^2} e^{-p} - \frac{1}{p} e^{-p}$.

б) Запишем изображенную функцию в виде

$$f(t) = (t-1) \cdot 1(t-1) - (t-1) \cdot 1(t-2) + (3-t) \cdot 1(t-2) - (3-t) \cdot 1(t-3) = \\ = (t-1) \cdot 1(t-1) - 2(t-2) \cdot 1(t-2) + (t-3) \cdot 1(t-3).$$

По теореме запаздывания $F(p) = \frac{1}{p^2} e^{-p} - \frac{1}{p^2} \cdot 2e^{-2p} + \frac{1}{p^2} \cdot e^{-3p}$. ▲

Пример 8. Найти изображение функций:

а) $f(t) = t e^{2t} \cdot \sin 3t$; б) $f(t) = \begin{cases} e^{-3t} \cos 4(t-2), & t > 2; \\ 0, & t \leq 2. \end{cases}$

Δ а) $\sin 3t \doteq \frac{3}{p^2 + 9}$; $e^{2t} \sin 3t \doteq \frac{3}{(p-2)^2 + 9}$;

$$te^t \sin 3t \doteq -\left(\frac{3}{(p-2)^2 + 9} \right)' = \frac{6(p-2)}{((p-2)^2 + 9)^2}$$

б) $\cos 4t \doteq \frac{p}{p^2 + 16}$; $\cos 4(t-2) \cdot 1(t-2) \doteq e^{-2p} \cdot \frac{p}{p^2 + 16}$;

$$e^{-3t} \cos 4(t-2) \cdot 1(t-2) \doteq e^{-2(p+3)} \cdot \frac{p+3}{(p+3)^2 + 16}. \quad \blacktriangle$$

Пример 9. Пользуясь теоремами об интегрировании изображения и об интегрировании оригинала, найти изображение функции $\int_0^t \frac{e^{3\tau} - \cos 2\tau}{\tau} d\tau$.

Δ С помощью правила Лопиталья легко показать, что функция $\frac{e^{3t} - \cos 2t}{t}$ в точке $t = 0$ имеет разрыв первого рода. Следовательно, функция $\frac{e^{3t} - \cos 2t}{t}$ является оригиналом.

Находим $e^{3t} - \cos 2t \doteq \frac{1}{p-3} - \frac{p}{p^2 + 4}$. По теореме об интегрировании изображения находим

$$\frac{e^{3t} - \cos 2t}{t} \doteq \int_p^\infty \left(\frac{1}{p-3} - \frac{p}{p^2 + 4} \right) dp = \left(\ln(p-3) - \frac{1}{2} \ln(p^2 + 4) \right) \Big|_p^\infty = \ln \frac{p-3}{\sqrt{p^2 + 4}} \Big|_0^\infty = \ln \frac{\sqrt{p^2 + 4}}{p-3}.$$

По теореме об интегрировании оригинала находим

$$\int_0^t \frac{e^{3\tau} - \cos 2\tau}{\tau} d\tau \doteq \frac{1}{p} \cdot \ln \frac{\sqrt{p^2 + 4}}{p - 3}. \blacktriangle$$

Пример 10. Найти свертку оригиналов $\cos 2t$ и $\sin t$ и изображение для свертки.

Δ Находим

$$\begin{aligned} \cos 2t \cdot \sin t &= \int_0^t \cos 2\tau \cdot \sin(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t (\sin(t + \tau) + \sin(t - 3\tau)) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\cos(t + \tau) + \frac{1}{3} \cos(t - 3\tau) \right) \Big|_0^t = \frac{1}{3} (\cos t - \cos 2t); \end{aligned}$$

$$F(p) = \frac{1}{3} \left(\frac{p}{p^2 + 1} - \frac{p}{p^2 + 4} \right) = \frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}.$$

Изображение свертки можно получить, используя теорему Бореля.

$$\begin{aligned} \text{Так как } \cos 2t &\doteq \frac{p}{p^2 + 4}, \sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}, \text{ то } \cos 2t \cdot \sin t \doteq \frac{p}{p^2 + 4} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} = \\ &= \frac{p}{(p^2 + 4)(p^2 + 1)}. \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 11. С помощью интеграла Дюамеля найти оригинал для изображения $F(p) = \frac{p}{(p-1)(p-2)}$.

Δ Представим изображение в виде $F(p) = p \cdot \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p-2}$. Здесь

$$F_1(p) = \frac{1}{p-1}, f_1(t) = e^t, F_2(p) = \frac{1}{p-2}, f_2(t) = e^{2t}.$$

Так как $PF_1(p) \cdot F_2(p) \doteq f_1(0) \cdot f_2(t) + f_1' * f_2$, то

$$\begin{aligned} \frac{p}{(p-1)(p-2)} &\doteq 1 \cdot e^{2t} + \int_0^t e^\tau \cdot e^{2(t-\tau)} d\tau = e^{2t} + e^{2t} \int_0^t e^{-\tau} d\tau = e^{2t} - e^{2t} \cdot e^{-\tau} \Big|_0^t = \\ &= -e^t + 2e^{2t}. \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 12. Найти оригиналы для функций:

$$\text{а) } F(p) = \frac{3p + 2}{2p^2 - 8p + 6}; \quad \text{б) } F(p) = \frac{3p^2 + 3p - 13}{p(p^2 + 4p + 13)};$$

$$\text{в) } F(p) = \frac{p^2 + p + 1}{(p-1)(p+1)^2}.$$

Δ а) Используем представление

$$F(p) = \frac{3p+2}{2(p^2-4p+3)} = \frac{1,5p+1}{(p-2)^2-1} = \frac{1,5(p-2)+3}{(p-2)^2-1} +$$

$$+ \frac{1}{(p-2)^2-1} = 1,5 \frac{p-2}{(p-2)^2-1} + 4 \frac{1}{(p-2)^2-1}.$$

Используя таблицу изображений, свойство линейности и теорему смещения, получим

$$f(t) = 1,5 e^{2t} \operatorname{ch} t + 4e^{2t} \operatorname{sh} t = \frac{11}{4} e^{3t} - \frac{5}{4} e^t.$$

б) Представим $F(p)$ в виде $F(p) = \frac{3p^2+3p-13}{p(p^2+4p+13)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{p^2+4p+13}.$

Отсюда следует равенство $3p^2+3p-13 = Ap^2+4Ap+13A+Bp^2+ Cp,$

или система
$$\begin{cases} A+B=3, \\ 4A+C=3, \\ 13A=-13. \end{cases}$$

Решая ее, получаем $A=-1, B=4, C=7$ и

$$F(p) = \frac{1}{p} + \frac{4p+7}{p^2+4p+13} = -\frac{1}{p} + \frac{4(p+2)-1}{(p+2)^2+3^2}.$$

Отсюда $f(t) = -1 + 4e^{-2t} \cos 3t - \frac{1}{3} e^{-2t} \sin 3t.$

в) Функция $F(p)$ имеет два полюса: простой полюс $p_1=1$ и полюс второго порядка $p_2=-1$. Находим

$$f(t) = \operatorname{Res}_{p_1=1} \frac{(p^2+p+1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2} + \operatorname{Res}_{p_2=-1} \frac{(p^2+p+1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2}.$$

Находим вычеты

$$\operatorname{Res}_{p_1=1} \frac{(p^2+p+1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2} = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{(p^2+p+1)(p-1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2} = \frac{3}{4} e^t,$$

$$\operatorname{Res}_{p_2=-1} \frac{(p^2+p+1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2} = \lim_{p \rightarrow -1} \left(\frac{(p^2+p+1)(p+1)^2 e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2} \right)' =$$

$$= \lim_{p \rightarrow -1} \left(\frac{(p^2+p+1)e^{pt}}{p-1} \right)' = \lim_{p \rightarrow -1} \frac{((2p+1)e^{pt} + te^{pt}(p^2+p+1)(p-1) - (p^2+p+1)e^{pt})}{(p-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4} e^{-t} - \frac{1}{2} t e^{-t},$$

получаем $f(t) = \frac{3}{4} e^t + \frac{1}{4} e^{-t} - \frac{1}{2} t e^{-t}. \blacktriangle$

Пример 13. Решить задачу Коши:

$$x'' - 3x' + 2x = 2e^{3t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 3.$$

Δ Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$x(t) \doteq X(p), \quad x'(t) \doteq pX(p) - 1, \quad x''(t) \doteq p^2X(p) - p - 3, \quad 2e^{3t} \doteq \frac{2}{p-3}.$$

Запишем уравнение для изображений:

$$p^2X - p - 3 - 3pX + 3 + 2X = \frac{2}{p-3}.$$

Решим уравнение для изображений:

$$X(p^2 - 3p + 2) = \frac{2}{p-3} + p, \quad X = \frac{2 + p^2 - 3p}{(p^2 - 3p + 2)(p-3)} = \frac{1}{p-3}.$$

Найдем оригинал для функции $X(p)$: $x(t) = e^{3t}$. ▲

Пример 14. Решить задачу Коши: $x'' + 4x = \cos 2t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.

Δ Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$x(t) \doteq X(p), \quad x'(t) \doteq pX - 1, \quad x''(t) \doteq p^2X - p + 1, \quad \cos 2t \doteq \frac{p}{p^2 + 4}.$$

Запишем и решим уравнение для изображений:

$$p^2X - p + 1 + 4X = \frac{p}{p^2 + 4}, \quad X = \frac{p}{(p^2 + 4)^2} + \frac{p}{p^2 + 4} - \frac{1}{p^2 + 4}.$$

Таким образом, $x(t) = \frac{1}{4}t \sin 2t + \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t$. ▲

Пример 15. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + 2, \\ x_2' = x_1 + 1, \end{cases} \quad x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = 0.$$

Δ Переходим от оригиналов к изображениям:

$$x_1(t) \doteq X_1(p), \quad x_1'(t) \doteq pX_1(p) + 1, \quad x_2(t) \doteq X_2(p),$$

$$x_2'(t) \doteq pX_2(p), \quad 1 \doteq \frac{1}{p}, \quad 2 \doteq \frac{2}{p}.$$

Запишем систему уравнений для изображений:
$$\begin{cases} pX_1 + 1 = -X_2 + \frac{2}{p}, \\ pX_2' = X_1 + \frac{1}{p}. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на p и подставим во второе:

$$p^2X_1 + p = -X_1 - \frac{1}{p} + 2.$$

Отсюда получим

$$X_1 = \frac{2}{p^2 + 1} - \frac{1}{p}, \quad X_2 = -\frac{2p}{p^2 + 1} + 1 - 1 + \frac{2}{p} = -\frac{2p}{p^2 + 1} + \frac{2}{p}.$$

Находим оригиналы для функций:

$$x_1(t) = 2 \sin t - 1, \quad x_2(t) = -2 \cos t + 2. \quad \blacktriangle$$

Пример 16. С помощью интеграла Дюамеля решить уравнения:

а) $x' + 2x = -3t + 2, \quad x(0) = 0;$

б) $x' + x = e^t, \quad x(0) = 0.$

Δ а) Составим уравнение $z' + 2z = 1, \quad z(0) = 0,$ и решим его:

$$z(t) \doteq Z(p), \quad z'(t) \doteq p Z(p), \quad 1 \doteq \frac{1}{p};$$

$$pZ + 2Z = \frac{1}{p}, \quad Z = \frac{1}{p(p+2)} = \frac{1}{2} \frac{p+2-p}{p(p+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+2} \right);$$

$$z(t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}), \quad z'(t) = e^{-2t}.$$

Находим

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t z'(\tau) \cdot f(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-2\tau} (2 - 3(t-\tau)) d\tau = \\ &= (2-3t) \int_0^t e^{-2\tau} d\tau + 3 \int_0^t \tau e^{-2\tau} d\tau = \frac{-2+3t}{2} e^{-2\tau} \Big|_0^t - \frac{3}{2} \tau e^{-2\tau} \Big|_0^t + \\ &+ \frac{3}{2} \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = \left(-1 + \frac{3}{2}t \right) e^{-2t} + 1 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}te^{-2t} - \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{3}{4} = 1,75 - 1,5t - 1,75e^{-2t}. \end{aligned}$$

б) Составим уравнение $z' + z = 1, \quad z(0) = 0,$ и решим его:

$$z(t) \doteq Z(p), \quad z'(t) \doteq p Z(p), \quad 1 \doteq \frac{1}{p};$$

$$Z(p) = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{p+1-p}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1};$$

$$z(t) = 1 - e^{-t}, \quad z'(t) = e^{-t}.$$

Находим

$$x(t) = \int_0^t z'(\tau) \cdot f(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-\tau} \cdot e^{t-\tau} d\tau = e^t \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = -\frac{1}{2} e^t e^{-2\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}). \quad \blacktriangle$$

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Найти изображение функции $f(t) = t \cdot \operatorname{ch} 2t$.

Ответ: $F(p) = \frac{p^2 + 4}{(p^2 - 4)^2}$.

2. Найти изображение функции, заданной графически (рис. 17).

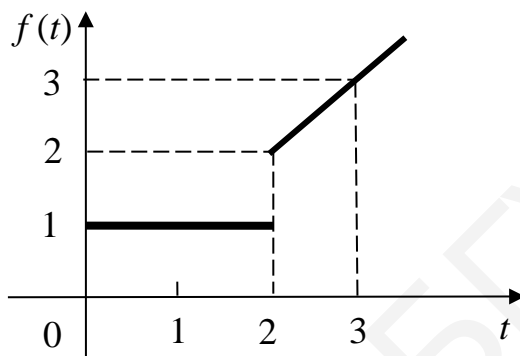


Рис. 17

Ответ: $F(p) = \frac{1}{p} + e^{-2p} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} \right)$.

3. Найти изображение функции $f(t) = \int_0^t \frac{e^{2\tau} - 1 - 3\tau}{\tau} d\tau$.

Ответ: $F(p) = \frac{1}{p} \left(\ln \frac{p}{p-2} - \frac{3}{p} \right)$.

4. Найти оригинал для функции $F(p) = \frac{p}{p^2 - 2p + 5}$.

Ответ: $f(t) = e^t \left(\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \right)$.

5. Решить задачу Коши: $x'' - 3x' + 2x = e^{5t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

Ответ: $x(t) = \frac{1}{12} e^{5t} + \frac{1}{4} e^t + \frac{2}{3} e^{2t}$.

6. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y, \\ y' = 4x - 3y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

Ответ: $x(t) = \frac{6}{5} e^{5t} - \frac{1}{5} e^{-5t}$, $y(t) = \frac{3}{5} e^{5t} + \frac{2}{5} e^{-5t}$.

Вариант 2

1. Найти изображение функции $f(t) = t \cdot \operatorname{sh}3t$.

Ответ: $F(p) = \frac{6p}{(p^2 - 9)^2}$.

2. Найти изображение функции, заданной графически (рис. 18).

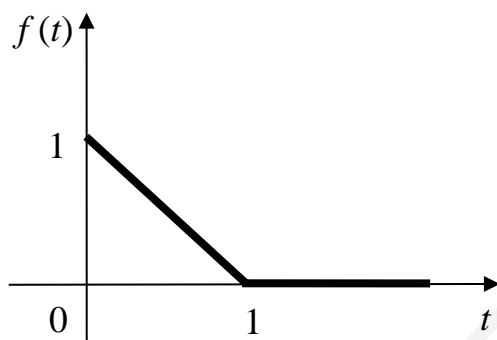


Рис. 18

Ответ: $F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2}e^{-p}$.

3. Найти изображение функции $f(t) = \int_0^t \frac{e^{-2\tau} - \tau - 1}{\tau} d\tau$.

Ответ: $F(p) = \frac{1}{p} \left(\ln \frac{p}{p+2} - \frac{1}{p} \right)$.

4. Найти оригинал для функции $F(p) = \frac{p-3}{p^2+2p+5}$.

Ответ: $f(t) = e^{-t}(\cos 2t - 2 \sin 2t)$.

5. Решить задачу Коши:

$$x'' + 2x' - 3x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Ответ: $x(t) = \frac{1}{8}(3e^t - e^{-3t} - 2e^{-t})$.

6. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -2.$$

Ответ: $x(t) = -e^t + 2e^{2t}, \quad y(t) = e^t - 3e^{2t}$.

Дополнительные задачи

1. Найти изображения для функций:

а) $f(t) = \sin^4 t$; б) $f(t) = \operatorname{ch} t \cdot \cos 2t$; в) $f(t) = \int_0^t \frac{1 - \cos 2\tau}{\tau} \cdot e^{-3\tau} d\tau$.

г) $f(t) = \int_0^t \tau \cdot \sin \tau \cdot e^{t-\tau} d\tau$.

Ответ: а) $F(p) = \frac{1}{8} \left(\frac{p}{p^2 + 16} - 4 \frac{p}{p^2 + 4} + \frac{3}{p} \right)$; б) $F(p) = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4}$;

в) $F(p) = \frac{1}{p} \ln \frac{\sqrt{p^2 + 4}}{p}$; г) $F(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} \cdot \frac{1}{p-1}$.

2. Найти изображение функции, заданной графически (рис. 19).

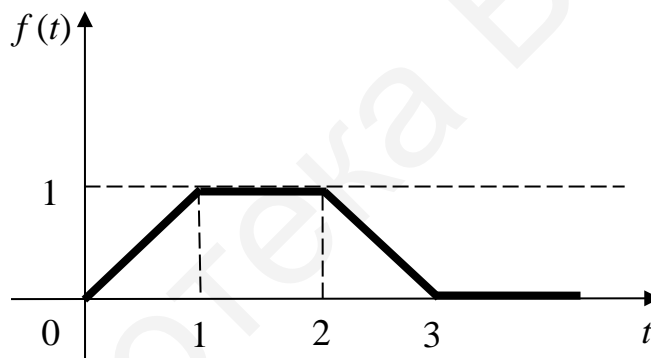


Рис. 19

Ответ: $F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} e^{-p} - \frac{1}{p^2} e^{-2p} + \frac{1}{p^2} e^{-3p}$.

3. Дважды применив теорему об интегрировании оригинала, найти оригинал изображения $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 4)}$.

Ответ: $f(t) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2t \right)$.

4. Найти оригиналы для следующих изображений:

а) $F(p) = \frac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$; б) $F(p) = \frac{1}{p^3 - 8}$; в) $F(p) = \frac{p^2 + 21p - 40}{(p+1)(p^2 - 5p + 6)}$.

Ответ: а) $f(t) = (t-3)e^{-(t-3)} \cdot 1(t-3)$;

б) $f(t) = \frac{1}{12}e^{2t} - \frac{1}{12}e^{-t}(\cos t\sqrt{3} + \sqrt{3}\sin t\sqrt{3})$; в) $f(t) = 8e^{3t} - 5e^{-t} - 2e^{2t}$.

5. Решить задачи Коши:

а) $x'' + 3x' = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$; б) $x'' + 4x = \sin 3t$, $x(0) = x'(0) = 0$;

$$\text{в) } \begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y, \end{cases} \quad x(0) = 3, \quad y(0) = -2; \quad \text{г) } \begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x - z, \\ z' = -x - y, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = -1, \\ y(0) = 0, \\ z(0) = 1. \end{matrix}$$

Ответ: а) $x = \frac{1}{4}e^t + \frac{5}{12}e^{-3t} - \frac{2}{3}$; б) $x = \frac{3}{10}\sin 2t - \frac{1}{5}\sin 3t$;

$$\text{в) } x = 2 + e^{5t}, \quad y = 2 - 4e^{5t}; \quad \text{г) } \begin{cases} x(t) = e^t, \\ y(t) = 0, \\ z(t) = e^t. \end{cases}$$

6. Используя формулу Дюамеля, найти оригинал $f(t)$ по его изображению

$$F(p) = \frac{p}{(p-1)(p+1)}.$$

Ответ: $f(t) = \operatorname{ch} t$.

7. С помощью интеграла Дюамеля решить дифференциальные уравнения:

а) $x'' + x' = t$, $x(0) = x'(0) = 0$;

б) $x'' + 4x = \sin^2(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$.

Ответ: а) $x(t) = \frac{t^2}{2} - t - e^{-t} + 1$; б) $x(t) = \frac{1}{8}(1 - \cos 2x - t \sin 2t)$.

Литература

1. Воробьев, Н. Н. Теория рядов / Н. Н. Воробьев. – М. : Наука, 1979.
2. Шмелёв, П. А. Теория рядов в задачах и упражнениях / П. А. Шмелёв. – М. : Высш. шк., 1983.
3. Свешников, А. Г. Теория функций комплексного переменного / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – М. : Наука, 1972.
4. Пантелеев, А. В. Теория функций комплексного переменного / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. – М. : Высш. шк., 2001.

Библиотека БГУИР

Содержание

Занятия 1–2. Ряд и его сумма. Знакоположительные ряды	3
Занятие 3. Знакопеременные ряды. Самостоятельная работа	12
Занятие 4. Функциональные ряды	17
Занятия 5–6. Ряды Тейлора	23
Занятие 7. Контрольная работа	31
Занятия 8–10. Ряды Фурье. Самостоятельная работа	33
Занятие 11. Интеграл Фурье	44
Занятие 12. Последовательности комплексных чисел.	
Кривые и области на комплексной плоскости	49
Занятие 13. Элементарные функции комплексной переменной	54
Занятие 14. Аналитические функции	60
Занятие 15. Интегрирование функций комплексной переменной	65
Занятие 16. Контрольная работа	70
Занятие 17. Ряды в комплексной области	72
Занятие 18. Ряды Тейлора и Лорана	77
Занятие 19. Нули и изолированные особые точки аналитических функций	83
Занятия 20–21. Вычеты. Приложения вычетов	90
Занятие 22. Контрольная работа	98
Занятия 23–25. Операционное исчисление.	
Самостоятельная работа	100
Литература	111

Учебное издание

Баркова Елена Александровна
Кобринец Николай Иванович
Конюх Елена Николаевна и др.

**РЯДЫ. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ
ПЕРЕМЕННОЙ. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

ПОСОБИЕ

Редактор *М. А. Зайцева*
Компьютерная верстка *Г. М. Корневская*
Компьютерная правка, оригинал-макет *М. В. Касабуцкий*

Подписано в печать 28.10.2019. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 6,74. Уч.-изд. л. 7,0. Тираж 100 экз. Заказ 138.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск