УДК 514.76

О НАХОЖДЕНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НА ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

ABOUT FINDING GEODESICS ON THREE-DIMENSIONAL MANIFOLDS

Можей Наталья Павловна
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры «Программное обеспечение информационных технологий»,
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (БГУИР),
г. Минск, Беларусь, mozhey@bsuir.by

Аннотация. Теория геодезических представляет собой один из основных разделов геометрии. Она имеет многочисленные приложения в механике, оптике, теории поля для

моделирования динамических систем на многообразиях. В работе описывается нахождение геодезических на трехмерных многообразиях с использованием пакета Maple.

Abstract. The theory of geodesics is one of the main sections of geometry. It has numerous applications in mechanics, optics, field theory for modeling dynamic systems on manifolds. The paper describes finding geodesics on three-dimensional manifolds using the Maple package.

Ключевые слова: однородное пространство, геодезическая, пакет Maple.

Keywords: homogeneous space, geodesic, Maple package.

Теория геодезических представляет собой один из основных разделов геометрии. Она имеет многочисленные приложения в механике, оптике, теории поля для моделирования динамических систем на многообразиях (см., например, [1]). В геометрии тех пространств, где метрика считается заданной, геодезические линии определяют как кратчайшие линии на поверхности. Исследование геодезических сопряжено с необходимостью решения систем дифференциальных уравнений, что ограничивает возможности применения аналитических методов и вынуждает прибегать к компьютерным методам исследования. Работа посвящена нахождению геодезических на трехмерных однородных пространствах с использованием пакета Maple.

Динамической системой, заданной на многообразии M, называется отображение g: $R \times M \to M$, записываемое в параметрическом виде $g^t(x)$, которое является дифференцируемым отображением, причем g^0 – тождественное отображение пространства M. В случае стационарных обратимых систем однопараметрическое семейство g^t образует группу преобразований пространства M. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Дифференцируемый путь на M называется *г з й*, если его касательное поле параллельно. Еще со времен возникновения римановой геометрии известно, что геодезические многообразия локально минимизируют длину дифференцируемых путей.

Вначале была получена локальная классификация трехмерных однородных пространств [2]. Для каждого такого пространства найдем группу Ли $\bar{G}$, действие группы Ли $\bar{G}$ на многообразии M, а также систему ОДУ на геодезические (относительно связности) и ее решения – геодезические (используем пакеты DifferentialGeometry, GroupActions, LieAlgebras, Tensor).

Сначала определим локальные координаты группы Ли $\bar{G}$, транзитивно действующей на однородном пространстве. Пусть, например, умножение элемента группы $\bar{G}$ с координатами (a_1, a_2, a_3, a_4) на элемент группы с координатами (x_1, x_2, x_3, x_4) выглядит следующим образом:

$$(x_1 = a_1 + a_2 a_3 x_4 + a_2 x_3 e^{a_4} a_4 + a_2 x_3 e^{a_4} x_4 - a_2 x_3 e^{a_4} + x_2 e^{(-a_4)} a_3 a_4 +$$
$$+ x_2 e^{(-a_4)} a_3 x_4 + x_2 x_3 a_4 + x_1, x_2 = a_2 + x_2 e^{(-a_4)}, x_3 = a_3 + x_3 e^{a_4}, x_4 = x_4 + a_4).$$

Правоинвариантные векторные поля для группы Ли:

$$(D_{x_1}, (x_3 x_4 - x_3) D_{x_1} + D_{x_2}, x_2 x_4 D_{x_1} + D_{x_3}, x_2 x_3 D_{x_1} - x_2 D_{x_2} + x_3 D_{x_3} + D_{x_4}).$$

Действие группы $\bar{G}$ на многообразии M имеет вид:

$$(x = a_2 + x e^{(-a_4)}, y = a_3 + y e^{a_4}, z = -a_1 + a_2 y e^{a_4} + z + a_4 a_2 a_3).$$

Инвариантная невырожденная метрика на M:

$$g = \alpha dxdy + \alpha dydx + \beta x^2 dydy - \beta xdydz - \beta xdzdy + \beta dzdz.$$

В данном случае тензор кручения *T* нулевой, т.е. связность без кручения.

Пусть ∇ – линейная связность на *M*. Если [*x*(*t*); *y*(*t*); *z*(*t*)] кривая на *M* с касательным вектором *T*, тогда уравнения геодезических относительно связности – это система второго порядка ОДУ. Найдем вектор (GeodesicEquations), компоненты которого – компоненты уравнений на геодезические:

$$\left\{\frac{-(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}z(t))\beta+(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}y(t))\beta x(t)+(\frac{d^2}{dt^2}x(t))\alpha}{\alpha}=0,\right.$$

$$-\frac{-(\frac{d}{dt}y(t))(\frac{d}{dt}z(t))\beta+(\frac{d}{dt}y(t))^2\beta x(t)-(\frac{d^2}{dt^2}y(t))\alpha}{\alpha}=0,$$

$$\left.-\frac{-(\frac{d}{dt}y(t))(\frac{d}{dt}z(t))\beta x(t)+(\frac{d}{dt}y(t))^2x(t)^2\beta+(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}y(t))\alpha-(\frac{d^2}{dt^2}z(t))\alpha}{\alpha}=0\right\}.$$

Решая эту систему 2 ОДУ второго порядка (dsolve), получаем геодезические:

$$\left\{x(t)=\frac{C_3\beta C_5+\alpha e^{\left(\frac{\beta(C_5t+C_6)}{\alpha}\right)}C_4}{\beta C_5},y(t)=-\frac{-C_1\beta C_5+\alpha e^{\left(-\frac{\beta(C_5t+C_6)}{\alpha}\right)}C_2}{\beta C_5},\right.$$

$$\left.z(t)=C_5t+C_6\right\}.$$

Также библиотека plots системы Maple предоставляет возможности построения трехмерной динамической компьютерной модели геодезических, оснащенной динамическим цифровым, языковым и графическим сопровождением.

Полученные результаты могут быть использованы для решения различных геометрических задач. Существуют также разные способы отождествления геодезических многообразий с траекториями консервативных и неконсервативных динамических систем, которые открывают широкие возможности для приложения результатов исследования в физике и механике.

Библиографический список

1. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. – М., 1989. 472 с.

2. Можей, Н. П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них / Н. П. Можей. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. 394 с.