

УДК 517.925.42

UDC 517.925.42

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ УРАВНЕНИЯ  
АБЕЛЯ С ПАРАМЕТРОМ,  
ПОВОРАЧИВАЮЩИМ ПОЛЕ****ABEL EQUATION LIMIT CYCLES WITH  
PARAMETER TURNING THE FIELDS**

**С. В. Рудевич,**  
*аспирант кафедры  
математического анализа,  
дифференциальных уравнений и  
алгебры ГрГУ им. Я. Купалы;*

**О. Н. Малышева,**  
*кандидат физико-математических  
наук, доцент кафедры высшей  
математики БГУИР;*

**А. А. Гринь,**  
*доктор физико-математических наук,  
доцент кафедры математического  
анализа, дифференциальных уравнений  
и алгебры ГрГУ им. Я. Купалы*

**S. Rudevich,**  
*Postgraduate Student  
of the Department of Mathematical  
Analysis, Differential Equations  
and Algebra, GrSU named after Ya. Kupala;*

**O. Malysheva,**  
*PhD in Physics and Mathematics,  
Associate Professor of the  
Department of Higher Mathematics, BSUIR;*

**A. Grin,**  
*Doctor of Physics and Mathematics,  
Associate Professor of the Department of  
Mathematical Analysis, Differential Equations  
and Algebra, GrSU named after Ya. Kupala*

Поступила в редакцию 11.10.19.

Received on 11.10.19.

В статье рассматривается задача установления точного числа и локализации предельных циклов для однопараметрических семейств уравнений Абеля, в которых параметр поворачивает векторное поле соответствующих автономных систем дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством.

Алгоритм построения функции предельных циклов второго рода, разработанный ранее А. А. Гринем совместно с Л. А. Черкасом и К. Шнайдером, вычисляющий для заданного значения неперiodической фазовой переменной соответствующее значение параметра, основан на применении метода Ньютона к отображению Пуанкаре и представляет собой метод продолжения по параметру. Для исследования поведения построенной функции в окрестностях точек экстремума, соответствующих бифуркациям двукратных предельных циклов, находится функция Пуанкаре для специальным образом расширенной системы. Для изучения монотонных участков функции предельных циклов разработаны новые способы установления точного числа предельных циклов, основанные на нахождении трансверсальных кривых, соответствующих функции Дюлака, Дюлака – Черкаса или их обобщений.

Эффективность предложенных подходов построения и исследования функции Пуанкаре продемонстрирована на примерах однопараметрических семейств уравнений Абеля, для которых установлено число предельных циклов и их расположение в зависимости от параметра.

*Ключевые слова:* предельный цикл, уравнение Абеля, 16-я проблема Гильберта, функция Дюлака – Черкаса, функция Пуанкаре.

The article considers the issue of establishing the exact number and localization of limit cycles for one-parameter families of the Abel equation in which the parameter rotates the vector field of the corresponding autonomous systems of differential equations with a cylindrical phase space.

An algorithm for constructing the function of limit cycles of the second kind, developed earlier by A. Grin together with L. Cherkas and K. Schneider, which calculates the corresponding parameter value for a given value of a non-periodic phase variable, is based on the use of the Newton method to the Poincaré map and is a continuation method for the parameter.

To study the behavior of the constructed function in the vicinity of extremum points corresponding to bifurcations of double limit cycles, the Poincaré function is found for a specially extended system. To study the monotonic sections of the function of limit cycles, new methods were designed to establish the exact number of limit cycles, which we developed on the basis of finding transversal curves corresponding to the Dulac or Dulac - Cherkas function or their generalizations.

The effectiveness of the proposed approaches to constructing and studying the Poincare function was demonstrated by the examples of one-parameter families of Abel equations for which the number of limit cycles and their location depending on the parameter was established

*Keywords:* limit cycle, Abelian equation, 16th Hilbert's problem, Dulac – Chercas function, Puncare's function.

**Введение.** Как известно [1, с. 319], одна из ослабленных версий 16-й проблемы Гильберта посвящена нахождению верхней границы для числа предельных циклов уравнения вида

$$\frac{dy}{du} = \sum_{i=0}^n R_i(u)y^i, \quad y \in R, u \in [0; 2\pi], \quad (1)$$

где  $R_i(u)$  являются непрерывными  $2\pi$ -периодическими функциями, которая выражается только через  $n$ . Основным инструментом для изучения предельных циклов уравнения (1) является отображение Пуанкаре и функция сдвига, вводимая с его помощью. В работе [2, с. 68–74] доказано, что при  $n \leq 3$  число предельных циклов (1) не превосходит  $n$ , если  $R_i(u) > 0$ . При  $n = 3$ , если условие  $R_3(u) > 0$  не выполняется, а также при  $n \geq 4$  уравнение (1) может иметь сколь угодно много предельных циклов [2, с. 68–74]. Так, в работе [3, с. 188–195] показано существование бесконечного числа неподвижных точек отображения Пуанкаре для этих случаев. Если коэффициенты  $R_i(u)$  уравнения (1) рассмотреть в виде тригонометрических полиномов степени не выше  $m$ , то верхняя граница для числа предельных циклов уравнения (1) должна выражаться только через  $n$  и  $m$ . Однако и в этом случае оценка не дана даже при  $m = 1$ .

Уравнение (1) при  $n = 3$  впервые было рассмотрено в работе Абеля 1881 г. [4, с. 95]. С тех пор оно постоянно привлекает к себе внимание исследователей, поскольку часто возникает в разных задачах теории дифференциальных уравнений [5, с. 275–281]. Так, если рассмотреть автономную систему на плоскости в окрестности фокуса и ввести полярные координаты, то полученное дифференциальное уравнение траекторий имеет правую часть как аналитическую функцию относительно радиуса с периодическими коэффициентами. Укоротив правую часть в таком уравнении, получим уравнение вида (1).

В некоторых случаях использование специальных подстановок или преобразование координат приводит к интегрируемому в квадратурах уравнению (1). Однако даже при указанных упрощениях решение уравнения (1) зачастую является очень громоздким и его анализ на предмет существования реше-

ний, соответствующих предельным циклам, как правило, затруднителен. Это вынуждает искать более эффективные методы исследования предельных циклов хотя бы для отдельных классов уравнений (1).

В работе [6, с. 173–175] исследовались предельные циклы уравнения Абеля вида

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} = & (a_1 \cos u + a_2 \sin u + a_3)y + \\ & + (b_1 \cos u + b_2 \sin u + b_3)y^2 + \\ & + (c_1 \cos u + c_2 \sin u + c_3)y^3, \end{aligned} \quad (2)$$

$a_i, b_i, c_i \in R$  где для решения  $y = 0$  при  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$  вычислены три первые ляпуновские величины, которые определяют условия центра. Эти результаты подтолкнули авторов статьи рассмотреть однопараметрические семейства уравнений вида (2), в которых параметр поворачивает векторное поле системы, с целью установления точного числа и локализации предельных циклов, а также определения их кратности.

Для достижения указанной цели мы будем применять метод построения и исследования функции предельных циклов, разработанный в работах Л. Черкаса, А. Гриня и К. Шнайдера [7, с. 51–59; 9, с. 2–10]. Изучение монотонных участков функции предельных циклов проведем с использованием предложенных в работах [9, с. 2–8; 11, с. 183–192; 12, с. 40–47] новых способов установления точного числа предельных циклов. Указанные способы основаны на нахождении трансверсальных кривых, соответствующих функции Дюлака, Дюлака – Черкаса [11, с. 690–697; 12, с. 840–850] или их обобщений.

В силу периодичности функций  $R_i(u)$  фазовым пространством автономной системы

$$\frac{du}{dt} = P(u, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(u, y), \quad (3)$$

соответствующей уравнению (1), является круговой цилиндр  $\Omega_c = \{(u, y) : u \in [u_0, u_0 + 2\pi], y \in R\}$ , на котором эта система не имеет точек покоя, а следовательно, и предельных циклов первого рода (не охватывающих цилиндр). Поэтому в статье будут

изучаться только предельные циклы второго рода (охватывающие цилиндр) [5, с. 219; 16, с. 466; 13, с. 35], расположенные на всем цилиндре  $\Omega_c$  либо в кольцеобразной области  $D = \{(u, y) : u \in [u_0, u_0 + 2\pi], \gamma_1(u) \leq y \leq$

$$\leq \gamma_2(u), \gamma_1(u_0) = \gamma_1(u_0 + 2\pi), \gamma_2(u_0) = \gamma_2(u_0 + 2\pi)\},$$

охватывающей цилиндр  $\Omega_c$ , причем функции  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  задают непересекающиеся кривые ( $\gamma_1 < \gamma_2$ ).

**1. Построение и исследование функции предельных циклов второго рода.** Рассмотрим теперь систему

$$\frac{du}{dt} = P(u, y, a), \quad \frac{dy}{dt} = Q(u, y, a), \quad (4)$$

зависящую от скалярного параметра  $a \in I \subset R$  для  $(u, y) \in D \subset \Omega_c$ . Следуя работам [7, с. 51–59; 9, с. 2–10] и рассматривая параметр  $a$  как дополнительную фазовую переменную, из (4) получаем соответствующую расширенную систему

$$\frac{du}{dt} = P(u, y, a), \quad \frac{dy}{dt} = Q(u, y, a), \quad \frac{da}{dt} = 0. \quad (5)$$

Также предполагаем, что эта система имеет инвариантное многообразие в виде

$$a = m(u, y), \quad (6)$$

состоящее из предельных циклов системы (4), и существует в фазовой плоскости гладкий отрезок  $S := \{(u, y) \in \Omega_c : u = s(y), y_0 \leq y \leq y_1\}$ , который все предельные циклы семейства (6) пересекают трансверсально.

**Определение 1.** Если различные предельные циклы  $L(y)$  семейства (6) пересекают отрезок  $S$  в различных точках  $(s(y), y)$ , то введем функцию  $I: [y_0, y_1] \rightarrow R, I(y) := m(s(y), y)$ , которая однозначным образом ставит в соответствие предельному циклу  $L(y)$ , пересекающему  $S$  в точке  $(s(y), y)$ , значение параметра  $a$ . Такая функция  $a = I(y)$  называется функцией предельных циклов второго рода системы (4) [8, с. 4].

Если параметр  $a$  поворачивает векторное поле системы (4) в  $\Omega_c$ , то есть справедливо неравенство

$$(P)_a' Q - P(Q)_a' \geq 0 (\leq 0), \quad (7)$$

которое не является тождеством на любом предельном цикле системы (4), принадлежащем многообразию (6), то функция  $I(y)$  совпадает с функцией предельных циклов Ан-

дронova – Хопфа [7, с. 53]. Условие (7) означает, что предельные циклы системы (4) при изменении параметра  $a$  изменяют свое положение, но при этом не пересекаются при различных значениях параметра [5, с. 225].

Алгоритм построения функции предельных циклов второго рода  $I(y)$  системы (4), вычисляющий для заданного  $y \in D(I)$  соответствующее значение параметра  $a = I(y)$ , представлен в работе [9, с. 5–8]. Он основан на использовании метода Ньютона к отображению Пуанкаре и представляет собой метод продолжения по параметру  $a$ . Далее используется метод наименьших квадратов для аппроксимации полученного множества точек  $(y, a)$  с помощью некоторого многочлена  $I_p(y)$  подходящей степени  $p$ . Степень  $p$  выбирается так, чтобы число экстремумов многочлена  $I_p(y)$  на промежутке  $y \in J = [y_0, y_1]$  не изменялось при возрастании  $p$ . Полином  $I_p(y)$  дает возможность приближенно найти промежутки возрастания и убывания функции  $I(y)$ .

Однако результаты численных расчетов функции  $I(y)$  могут не учитывать тонкую структуру ее поведения в окрестности пары очень близких экстремумов. Поэтому достоверность поведения функции  $I(y)$  в окрестности каждой точки экстремума и на промежутках монотонности следует проверять. Для этого разбиваем отрезок  $J$  на перекрывающиеся друг друга на своих концах отрезки  $J_v$  двух типов: отрезки, соответствующие строго монотонному поведению функции  $I(y)$ , где система является структурно устойчивой, и отрезки, содержащие критические точки  $I(y)$ , которые соответствуют кратным предельным циклам. Как и в работе [7, с. 56], ограничимся изучением критических точек,

удовлетворяющих условию  $I''(y) \neq 0$ . Проверка поведения функции  $I(y)$  на отрезках первого типа проводится за счет построения соответствующих функций Дюлака, Дюлака – Черкаса или их обобщений, а проверка поведения функции  $I(y)$  на отрезках второго типа проводится за счет построения функции Пуанкаре [8, с. 55–58].

**2. Признак Дюлака – Черкаса и функция Пуанкаре для предельных циклов второго рода.**

**Определение 2.** Пусть  $X = (P, Q)$  – векторное поле, задаваемое системой (3) в области  $D \subset \Omega_c$ . Функция  $B \in C^1(D)$ , для которой  $\text{div}(BX)$  не меняет знак в  $D$ , а кривая  $\text{div}(BX) = 0$  не содержит предельных циклов,

называется функцией Дюлака системы (3) в области  $D$ .

Тогда по признаку Дюлака в случае существования такой функции  $B$  система (3) в рассматриваемой области  $D$  может иметь не более одного предельного цикла второго рода [5, с. 222].

**Определение 3.**  $2\pi =$  периодическая по  $u$  функция  $\Psi(u, y) \in C^1(D)$  называется функцией Дюлака – Черкаса системы (3) в области  $D$ , если существует действительное число  $k \neq 0$  такое, что в  $D$  выполняется неравенство

$$\Phi := k\Psi \operatorname{div} X + \frac{\partial \Psi}{\partial u} P + \frac{\partial \Psi}{\partial y} Q > 0 (< 0). \quad (8)$$

**Теорема 1 (Признак Дюлака – Черкаса)** [12, с. 841–842]. Пусть  $\Psi$  является функцией Дюлака – Черкаса системы (3) в области  $D$ , охватывающей цилиндр  $\Omega_c$  причем функции  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  задают непересекающиеся кривые ( $\gamma_1 < \gamma_2$ ) и в области  $D$  нет особых точек системы (3). При этом множество  $W$  состоит из  $s$  овалов  $w_1, w_2, \dots, w_s$ , охватывающих цилиндр, и разбивает  $D$  на  $s + 1$  кольцо  $\gamma_1 < w_1 < w_2 < \dots < w_s < \gamma_2$ . Тогда при отрицательном  $k$  система (3) имеет в каждом из  $s - 1$  колец между соседними овалами точно один предельный цикл второго рода, а всего система в области  $D$  может иметь не более  $s + 1$  таких предельных циклов (по одному циклу может быть между  $\gamma_1$  и  $w_1$ , а также между  $\gamma_2$  и  $w_s$ ). Каждый предельный цикл является устойчивым (неустойчивым), если в соответствующем кольце выполняется условие  $k \operatorname{sign}(\Psi\Phi) < 0$  ( $k \operatorname{sign}(\Psi\Phi) > 0$ ).

Для применения теоремы 1 функцию  $\Psi(u, y)$  для системы (3) удобно искать в виде линейной комбинации заданных базисных функций  $\Psi_j(u, y)$ :

$$\Psi = \Psi(u, y, C) = \sum_{j=1}^n C_j \Psi_j(u, y), \quad (9)$$

$$C_j = \operatorname{const}, \quad C = (C_1, \dots, C_n),$$

так как тогда и функция  $\Phi(u, y)$  является аналогичной линейной комбинацией известных функций  $\Phi_j$ :

$$\Phi = \Phi(u, y, C) = \sum_{j=1}^n C_j \Phi_j(u, y). \quad (10)$$

А именно, для системы (2) функцию  $\Psi(u, y)$  будем строить в виде

$$\Psi = \sum_{j=1}^{n_0+1} y^{j-1} \times \left( \sum_{l=1}^{m_0} a_{il} \cos((l-1)u) + \sum_{l=1}^{m_0} b_{il} \sin((l-1)u) \right). \quad (11)$$

Объединив коэффициенты  $C_j$  в один массив длины  $n = 2m_0(n_0 + 1)$ , удобно искать функцию  $\Psi$  вида (11), используя сеточную задачу линейного программирования [10, с. 188–189]

$$L \rightarrow \max, \sum_{j=1}^m C_j \Phi_j(u_p, y_p) - L \geq 0, |C_j| \leq 1, \quad (12)$$

на сетке узлов  $(u_p, y_p)$ ,  $p = 1, \dots, N_0$ , взятой в области  $D$ .

Поэтому проверка поведения функции  $I = I(y)$  на одном из монотонных участков  $J_v$ , соответствующих грубому поведению системы (4), проводится с помощью следующих результатов [10, с. 188–189].

**Теорема 2.** Пусть для системы (4) при любом  $a \in I = [a_1, a_2]$  выполняются условия:

- 1) параметр  $a$  поворачивает поле в области  $D$ ;
- 2) существуют функции  $C_j(a)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , а также функция

$$\Psi = \sum_{j=1}^n C_j(a) \Psi_j(u, y) \quad (13)$$

такие, что функция

$$\Phi(u, y, a) = \sum_{j=1}^n C_j(a) \Phi_j(u, y, a) > 0 (u, y) \in D_v = 2\pi \times J_v. \quad (14)$$

Тогда если семейство предельных циклов при  $a \in I$  заполняет кольцеобразную область  $D_v \subset D$ , то она соответствует монотонной функции  $I(y)$  и система (4) при каждом значении  $a \in I$  имеет в области  $D_v$  точно один предельный цикл второго рода.

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия теоремы 1 и дополнительно для системы (3) в области  $D$  существует вторая функция Дюлака – Черкаса  $\tilde{\Psi}(u, y)$ , удовлетворяющая при  $\tilde{k} < 0$  условию

$$\tilde{\Phi} \equiv \tilde{k} \tilde{\Psi} \operatorname{div} X + \frac{d\tilde{\Psi}}{dt} \geq 0 (\leq 0) \quad (15)$$

и такая, что множество  $\tilde{W} = \{(u, y) \in D : \tilde{\Psi}(u, y) = 0\}$  состоит из  $s + 1$  овалов  $\tilde{w}_i$ , окружающих цилиндр. Тогда система (3) в области  $D$  имеет точно  $s + 1$  предельных циклов второго рода.

**Теорема 4.** Пусть для системы (3) выполняются условия теоремы 1 и существует функция  $\tilde{\Psi}(u, y) \in C^1(D)$  при  $\tilde{k} < 0$  такая, что в области  $D$  множество  $\tilde{W}$  состоит из  $s + 2$  овалов  $\tilde{w}_i$ , окружающих цилиндр. Причем множество  $\tilde{V} = \{(u, y) \in D : \tilde{\Phi} = 0\}$  не пересекается с овалами  $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_{s+1}, \tilde{w}_{s+2}$  множества  $\tilde{W}$  и не имеет овалов, окружающих цилиндр, расположенных между овалами  $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$  и  $\tilde{w}_3$  или овалами  $\tilde{w}_{s+1}$  и  $\tilde{w}_{s+2}$ . Тогда система (3) в области  $D$  имеет точно  $s + 1$  предельных циклов.

В некоторых случаях на практике требует меньших вычислительных усилий следующий подход, являющийся обобщением теоремы 1.

**Теорема 5.** Пусть для системы (3) существует функция  $\tilde{\Psi}(u, y) \in C^1(D)$  при  $k < 0$  такая, что в области  $D$  множество  $W$  состоит из  $s$  овалов  $\tilde{w}_i$ , окружающих цилиндр.

При этом функция  $\Psi(u, y)$  не удовлетворяет условию (8), но множество  $V = \{(u, y) \in D : \Phi = 0\}$  состоит из достаточно малых овалов  $v_j$ , не пересекающихся с овалами  $w_i$  и не окружающих цилиндр. Тогда система (3) в области  $D$  имеет не более  $s + 1$  предельных циклов.

**Доказательство.** Рассмотрим сначала кривую  $\Psi = 0$  множества  $W$ . Так как множества  $W$  и  $V$  не пересекаются, то на этой кривой выполняется условие (8), из которого вдоль любого решения системы (3) получаем  $\frac{d\Psi}{dt} > 0$  или  $\frac{d\Psi}{dt} < 0$ . Это значит, любая

траектория системы (3) пересекает кривую  $\Psi = 0$  трансверсально. Не теряя общности, рассмотрим случай, когда  $\frac{d\Psi}{dt} > 0$ , то есть

$\Phi > 0$ . Покажем, что предельные циклы не могут пересекать кривую  $\Psi = 0$ . Предположим противное, тогда точка на предельном цикле с увеличением времени может попасть на множество  $\Psi = 0$  только из множества  $\Psi < 0$  и обязательно должна уйти во множество  $\Psi > 0$ . Но, двигаясь по предель-

ному циклу, она должна вернуться на исходное место в области  $\Psi < 0$ , что в силу  $\frac{d\Psi}{dt} > 0$

невозможно, так как множество  $\Psi > 0$  является ловушкой и траектория из него не выйдет при  $t \rightarrow +\infty$ . Полученное противоречие доказывает, что предельные циклы системы (3) кривую  $\Psi = 0$  пересекать не могут. Теперь рассмотрим отдельно подобласти  $D_i$ ,  $i = 1, \dots, s + 1$ , области  $D$  в которых  $\Psi > 0$  или  $\Psi < 0$ . Поскольку границами подобластей  $D_i$  являются овалы  $w_j$ , окружающие цилиндр, то и сами подобласти  $D_i$  тоже окружают цилиндр. Рассмотрим произвольную подобласть  $D_p$ , границами которой являются два соседних овала  $w_i$  и  $w_{i+1}$ . Пусть для определенности в этой подобласти выполняется условие  $\Psi > 0$ , значит все траектории системы (3) при  $t \rightarrow +\infty$  входят в нее, пересекая ее границы. Поскольку точек покоя и предельных циклов первого рода по ранее сделанному предположению у системы (3) нет, то внутри подобласти  $D_i$  должен быть по крайней мере один устойчивый предельный цикл второго рода. Докажем, что этот цикл единственный. Предположим противное, тогда внутри подобласти  $D_i$  должен быть еще один неустойчивый предельный цикл второго рода  $\Gamma$ , на котором справедливо соотношение (14)

$$\int_{\Gamma} \operatorname{div} X \, dt = \int_0^T \frac{1}{k\Psi} \left( \Phi - \frac{d\Psi}{dt} \right) dt = \int_0^T \frac{\Phi}{k\Psi} \, dt > 0. \tag{16}$$

Соотношение (16) выполняется при условии  $\Phi < 0$ , которое имеет место только внутри овалов  $v_j$ . В силу требований теоремы к овалам  $v_j$  соотношение (16) не возможно, полученное противоречие доказывает единственность предельного цикла второго рода внутри подобласти  $D_i$ . Аналогичным образом доказывается возможность существования не более одного предельного цикла второго рода в каждой из подобластей  $D_0$  и  $D_s$ , заключенных между  $v_1$  и  $w_1$ , а также между  $v_2$  и  $w_s$ . Это завершает доказательство теоремы.

Более трудоемким является доказательство простоты точек экстремума, так как в них система (4) структурно неустойчива и подходы, использовавшиеся для монотонных участков функции  $I(y)$ , соответствующих грубым системам, в этом случае не «работают». Тогда построим функции Пуанкаре для специальным образом расширенных систем (13) [8, с. 55–57]. Отсутствие в области  $D_v$

предельных циклов второго рода кратности выше двух у системы (4) сводится к выполнению условия

$$\Psi \operatorname{div} X + \frac{d\Psi}{dt} + \alpha H_2 > 0, (u, y) \in D_v,$$

$$a \in I, H_2 = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{PH_1}{H} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{QH_1}{H} \right), \quad (17)$$

$$H_1 = \operatorname{div} X.$$

**Теорема 6** [8, с. 55]. Пусть система (4) при любом  $a \in I = [a_1, a_2]$  удовлетворяет условиям:

- 1) параметр  $a$  поворачивает поле в области  $D_v$ ;
- 2) существуют функции  $C_j(a), j = 1, \dots, n + 1$ , а также функция (13) такие, что функция

$$\Phi = \sum_{j=1}^n C_j(a) \Phi_j(u, y, a) + C_{n+1}(a) H_2(u, y, a) > 0, (u, y) \in D_v, \quad (18)$$

где  $C_{n+1}(a) > 0 (< 0)$ , и все рассматриваемые функции имеют необходимую гладкость;

- 3) система (4) при  $a = a_1(a_2)$  имеет в области  $D_v$  два предельных цикла, а при  $a = a_1(a_2)$  она не имеет предельных циклов в области  $D_v$ .

Тогда система (4) имеет в области  $D_v$  не более двух предельных циклов.

**Теорема 7** [8, с. 55]. Пусть для параметрического семейства систем (4), линейно зависящего от параметра  $a \in I = [a_1, a_2]$ , выполняются условия:

- 1) промежуток  $I$  не содержит критических значений параметра  $a = I(y)$  ( $I'(y) \neq 0$ );
- 2) существуют функции  $C_j(a), j = 1, \dots, n$ , а также (13) такие, что функция (14) удовлетворяет неравенствам

$$\Phi(u, y, a_1) > 0, \Phi(u, y, a_2) > 0, (u, y) \in D_v = 2\pi \times J_v. \quad (19)$$

Тогда  $\Psi(u, y, a)$  является функцией Дюлака – Черкаса семейства систем (4) в области  $D_v$  при всех значениях  $a \in I$ .

Таким образом, для всех  $a \in I$  в области  $D_v$  существует одна и та же функция  $\Psi$ , по которой производится оценка числа предельных циклов.

Пусть по численному прогнозу функция  $I(y)$  имеет на отрезке  $[\alpha_1, \beta_1]$  одну точку экстремума. Сначала по вышеописанной процедуре убедимся в справедливости одной из теорем 1, 3, 4 или 5 на соседних монотонных отрезках

$[\alpha, \beta]$  и  $[\alpha_2, \beta_2]$ ,  $\alpha_1$  выбираем достаточно близкое к  $\beta$ , а  $\beta_1$  к  $\alpha_2$ , причем  $\alpha_1 < \beta < \alpha_2 < \beta_1$ .

При построении функции Пуанкаре  $V$  для применения теоремы 6 в окрестности точки экстремума при условии, что параметр  $a \in I = [a_1, a_2]$  входит линейно в функции  $P(u, y, a)$ ,  $Q(u, y, a)$  и  $H_2(u, y, a)$  можно воспользоваться условиями (19), только вместо функции  $\Phi$  из (14) рассматривать функцию (18).

**3. Практическая апробация.** Развивая результаты работы [7, с. 53–59], представленные методы были применены к ряду однопараметрических семейств уравнений вида (2) для установления точного числа предельных циклов в зависимости от параметра. При этом были выделены несколько семейств, которые при определенных значениях параметра имеют три предельных цикла. Рассмотрим подробно следующее семейство уравнений (2):

$$\frac{dy}{du} = ay + (\cos u - \sin u - 0.09)y^2 + (-1/4 \cos u - 1/3 \sin u + 0.27632)y^3. \quad (20)$$

Для него функция  $H_2 = 2R_2 + 6R_3 y$  и параметр  $a$  поворачивает поле как на верхнем полуцилиндре  $y > 0$ , так и на нижнем полуцилиндре  $y < 0$ . Все вычисления проводились в компьютерной системе Mathematica. Для верхнего полуцилиндра с помощью приведенного в работе [8, с. 5–7] алгоритма на отрезке  $[0.02; 1.6]$  приближенно построена функция предельных циклов второго рода  $a = I_9(y)$ , принимающая после аппроксимации по методу наименьших квадратов вид  $I_9(y) = 0.0000186 + 0.0889942y - 0.349831y^2 + 0.770736y^3 - 1.15866y^4 + 1.23214y^5 - 0.896089y^6 + 0.419236y^7 + 0.112995y^8 + 0.0132861y^9$ . Эта функция возрастает при  $y \in [0; 0.311423]$  и  $y \in [0.926082; +\infty)$ , убывает при  $y \in [0.311423; 0.926082]$ ,  $A(0.3114, 0.00909)$  – точка максимума,  $B(0.9261, 0.0068)$  – точка минимума.

Исследуем монотонные участки функции  $I(y)$  на отрезке  $I = [0.0076; 0.0084]$ , которому соответствует два промежутка возрастания и один промежуток убывания. Функция  $I_9(y)$  для всех  $a \in I$  дает прогноз существования трех предельных циклов у рассматриваемого уравнения в кольце  $D_v$  при  $J_v = [0.1; 1.8]$  Для его проверки в кольце  $D_v$  для всех  $a \in I$  построена функция  $\Psi$  вида (11) при  $\eta_0 = 5$ ,  $m_0 = 6$ ,  $k = -0.8$ , удовлетворяющая условиям теоремы 1. Поскольку соответствующая функция (14) линейно зависит от парамет-

ра  $a$ , то ее положительность достигается при выполнении условий (19) за счет решения соответствующей задачи линейного программирования на сетке с равномерным количеством узлов  $n_u = 84$  вдоль оси  $u$  и  $n_y = 60$  вдоль оси  $y$ . Построенная функция с помощью овалов  $w_1$  и  $w_2$ , заданных уравнением  $\Psi = 0$ , разбивает область  $D_V$  на три кольца, в каждом из которых в соответствии с теоремой 1 рассматриваемое уравнение Абеля имеет точно один предельный цикл. На рисунке изображены три предельных цикла  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  при  $a = 0.0084$ , светлые и темные полосы соответствуют кольцам, где  $\Psi > 0$  и  $\Psi < 0$ . Следовательно, получаем подтверждение поведения функции  $I(y)$  на всех трех промежутках монотонности, соответствующих выбранному отрезку  $I$ . Поведение функции  $I(y)$  на других монотонных участках подтверждается аналогично. Иногда легче строить функцию  $\Psi$  в кольце  $D_V$ , содержащую два или один промежуток монотонности, соответствующий отрезку  $I$ . Заметим, что в случае уравнения (20) построение функции Дюлака – Черкаса для применения теорем 1, 3 или 4 требует больших вычислительных затрат, чем построение функции  $\Psi$  для применения теоремы 5.

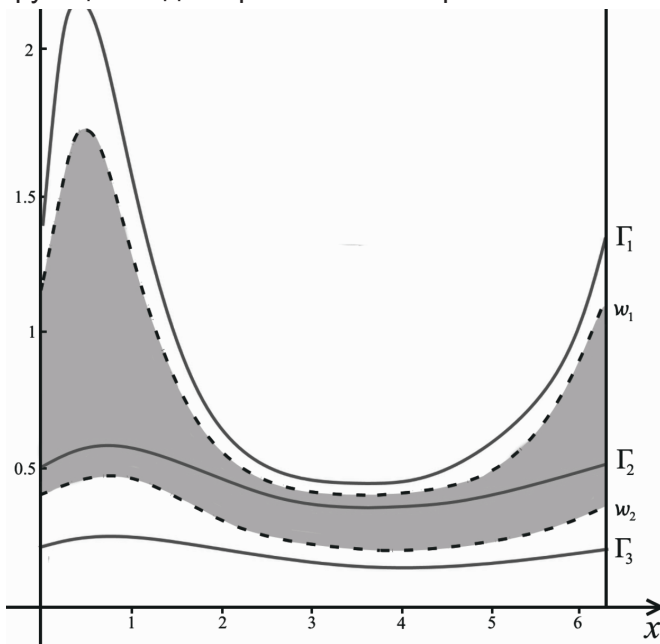


Рисунок – Предельные циклы  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  уравнения (20) при  $a = 0.008$  в областях разбиения цилиндра с помощью овалов  $w_1$  и  $w_2$

Докажем простоту точек экстремума функции  $I(y)$  с помощью теоремы 6 на примере точки максимума  $A$ . Сначала за счет решения задачи линейного программирования (12) строим функции  $\Psi$  вида (11) для

$a = 0.0089$  и  $a = 0.0091$  и с их помощью на основании теоремы 1 убеждаемся в существовании соответственно точно одного и трех предельных циклов уравнения в кольце  $D_V$  при  $J_V = [0.1; 1.8]$ . Затем для проверки точки  $A$  в кольце  $D_V$ , где  $J_V = [0.1; 0.6]$  для всех  $a \in I [0.0089; 0.0091]$  строим функцию Пуанкаре  $V$ , где  $\Psi$  имеет вид (11) при  $n_0 = 6$ ,  $m_0 = 5$ ,  $k = 1$ . Поскольку соответствующая функция (18) линейно зависит от параметра  $a$ , то ее положительность также достигается с помощью выполнения условий (19) за счет решения соответствующей задачи линейного программирования на сетке с равномерным количеством узлов  $n_u = 43$  вдоль оси  $u$  и  $n_y = 11$  вдоль оси  $y$ . Построенная функция Пуанкаре на основании теоремы 6 позволяет сделать вывод о существовании у данного уравнения в окрестности  $A$  не более двух предельных циклов. Поведение функции  $I(y)$  в окрестности точки минимума  $B$  подтверждается аналогично.

Таким образом, доказан следующий результат.

**Теорема 8.** Для уравнения Абеля (20) в области  $0 < y < 3$  справедлива следующая зависимость числа предельных циклов второго рода  $N(a)$  от параметра  $a$ : при  $a \in (0; 0.0067894]$  число  $N = 1$ ; существует значение  $a_1 \in (0.0067; 0.0067895)$ , при котором происходит бифуркация двукратного предельного цикла; при  $a \in [0.0067895; 0.009087]$  число  $N = 3$ ; существует значение  $a_2 \in (0.00987; 0.009088)$ , при котором происходит бифуркация двукратного предельного цикла; при  $a \in [0.009088; 0.011]$  число  $N = 1$ .

Аналогично проводится построение и исследование функции  $I(y)$  на нижнем полуцилиндре рассмотренного уравнения Абеля. Таким же способом нами были получены зависимости числа предельных циклов второго рода  $N(a)$  от параметра  $a$  для нескольких других однопараметрических семейств уравнений вида (2). В частности, получен следующий результат.

**Теорема 9.** Для уравнения Абеля

$$\frac{dy}{du} = ay + (\cos u - \sin u - 7/500)y^2 + (-1/4 \cos u - 1/10 \sin u + 1/10)y^3$$

в области  $0 < y < 1$  справедлива следующая зависимость числа предельных циклов второго рода  $N(a)$  от параметра  $a$ : при  $a \in (-0.003; -0.00027]$  число  $N = 0$ ; существует значение  $a_1 \in (-0.00027; -0.0026)$ , при

котором происходит бифуркация двукратного предельного цикла; при  $a \in [-0.00026; 0)$  число  $N = 2$ ; при  $a = 0$  происходит бифуркация грубого предельного цикла; при  $a \in (0; 0.00057]$  число  $N = 3$ ; существует значение  $a_2 \in (0.00057; 0.00058)$ , при котором происходит бифуркация двукратного предельного цикла; при  $a \in [0.00058; 0.0012]$  число  $N = 1$ .

**Заключение.** Для установления точного числа и локализации предельных циклов однопараметрических семейств уравнения Абеля, в которых параметр поворачивает

векторное поле соответствующих автономных систем дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством, нами был предложен усовершенствованный способ исследования функции предельных циклов второго рода. С его помощью для ряда однопараметрических семейств уравнений вида (2) установлена зависимость числа предельных циклов от параметра и выделены такие семейства уравнений, которые при определенных значениях параметра имеют три предельных цикла.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Ilyashenko, Y.* Centennial history of Hilbert's 16th problem, Bulletin of the AMS. 2002. Vol. 39. № 3. P. 301–354.
2. *Lins Neto, A.* On the number of solutions of the equations  $\frac{dx}{dt} = \sum_{j=0}^n a_j(t)x^j, 0 \leq t \leq 1$ , for which  $x(0) = x(1)$  / A. Lins Neto // Invent. Math. – 1980. – Vol. 59. – P. 67–76.
3. *Françoise, J. P.* Integrability and limit cycles for Abel equations / J. P. Françoise // Algebraic methods in dynamical systems. – Warszawa: Banach center publications, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences. – 2011. – Vol. 94. – P. 187–196.
4. *Abel, N. H.* Oeuvres Completes II. S. Lie and L., Sylow, Eds., Christiana, 1881.
5. *Баутин, Н. Н.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. – М., 1976.
6. *Alvarez, M. J.* A new uniqueness criterion for the number of periodic orbits of Abel equations / Alvarez M.J., Gasull A., Giacomini H. // Journal of Differential Equations. 2007. №234. – P. 161–176.
7. *Гринь, А. А.* Экстремумы функции Андронова-Хопфа полиномиальной системы Лъенара / А. А. Гринь, Л. А. Черкас // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41. – №1. С. 50–60.
8. *Cherkas, L. A.* On the approximation of the limit cycles function / L. A. Cherkas, A. A. Grin, K. R. Schneider // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2007. №28. P.1 – 11. – Rezhim dostupa : <http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/>. – Data dostupa : 7.09.2019.
9. *Гринь, А. А.* Признак Дюлака – Черкаса для установления точного числа предельных циклов автономных систем на цилиндре / А. А. Гринь, С. В. Рудевич // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 1–9.
10. *Гринь, А. А.* Способы нахождения точного числа предельных циклов автономных систем на цилиндре / А. А. Гринь, С. В. Рудевич // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2019. – Т. 55. – № 2. – С. 182–194.

#### REFERENCES

1. *Ilyashenko, Y.* Centennial history of Hilbert's 16th problem, Bulletin of the AMS. 2002. Vol. 39. № 3. P. 301–354.
2. *Lins Neto, A.* On the number of solutions of the equations  $\frac{dx}{dt} = \sum_{j=0}^n a_j(t)x^j, 0 \leq t \leq 1$ , for which  $x(0) = x(1)$  / A. Lins Neto // Invent. Math. – 1980. – Vol. 59. – P. 67–76.
3. *Françoise, J. P.* Integrability and limit cycles for Abel equations / J. P. Françoise // Algebraic methods in dynamical systems. – Warszawa: Banach center publications, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences. – 2011. – Vol. 94. – P. 187–196.
4. *Abel, N. H.* Oeuvres Completes II. S. Lie and L., Sylow, Eds., Christiana, 1881.
5. *Bautin, N. N.* Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti / N. N. Bautin, E. A. Leontovich. – M., 1976.
6. *Alvarez, M. J.* A new uniqueness criterion for the number of periodic orbits of Abel equations / Alvarez M.J., Gasull A., Giacomini H. // Journal of Differential Equations. 2007. №234. – P. 161–176.
7. *Grin', A. A.* Ekstremумы funkicii Andronova-Hopfа polinomial'noj sistemy L'enara / A. A. Grin', L. A. Cherkas // Differencial'nye uravneniya. – 2005. – Т. 41. – №1. С. 50–60.
8. *Cherkas, L. A.* On the approximation of the limit cycles function / L. A. Cherkas, A. A. Grin, K. R. Schneider // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2007. №28. P.1 – 11. – Rezhim dostupa : <http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/>. – Data dostupa : 7.09.2019.
9. *Grin', A. A.* Priznak Dyulaka – Cherkasa dlya ustanovleniya tochnogo chisla predel'nyh ciklov avtonomnyh sistem na cilindre / A. A. Grin', S. V. Rudevich // Differencial'nye uravneniya. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 1–9.
10. *Grin', A. A.* Sposoby nahozhdeniya tochnogo chisla predel'nyh ciklov avtonomnyh sistem na cilindre / A. A. Grin', S. V. Rudevich // Ves. Nac. akad. navuk Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 2019. – Т. 55. – № 2. – С. 182–194.



- 
11. *Черкас, Л. А.* Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости / Л. А. Черкас // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 5. – С. 689 – 699.
  12. *Cherkas, L. A.* A new approach to study limit cycles on a cylinder / L. A. Cherkas, A. A. Grin, K. R. Schneider // Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems Series A: Mathematical Analysis. – 2011. – Vol. 18, 6. – P. 839–851.
  13. *Барбашин, Е. А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством / Е. А. Барбашин, В. А. Табуева. – М., 1969.
  11. *Cherkas, L. A.* Funkciya Dyulaka polinomial'nyh avtonomnyh sistem na ploskosti / L. A. Cherkas// Differencial'nye uravneniya. – 1997. – Т. 33. – № 5. – S. 689 – 699.
  12. *Cherkas, L. A.* A new approach to study limit cycles on a cylinder / L. A. Cherkas, A. A. Grin, K. R. Schneider // Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems Series A: Mathematical Analysis. – 2011. – Vol. 18, 6. – P. 839–851.
  13. *Barbashin, E. A.* Dinamicheskie sistemy s cilindricheskim fazovym prostranstvom / E. A. Barbashin, V. A. Tabueva. – M., 1969.