УДК 514.765.1

ЭКВИАФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ НЕРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ

Н. П. Можей
кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

В работе исследуется задача описания эквиаффинных связностей на гладком многообразии. В общем случае эта проблема является довольно сложной. Поэтому естественно рассмотреть эту проблему в более узком классе многообразий, например, в классе симметрических однородных пространств. Цель работы – описание всех инвариантных эквиаффинных связностей на трехмерных симметрических однородных пространствах вместе с тензорами кручения и тензорами Риччи. Рассмотрены пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований с неразрешимым стабилизатором. В статье для трехмерных симметрических однородных пространств определено, при каких условиях связность является эквиаффинной (локально эквиаффинной). Также выписаны в явном виде сами эквиаффинные (локально эквиаффинные) связности, тензоры кручения, тензоры Риччи.

Ключевые слова: *эквиаффинная связность, группа преобразований, симметрическое пространство, тензор кручения, тензор Риччи.*

Введение

Цель работы – описать все эквиаффинные связности на симметрических однородных пространствах размерности 3. Случай аффинных связностей известен [1]. Аффинная связность является эквиаффинной, если допускает параллельную форму объема [2]. Для трехмерных симметрических однородных пространств определим, при каких условиях связность является эквиаффинной (локально эквиаффинной), также выпишем в явном виде сами связности, тензоры кручения и тензоры Риччи.

Симметрическое пространство – это пространство аффинной связности без кручения, тензор кривизны которого сохраняется при параллельном перенесении [3]. Геодезическая симметрия относительно любой точки такого пространства есть автоморфизм, заданная аффинная связность переходит в себя. Примерами симметрических пространств могут служить пространства постоянной кривизны, классические области в комплексном аффинном пространстве и т. д. Симметрические римановы пространства впервые исследовал П.А. Широков [4]. Трехмерные симметрические однородные пространства с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором изучались в работе [1].

Эквиаффинные пространства, т. е. пространства аффинной связности, в которых объем n-мерного параллелепипеда является инвариантным при параллельном переносе, также играют большую роль в теории геодезических отображений. Й. Микеш и В.Е. Березовский [5; 6] описали основные уравнения теории геодезических отображений для случая геодезических отображений эквиаффинных многообразий на псевдоримановы пространства. Эти результаты были отправной точкой для М.Г. Иствуда и В.С. Матвеева [7] в исследовании геодезических отображений многообразий с проективной связностью. В [8] показано, что любое пространство аффинной связности локально проективно эквивалентно пространству с эквиаффинной связностью. Этот результат также действителен “в целом” [9]. В [10] показано, что произвольное пространство проективной связности допускает “в целом” геодезическое отображение на некоторое пространство с эквиаффинной связностью. Эквиаффинные связности на трехмерных римановых и псевдоримановых однородных пространствах изучались в работе [11]. В данной работе изучаются эквиаффинные (локально эквиаффинные) связности на симметрических однородных пространствах.

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G=\bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации пар групп Ли $\bar{G}/G$, так как M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$ (см., например, [12]). Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. *Изотропное действие* группы G на касательном пространстве T_xM – это фактор-действие присоединенного действия G на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s.(x+\mathfrak{g}) = (Ads)(x)+\mathfrak{g}$ для всех $s \in G$, $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. При этом алгебра $\mathfrak{g}$ действует на $T_xM = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ следующим образом:

$$x.(y+\mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}, \text{ для всех } x \in \mathfrak{g},\ y \in \bar{\mathfrak{g}}.$$

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$ и фактор-пространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Аффинной связностью на паре $\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [13; 14]. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии (см., например, [15]) с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Симметрическое пространство есть тройка $(\bar{G}, G, \sigma)$, состоящая из связной группы Ли $\bar{G}$, замкнутой подгруппы G и инволютивного автоморфизма σ такого, что $\sigma(g) = s_o \circ g \circ s_o^{-1}$ для $g \in \bar{G}$ где s_o – симметрия для M в o. Поскольку $M = \bar{G}/G$ редуктивно (а $\bar{G}$, транзитивна), все симметрические пространства являются изотропно-точными. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$ – симметрическая алгебра Ли. Поскольку σ инволютивно, то его собственными значениями являются 1 и –1, а $\mathfrak{g}$ – собственное подпространство для 1. Пусть $\mathfrak{m}$ – собственное подпространство для –1. Разложение $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ называется *каноническим разложением* для $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$. Если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ – каноническое разложение симметрической алгебры Ли $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$, то $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset G$. Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензоры кручения $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и кривизны $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}, \quad R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]).$$

Будем говорить, что Λ имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если $T = 0$. В этом случае имеет место первое тождество Бьянки:

$$R(x,y)z + R(y,z)x + R(z,x)y = 0 \qquad \forall x,y,z \in \mathfrak{m}\,.$$

Определим тензор Риччи $Ric \in Inv\mathrm{T}_2(\mathfrak{m})$:

$$Ric(y,z) = \mathrm{tr}\{x \mapsto R(x,y)z\}.$$

Будем говорить, что аффинная связность Λ является *локально эквиаффинной*, если $\mathrm{tr}\Lambda([x,y]) = 0$ для всех $x,y \in \bar{\mathfrak{g}}$ (то есть $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}},\bar{\mathfrak{g}}]) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$).

Аффинная связность Λ с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиаффинна [2]. Действительно, по определению,

$$Ric(y,z) - Ric(z,y) = \mathrm{tr}\{x \mapsto R(x,y)z - R(x,z)y\}.$$

С учетом первого тождества Бьянки получаем

$$Ric(y,z) - Ric(z,y) = \mathrm{tr}\{x \mapsto -R(y,z)x\} = -\mathrm{tr}R(y,z).$$

Поскольку $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0$, имеем

$$Ric(y,z) - Ric(z,y) = -\mathrm{tr}(\Lambda(y)\Lambda(z) - \Lambda(z)\Lambda(y)) + \mathrm{tr}\Lambda([y,z]) = \mathrm{tr}\Lambda([y,z]).$$

Поскольку $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0$, имеем

$$Ric(y,z) - Ric(z,y) = -\mathrm{tr}(\Lambda(y)\Lambda(z) - \Lambda(z)\Lambda(y)) + \mathrm{tr}\Lambda([y,z]) = \mathrm{tr}\Lambda([y,z]).$$

Следовательно, тензор Ric симметрический тогда и только тогда, когда $\mathrm{tr}\Lambda([y,z]) = 0$ для всех $y,z \in \bar{\mathfrak{g}}$.

Под *эквиаффинной* связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\mathrm{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. В этом случае очевидно, что $\Lambda(\mathfrak{g}) \in \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Основная часть

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1,\ldots,e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim\,\mathfrak{g}$). Будем полагать, что подалгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается векторами $e_1,\ldots,e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, где d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, соответствующие приведенным в [1]. Поскольку ограничение $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, связность определяется своими значениями на $\mathfrak{m}$. Выпишем ее через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, запишем тензор кривизны R его значениями $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$, а тензор кручения T – его значениями $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$. Будем говорить, что связность *нулевая*, если $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3)$ =0.

Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется *тривиальной*, если существует коммутативный идеал $\mathfrak{a}$ в алгебре Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ такой, что $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$.

Теорема 1 [1]. Любое трехмерное симметрическое тривиальное однородное пространство $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, такое, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы, локально имеет вид $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$, где $\mathfrak{g}$ (подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$) сопряжена только одной из следующих подалгебр:

$$3.3.\left|\begin{array}{ccc} x & y & \\ z & -x & \\ & & \end{array}\right|;3.4.\left|\begin{array}{ccc} x & y & \\ z & & y \\ & z & -x \end{array}\right|;3.5.\left|\begin{array}{ccc} & y & x \\ -y & & z \\ -x & -z & \end{array}\right|;$$

$$4.1.\left|\begin{array}{ccc} x & z & \\ u & y & \\ & & \end{array}\right|;4.2.\left|\begin{array}{ccc} \lambda x+y & z & \\ u & \lambda x-y & \\ & & x \end{array}\right|;4.3.\left|\begin{array}{ccc} x+y & z & \\ u & x & z \\ & u & x-y \end{array}\right|;4.5.\left|\begin{array}{ccc} x & z & y \\ -z & x & u \\ -y & -u & x \end{array}\right|;$$

$$5.1.\left|\begin{array}{ccc} x & u & \\ v & y & \\ & & z \end{array}\right|;5.2.\left|\begin{array}{ccc} x & u & v \\ z & -x & u \\ & & \end{array}\right|;5.3.\left|\begin{array}{ccc} & u & v \\ & x & y \\ & z & -x \end{array}\right|;$$

$$6.1.\left|\begin{array}{ccc} x & z & w \\ u & y & v \\ & & \end{array}\right|;6.2.\left|\begin{array}{ccc} \lambda x+y & z & w \\ u & \lambda x-y & v \\ & & x \end{array}\right|;6.3.\left|\begin{array}{ccc} & v & w \\ & x & z \\ & y & u \end{array}\right|;6.4.\left|\begin{array}{ccc} x & v & w \\ & \lambda x+y & z \\ & u & \lambda x-y \end{array}\right|;$$

$$7.1.\left|\begin{array}{ccc} x & u & t \\ v & y & w \\ & & z \end{array}\right|;7.2.\left|\begin{array}{ccc} x & w & t \\ & y & u \\ & v & z \end{array}\right|;8.1.\left|\begin{array}{ccc} x & z & v \\ w & y-x & u \\ t & s & -y \end{array}\right|.$$

Также при $\dim\mathfrak{g}=9$ подалгебра $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$. Здесь подалгебры с одинаковыми номерами, но разными значениями параметра λ, не сопряжены друг другу; предполагается, что параметры пробегают все $\mathbb{R}$, также предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$. Базис подалгебры, по умолчанию, будем выбирать, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.

Доказательство этой теоремы приведено в работе [1].

Теорема 2 [1]. Любое трехмерное симметрическое нетривиальное однородное пространство $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, такое, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы локально эквивалентно одному и только одному из следующих пространств:

3.4.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	e_2	$-e_1$
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	$-e_2$	0	$-e_3$
u_3	u_3	$-u_2$	0	e_1	e_3	0

,

3.4.3	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$-e_2$	e_1
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	e_2	0	e_3
u_3	u_3	$-u_2$	0	$-e_1$	$-e_3$	0

,

3.5.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	e_2	e_1
u_2	0	$-u_1$	u_3	$-e_2$	0	e_3
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	$-e_1$	$-e_3$	0

,

3.5.3	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	$-e_2$	$-e_1$
u_2	0	$-u_1$	u_3	e_2	0	$-e_3$
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	e_1	e_3	0

,

5.2.2	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	u_2	0	0
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0	e_4+u_1
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0	e_5+u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-u_1$
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0	0	$-u_2$
u_3	0	0	0	$-e_4-u_1$	$-e_5-u_2$	u_1	u_2	0

,

5.2.3	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	u_2	0	0
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0	u_1
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-e_4$
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0	0	$-e_5$
u_3	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	e_4	e_5	0

,

6.1.2.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	e_5	$-e_6$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	e_5	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	e_6	0	u_2	0	0
e_4	0	0	0	0	e_5	e_6	u_1	u_2	0
e_5	$-e_5$	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	u_1
e_6	e_6	$-e_5$	0	$-e_6$	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	e_5
u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	e_6
u_3	0	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	$-e_5$	$-e_6$	0

,

6.1.3.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	e_5	$-e_6$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	e_5	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	e_6	0	u_2	0	0
e_4	0	0	0	0	e_5	e_6	u_1	u_2	0
e_5	$-e_5$	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	u_1
e_6	e_6	$-e_5$	0	$-e_6$	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$-e_5$
u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-e_6$
u_3	0	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	e_5	e_6	0

.

Замечание. В случае 5.2.2 базис $\mathfrak{m}$ в каноническом разложении имеет вид $\{u_1+e_4, u_2+e_5, u_3\}$, в остальных случаях – стандартный базис $\{u_1, u_2, u_3\}$. Далее используется базис канонического разложения. Если на параметры, появляющиеся в процессе классификации, не накладываются дополнительные условия, то предполагается, что они пробегают все $\mathbb{R}$.

Доказательство этой теоремы также приведено в работе [1].

Информация о тензорах кручения и тензорах Риччи приведена в доказательстве теоремы 3.

Пусть далее $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j} \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1,2,3)$.

Теорема 3. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – трехмерное симметрическое однородное пространство, приведенное в теореме 1 или 2. Эквиаффинные (локально эквиаффинные) связности имеют вид:

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$	Локально эквиаффинная связность (без кручения)
3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3, 4.2.1, 4.3.1, 4.5.1, 5.1.1, 5.3.1, 6.2.1, 6.3.1, 6.4.1, 7.1.1, 7.2.1, 8.1.1, 9.1.1	тривиальная
3.3.1, 4.1.1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
5.2.1, 5.2.3, 6.1.1, 6.1.2, 6.1.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3} \end{pmatrix}$
5.2.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3}+1 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(p_{1,3}+1) \end{pmatrix}$

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$	Эквиаффинная связность (без кручения)
3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3, 4.2.1 (λ=–1/2), 5.2.1, 5.2.3, 5.3.1, 6.2.1 (λ=–1/2), 6.4.1 (λ=–1/2), 8.1.1	тривиальная
3.3.1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{1,3} \end{pmatrix}$
5.2.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

В остальных случаях пространство не допускает эквиаффинной (локально эквиаффинной) связности.

Доказательство. Действительно, пусть, например, $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – трехмерное симметрическое однородное пространство 3.5.1 (либо 3.5.2, либо 3.5.3), тогда

$$\Lambda(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

($\Lambda|_{\mathfrak{g}}$ является изотропным представлением подалгебры $\mathfrak{g}$). Отображение Λ является $\mathfrak{g}$ -инвариантным, поэтому инвариантная аффинная связность имеет вид (см. [1]):

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&p_{2,3}\\0&-p_{2,3}&0\end{pmatrix},\ \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}0&0&-p_{2,3}\\0&0&0\\p_{2,3}&0&0\end{pmatrix},\ \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}0&p_{2,3}&0\\-p_{2,3}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Следовательно, при любых $p_{2,3}\in\mathbb{R}$ имеем $\operatorname{tr}\Lambda(x)=0$ для всех $x\in\overline{\mathfrak{g}}$ (и $\operatorname{tr}\Lambda([x,y])=0$ для всех $x,y\in\overline{\mathfrak{g}}$). Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix}0&-p_{2,3}{}^2+\delta&0\\p_{2,3}{}^2-\delta&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-p_{2,3}{}^2+\delta\\0&0&0\\p_{2,3}{}^2-\delta&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-p_{2,3}{}^2+\delta\\0&p_{2,3}{}^2-\delta&0\end{pmatrix},$$

$\delta=0$ в случае 3.5.1, $\delta=-1$ в случае 3.5.2, $\delta=1$ в случае 3.5.3. Тензор Риччи имеет вид

$$Ric=\begin{pmatrix}-2p_{2,3}{}^2+2\delta&0&0\\0&-2p_{2,3}{}^2+2\delta&0\\0&0&-2p_{2,3}{}^2+2\delta\end{pmatrix}.$$

и является симметрическим. Тензор кручения $T(u_1,u_2)=\left(0,0,-2p_{2,3}\right)$, $T(u_1,u_3)=\left(0,2p_{2,3},0\right)$, $T(u_2,u_3)=\left(-2p_{2,3},0,0\right)$. Если T=0 (Λ является связностью без кручения), то $p_{2,3}=0$ и связность тривиальная. В случаях 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3 инвариантная аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix}0&p_{1,2}&0\\0&0&p_{1,2}\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-p_{1,2}&0&0\\0&0&0\\0&0&p_{1,2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\-p_{1,2}&0&0\\0&-p_{1,2}&0\end{pmatrix},$$

тогда $\operatorname{tr}\Lambda(x)=0$, $x\in\overline{\mathfrak{g}}$ (и $\operatorname{tr}\Lambda([x,y])\ =\ 0$ для всех $x,y\in\overline{\mathfrak{g}}$), тензор Риччи является симметрическим; тензор кручения $(2p_{1,2},0,0),(0,2p_{1,2},0),(0,0,2p_{1,2})$.

В случаях 6.1.1, 6.1.2, 6.1.3 инвариантная аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&p_{1,3}\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r_{1,1}&0&0\\0&r_{1,1}&0\\0&0&r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Lambda(\mathfrak{g})\notin\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$, связность не является эквиаффинной. Тензор кручения $(0,0,0),\left(-p_{1,3}+r_{1,1},0,0\right),\left(0,-p_{1,3}+r_{1,1},0\right)$, если T=0 (Λ является связностью без кручения), то $r_{1,1}=p_{1,3}$. Имеем $\operatorname{tr}\Lambda([x,y])=0$ для всех $x,y\in\overline{\mathfrak{g}}$, тензор Риччи является симметрическим, т. е. связность является локально эквиаффинной.

В случаях 5.2.1, 5.2.3 инвариантная аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix}0&0&q_{2,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&q_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r_{1,1}&0&0\\0&r_{1,1}&0\\0&0&r_{1,1}+q_{2,3}\end{pmatrix},$$

тензор кручения $(0,0,0),\left(q_{2,3}-r_{1,1},0,0\right),\left(0,q_{2,3}-r_{1,1},0\right)$, тензор Риччи является симметрическим, то есть связность является эквиаффинной при $3r_{1,1}+q_{2,3}=0$ ($\mathrm{tr}\Lambda(x)=0$, $x\in\overline{\mathfrak{g}}$) и $r_{1,1}=q_{2,3}$ (T = 0), тогда связность тривиальная. Имеем также $\mathrm{tr}\Lambda([x,y])=0$ для всех $x,y\in\overline{\mathfrak{g}}$, т. е. связность является локально эквиаффинной. В случае 5.2.2 связность –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1}+q_{2,3}+1 \end{pmatrix},$$

тензор кручения $(0,0,0),\left(q_{2,3}-r_{1,1}+1,0,0\right),\left(0,q_{2,3}-r_{1,1}+1,0\right)$, тензор Риччи является симметрическим, связность является эквиаффинной при $3r_{1,1}+q_{2,3}+1=0$ ($\mathrm{tr}\Lambda(x)=0$, $x\in\overline{\mathfrak{g}}$) и $r_{1,1}=0, q_{2,3}=-1$ (T=0), тогда $r_{1,1}=0, q_{2,3}=-1$ и связность имеет вид, приведенный в теореме. Также $\mathrm{tr}\Lambda([x,y])=0$ для всех $x,y\in\overline{\mathfrak{g}}$, т. е. связность является локально эквиаффинной.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Заключение

Таким образом, для трехмерных симметрических однородных пространств с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором определено, при каких условиях связность является эквиаффинной (локально эквиаффинной). Также выписаны в явном виде сами связности, тензоры кручения и тензоры Риччи.

Полученные результаты могут найти приложения при исследовании многообразий, при изучении пространств со связностью, а также в теории относительности, в ядерной физике, физике элементарных частиц и др., поскольку многие фундаментальные проблемы в этих областях сводятся к исследованию инвариантных объектов на симметрических пространствах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Можей, Н. П.*** Симметрические однородные пространства неразрешимых групп Ли и связности на них / Н. П. Можей // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2018. – № 2(52). – С. 15–23.
2. ***Nomizu, K.*** Affine differential geometry / K. Nomizu, T. Sasaki. – Cambridge Univ. Press, 1994. – 263 p.
3. ***Картан, Э.*** Риманова геометрия в ортогональном репере / Э. Картан. – М. : Моск. ун-т, 1960. – 307 с.
4. ***Широков, П. А.*** Симметрические пространства первого класса / П. А. Широков // Избранные работы по геометрии. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1966. – С. 366–383.
5. ***Berezovski, V.*** Geodesic mappings of affine-connected spaces onto Riemannian spaces / V. Berezovski, J. Mikeˇs // Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai.– 1989. – Vol. 56. – P. 491–494.
6. ***Kiosak, V.*** Geodesic Mappings of Manifolds with Affine Connection / V. Kiosak, J. Mikeš, A. Vanžurová. – Olomouc : Palacký Univ. Press, 2008.
7. ***Eastwood, M.*** Metric connections in projective differential geometry / M. Eastwood, V. S. Matveev // Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations (Minneapolis, MN, 2006). – New York : Springer, 2007.– (IMA Vol. Math. Appl.; Vol. 144). – P. 339– 351.
8. ***Hinterleitner, I.*** On the theory of geodesic mappings of Einstein spaces and their generalizations / I. Hinterleitner, J. Mikeš, V. Kiosak // Acta Phys. Debrecena. – 2006. – Vol. 861. – P. 428– 435.
9. ***Mikeš, J.*** On geodesic mappings of manifolds with affine connection / J. Mikeš, I. Hinterleitner. – 2009. – arXiv:math.DG/0905.1839v2.

10. ***Гинтерлейтнер, И.*** Проективная эквивалентность и пространства эквиаффинной связности / И. Гинтерлейтнер, Й. Микеш // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. – Т. 16. – № 1. – С. 47–54.
11. ***Mozhey, N. P.*** Equiaffine Connections on Three-Dimensional Pseudo-Riemannian Spaces / N. P. Mozhey // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2019. – Vol. 40. – No. 8. – P. 1194–1203.
12. ***Онищик, А. Л.*** Топология транзитивных групп Ли преобразований/ А. Л. Онищик. – М. : Физ.-мат. лит., 1995. – 384 с.
13. ***Kobayashi, S.***Transformation groups in differential geometry / S. Kobayashi. – Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
14. ***Кобаяси, Ш.*** Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981.
15. ***Nomizu, K.*** Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. Journ. Math. – 1954. – Vol. 76, no. 1. – P. 33–65.

Поступила в редакцию 17.10.2019 г.
Контакты: mozheynatalya@mail.ru (Можей Наталья Павловна)

Mozhey N. EQUIAFFINE CONNECTIONS ON SYMMETRIC SPACES OF UNSOLVABLE LIE GROUPS.

The question of description of equiaffine connections on a smooth manifold is studied in the article. In general, the issue of the research is quite complicated. Therefore, it is natural to consider this problem in a narrower class of manifolds, for example, in the class of homogeneous symmetric spaces. The purpose of the work is to describe all invariant equiaffine connections on three-dimensional symmetric homogeneous spaces together with their torsion tensors and Ricci tensors. The author considers the case of the unsolvable Lie group of transformations with a unsolvable stabilizer. In the paper it is determined under what conditions the connection is equiaffine (locally equiaffine) for all three-dimensional symmetric homogeneous spaces. In addition, equiaffine (locally equiaffine) connections, torsion tensors and Ricci tensors are explicitly defined.

Keywords: equiaffine connection, transformation group, symmetric space, torsion tensor, Ricci tensor.