ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ СОДЕРЖАЩИХ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Христенко А. В.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Теслюк В.Н. – доцент, канд. физ.-мат. наук

В данной работе рассмотрены основные виды выражений, содержащих произведения показательных и алгебраических функций, вычисляемые в конечном виде. Представлен вывод формул для их расчета.

1) Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int x^m e^{nx} dx = \frac{1}{n} x^m e^{nx} - \frac{m}{n} \int x^{m-1} e^{nx} dx.$$

Продолжая последовательно применять это формулу и сделав несложные преобразования получим:

$$\int x^m e^{nx} dx = \frac{e^{nx}}{n^{m+1}} \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \binom{m}{p} p!\, n^{m-p} x^{m-p} \quad (1).$$

Интегрируем по частам функцию другого вида:

$$\int \frac{e^{nx}}{x^m} dx = -\frac{e^{nx}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{n}{m-1} \int \frac{e^{nx}}{x^{m-1}} dx.$$

Последовательно применяя эту формулу и выполняя некоторые преобразования получаем выражение:

$$\int \frac{e^{nx}}{x^m} dx = -\frac{e^{nx}}{(m-1)x^{m-1}} \sum_{p=0}^{p=m-2} \frac{n^p x^p}{\binom{m-2}{p} p!} + \frac{n^{m-1}}{(m-1)!} \int \frac{e^{nx}}{x} dx \;\; (m \geq 2) \quad (2).$$

Интеграл $\int \frac{e^{nx}}{x} dx$ в (2) не выражается в конечном виде и выражается бесконечным рядом. По формуле Маклорена:

$$\int \frac{e^{nx}}{x} dx = lnx + \frac{nx}{1*1!} + \frac{n^2x^2}{2*2!} + \frac{n^3x^3}{3*3!} + \cdots$$

Получим виды формул (1) и (2) для отрицательноо n:

$$\int x^m e^{nx} dx = -\frac{e^{nx}}{n^{m+1}} \sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} p!\, n^{m-p} x^{m-p} \quad (3);$$

$$\int \frac{e^{nx}}{x^m} dx = -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}e^{nx}} \sum_{p=0}^{p=m-2} \frac{(-1)^p n^p x^p}{\binom{m-2}{p} p!} + (-1)^p \frac{n^{m-1}}{(m-1)!} \int \frac{1}{xe^{nx}} dx \; (m \geq 2) \quad (4).$$

Интеграл $\int \frac{1}{xe^{nx}}$ не выражается в конечном виде.

При помощи равенства $a^{nx} = e^{nxlna}$ интегралы $\int x^m a^{nx} dx$ и $\int \frac{a^{nx}}{x^m} dx$ приводятся к виду $\int x^m e^{nxlna} dx$ и $\int \frac{e^{nxlna}}{x^m} dx$. Выражая последние интегралы по формулам (1) и (2) получим:

$$\int x^m a^{nx} dx = \frac{a^{nx}}{(nlna)^{m+1}} \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \binom{m}{p} p!\, (xnlna)^{m-p} \quad (5);$$

$$\int \frac{a^{nx}}{x^m} dx = -\frac{a^{nx}}{(m-1)x^{m-1}} \sum_{p=0}^{p=m-2} \frac{(xnlna)^p}{\binom{m-2}{p} p!} + \frac{(nlna)^{m-1}}{(m-1)!} \int \frac{a^x}{x} dx \;\; (m \geq 2) \quad (6).$$

В этих формулах n может быть отрицателен.

2) Исследуем интеграл $\int f(x) e^{nx} dx$, где $f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$ – целая рациональная функция степени m, при последовательном применении формулы интегрирования по частям

получим:

$$\int f(x)e^{nx} = \frac{1}{n}f(x)e^{nx} - \frac{1}{n^2}f'(x)e^{nx} + \cdots + \frac{(-1)^m}{n^{m+1}}f^{(m)}(x)e^{nx} = F(x)e^{nx} \qquad (7),$$

где $F(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m$ – также целая рациональная функция степени m. Коэффиценты $A_0, \ldots, A_m$ можно найти методом неопределенных коэффицентов.

3) Интеграл $\int x^{2m+1}e^{nx^2}dx$ подстановкой $x^2 = y$ приводится к интегралу $\frac{1}{2}\int y^m e^{ny}dy$. Применяя к последнему формулу (1) получится:

$$\int x^{2m+1}e^{nx}dx = \frac{e^{nx^2}}{2n^{m+1}}\sum_0^m(-1)^p\binom{m}{p}p!\,n^{m-p}x^{2(m-p)} \qquad (8).$$

Анологично получаем:

$$\int x^{2m+1}a^{nx^2}dx = \frac{a^{nx^2}}{2(nlna)^{m+1}}\sum_0^m(-1)^p\binom{m}{p}p!\,(nlna)^{m-p}x^{2(m-p)} \qquad (9).$$

Заменяя в последних двух формулах n на $-n$ окончательно получим следующее:

$$\int x^{2m+1}e^{-nx}dx = -\frac{e^{-nx^2}}{2n^{m+1}}\sum_0^m\binom{m}{p}p!\,n^{m-p}x^{2(m-p)} \qquad (10);$$

$$\int x^{2m+1}a^{-nx^2}dx = \frac{a^{-nx^2}}{2(nlna)^{m+1}}\sum_0^m\binom{m}{p}p!\,(nlna)^{m-p}x^{2(m-p)} \qquad (11).$$

Интегралы $\int x^{2m}e^{\pm nx^2}dx$ и $\int x^{2m}a^{\pm nx^2}dx$ не вычисляются в конечном виде.

Список использованных источников:

1.Тимофеев, А.Ф. Интегрирование функций: учеб. пособие – М. : Изд-во Техн.-Теор. Лит-ры, 1948. – 348 с.
2. Жевняк, Р.М. Высшая математика. Ч. 1 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск: Выш. шк., 1992. – 359 с.
3. Жевняк, Р.М. Высшая математика. Ч. 2 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск: Выш. шк., 1993. – 108 с.