УДК 512.815.6

Н. П. Можей
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ, СОСТОЯЩИЕ ИЗ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ЭНДОМОРФИЗМОВ

Исследование линейных групп Ли сопряжено, с одной стороны, с более общей задачей изучения произвольных линейных групп, с другой стороны, линейные группы Ли тесно связаны с алгебраическими группами. Цель работы – описание с точностью до сопряженности подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$, состоящих из нильпотентных эндоморфизмов. Решение этой задачи является первым шагом в классификации всех подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$. Определены основные понятия: линейная алгебра Ли, разделяющая алгебра Ли, разделяющая оболочка, линейный нильрадикал, подалгебра Мальцева, разложение Мальцева, ступень нильпотентности. Приведен алгоритм классификации линейных алгебр ступени нильпотентности n по алгебре ступени $n-1$, а также показано, что решение задачи классификации подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$ сводится к классификации линейных алгебр Ли, состоящих из нильпотентных эндоморфизмов, классификации максимальных разделяющих алгебр Ли с каждым линейным нильрадикалом, классификации немаксимальных разделяющих алгебр Ли и классификации неразделяющих линейных алгебр Ли с каждой разделяющей оболочкой. Рассмотрено в явном виде описание линейных алгебр Ли на четырехмерном пространстве, состоящих из нильпотентных эндоморфизмов. Алгоритмы, приведенные в работе, могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

Ключевые слова: нильпотентный эндоморфизм, линейная группа Ли, алгебра Ли, разделяющая алгебра Ли.

N. P. Mozhey
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

LINEAR LIE ALGEBRAS CONSISTING OF NILPOTENT ENDOMORPHISMS

The study of linear Lie groups is connected, on the one hand, with the more general problem of studying arbitrary linear groups, on the other hand, linear Lie groups are closely connected with algebraic groups. The purpose of the paper is to describe, up to conjugacy, subalgebras of the Lie algebra $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$, consisting of nilpotent endomorphisms. The solution to this problem is the first step in the classification of all subalgebras of the Lie algebra $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$. The basic concepts are defined: linear Lie algebra, dividing Lie algebra, dividing cover, linear nilradical, Maltsev's subalgebra, Maltsev's decomposition, nilpotency class. An algorithm for the classification of linear algebras of the nilpotency class n by the algebra of the degree $n-1$ is obtained, and it is also shown that the solution to the classification of subalgebras of the Lie algebra $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$ reduces to the classification of linear Lie algebras consisting of nilpotent endomorphisms, the classification of maximal dividing Lie algebras with each linear nilradical, and the classification of non-maximal dividing Lie algebras; and classifications of non-dividing linear Lie algebras with each dividing cover. An explicit description is given of linear Lie algebras on a four-dimensional space consisting of nilpotent endomorphisms. The algorithms described in the work can be computerized and used to solve similar problems in large dimensions.

Key words: nilpotent endomorphism, linear Lie group, Lie algebra, dividing Lie algebra.

Введение. Исследование линейных групп Ли сопряжено, с одной стороны, с более общей задачей изучения произвольных линейных групп (не обязательно групп Ли и над произвольными полями), о таких группах см., например, [1, 2]. С другой стороны, линейные группы Ли тесно связаны с алгебраическими группами над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. А именно, любая алгебраическая, т. е. замкнутая в топологии Зарисского, линейная группа является линейной алгебраической группой. Алгебраические линейные группы составляют наиболее изученный класс линейных групп.

Целью данной работы является описание классификации подалгебр алгебр Ли $\mathfrak{gl}(4, P)$, где $P = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, состоящих из нильпотентных эндоморфизмов, с точностью до сопряженности.

Основная часть. Пусть V – фиксированное конечномерное векторное пространство над полем нулевой характеристики. Напомним, что подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ называются *линейными алгебрами Ли*. Будем говорить, что линейные алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ сопряжены, если найдется такой элемент $\varphi \in GL(V)$, что $\varphi \cdot \mathfrak{g}_1 \cdot \varphi^{-1} = \mathfrak{g}_2$. Основой описываемой методики является теория разделяющих алгебр Ли, развитая в [3].

Любой эндоморфизм x пространства V единственным образом может быть представлен в виде суммы коммутирующих полупростого s и нильпотентного n эндоморфизмов пространства V. При этом s называется полупростой компонентой эндоморфизма x, а n – его нильпотентной компонентой. Разложение $x = s + n$ называется разложением Жордана эндоморфизма x. Линейная алгебра Ли называется *разделяющей*, если она содержит полупростую и нильпотентную компоненты каждого своего элемента [3]. *Разделяющей оболочкой* линейной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется минимальная разделяющая линейная алгебра Ли, содержащая $\mathfrak{g}$, она обозначается $e(\mathfrak{g})$ [3].

Пусть $\mathfrak{g}$ – разделяющая линейная алгебра Ли и $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$ – наибольший идеал нильпотентности тождественного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в V, который мы будем называть *линейным нильрадикалом* линейной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Известно, что существует такая подалгебра $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$, редуктивная в $\mathfrak{gl}(V)$, что $\mathfrak{g}$ является прямой суммой подпространств $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ [3]. Любая подалгебра $\mathfrak{m}$ с указанными свойствами называется *подалгеброй Мальцева* разделяющей алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ называется *разложением Мальцева* разделяющей алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Заметим, что подалгебра Мальцева $\mathfrak{m}$ является прямой суммой подалгебры Леви $\mathfrak{s} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и центра $\mathfrak{t}$ алгебры Ли $\mathfrak{m}$, а $\mathfrak{t}$ – максимальным элементом множества коммутативных подалгебр радикала $\mathfrak{r}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, состоящих из полупростых эндоморфизмов. Кроме того, идеал $\mathfrak{n}$ совпадает с множеством нильпотентных эндоморфизмов, лежащих в радикале $\mathfrak{r}$, и $\mathfrak{r} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}$.

Пусть далее $\mathfrak{n}$ – линейная алгебра Ли, состоящая из нильпотентных эндоморфизмов. Множество разделяющих алгебр Ли с линейным нильрадикалом $\mathfrak{n}$ обладает *максимальным элементом* $\overline{\mathfrak{g}}$, причем все максимальные элементы этого множества сопряжены алгебре Ли $\overline{\mathfrak{g}}$. Пусть $\overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{n}$ – разложение Мальцева разделяющей алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$. Любая разделяющая алгебра Ли с линейным нильрадикалом $\mathfrak{n}$ сопряжена некоторой разделяющей алгебре Ли $\mathfrak{g}$ с разложением Мальцева $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$, у которого $\mathfrak{m} \subset \overline{\mathfrak{m}}$.

Таким образом, решение задачи классификации подалгебр алгебр Ли $\mathfrak{gl}(4, P)$ разбивается на следующие подзадачи:

1) классификация линейных алгебр Ли, состоящих из нильпотентных эндоморфизмов;

2) классификация максимальных разделяющих алгебр Ли с каждым линейным нильрадикалом из пункта 1;

3) классификация немаксимальных разделяющих алгебр Ли с каждым линейным нильрадикалом из пункта 1 и с учетом результатов пункта 2;

4) классификация неразделяющих линейных алгебр Ли с каждой разделяющей оболочкой из пунктов 2 и 3.

Заметим также, что (за исключением пункта 1) остальная часть работы может быть без изменений перенесена на случай подалгебр произвольной редуктивной алгебры Ли.

Остановимся подробнее на классификации линейных алгебр Ли, состоящих из нильпотентных эндоморфизмов, что и является целью настоящей работы.

Пусть $\mathfrak{g}$ – подалгебра Ли $\mathfrak{gl}(V)$, состоящая из нильпотентных элементов. Определим убывающую фильтрацию векторного пространства V следующим образом: $V_1 = V$, $V_{k+1} = \mathfrak{g}(V_k)$ при $k \geq 1$. Из теоремы Энгеля следует, что существует такое натуральное число n, что $V_n \neq \{0\}$, а $V_{n+1} = \{0\}$. Назовем это число *n ступенью нильпотентности подалгебры* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$.

Пусть $\mathfrak{g}$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ ступени n. Тогда $\mathfrak{g}(V_n) = \{0\}$. Положим $W = V / V_n$. Пусть $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(W)$ – гомоморфизм алгебр Ли вида: $\pi(x) : v + V_n \mapsto x(v) + V_n$. Положим $\mathfrak{a} = ker\pi$, $\mathfrak{h} = \pi(\mathfrak{g})$. Тогда очевидно, что $\mathfrak{h}$ – подалгебра в $\mathfrak{gl}(W)$, состоящая из нильпотентных элементов и имеющая ступень нильпотентности $n-1$.

Алгебра Ли $\mathfrak{a}$ является коммутативным идеалом в $\mathfrak{g}$ и может быть естественным образом отождествлена с подпространством в $\mathcal{L}(W, V_n) : y(v + V_n) = y(v)$ для всех $y \in \mathfrak{a}, v \in V$.

Определим действие алгебры Ли $\mathfrak{h}$ на $\mathcal{L}(W, V_n)$ следующим образом:

$$x.\alpha = -\alpha \circ x, \text{ где } x \in \mathfrak{h},\ \alpha \in \mathcal{L}(W, V_n).$$

Тогда $x.y = [\pi^{-1}(x), y]$ для $x \in \mathfrak{h}$, $y \in \mathfrak{a}$. Следовательно, $\mathfrak{a}$ является подмодулем $\mathfrak{h}$-модуля $\mathcal{L}(W, V_n)$. Далее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ естественным образом определяет элемент $[\omega] \in H^1(\mathfrak{h}, \mathcal{L}(W, V_n) / \mathfrak{a})$. Действительно, пусть $s : W \to V -$ произвольное сечение канонической проекции $p : V \to W = V / V_n$. Отождествим векторное пространство V с $V_n \times W$ при помощи изоморфизма $I_s : x \mapsto (x - s \circ p(x), p(x))$. Определим отображение $\overline{\omega}_s : \mathfrak{h} \to \mathcal{L}(W, V_n)$ следующим образом:

$$\overline{\omega}_s(x) : w \mapsto s(x(w)) - \pi^{-1}(x).s(w).$$

Тогда, как нетрудно проверить, $\overline{\omega}_s \in Z^1(\mathfrak{h}, \mathcal{L}(W, V_n))$. Посредством факторизации возникает элемент $\omega_s \in Z^1(\mathfrak{h}, \mathcal{L}(W, V_n) / \mathfrak{a})$. При этом, если s' – другое сечение, то $\omega_s - \omega_{s'} \in B^1(\mathfrak{h}, \mathcal{L}(W, V_n) / \mathfrak{a})$, и поэтому класс $[\omega_s]$ элемента ω_s не зависит от выбора сечения.

Пусть $\mathfrak{g}$ – подалгебра ступени нильпотентности n, $\mathfrak{h} = \pi(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{a} = ker\pi$ и $[\omega]$ – соответствующий подалгебре $\mathfrak{g}$ элемент пространства $H^1(\mathfrak{h}, \mathcal{L}(W, V_n) / \mathfrak{a})$. Тогда имеет место равенство

$$(\omega(\mathfrak{h}) + \mathfrak{a}).W_{n-1} = V_n.$$

Действительно, как и ранее, отождествим V с $V_n \times W$ при помощи некоторого сечения $s : W \to V$. Поскольку $\mathfrak{g}(V_n) = 0$ и $\mathfrak{h}(W_{n-1}) = 0$, то

$$V_n = \mathfrak{g}^{n-1}(V) = \mathfrak{g}^{n-1}(\{0\} \times W) =$$
$$= (\omega(\mathfrak{h}) + \mathfrak{a}).W_{n-1} \times \mathfrak{h}^{n-1}(W) = (\omega(\mathfrak{h}) + \mathfrak{a}).W_{n-1} \times \{0\}.$$

Обратно, пусть $\mathfrak{h}$ – подалгебра в $\mathfrak{gl}(W)$ ступени нильпотентности $n-1$, U – некоторый тривиальный $\mathfrak{h}$-модуль, $\mathfrak{a}$ – подмодуль $\mathfrak{h}$-модуля $\mathcal{L}(W, U)$, и элемент $[\omega] \in H^1(\mathfrak{h}, \mathcal{L}(W, U) / \mathfrak{a})$ таков, что

$$(\omega(\mathfrak{h}) + \mathfrak{a}).W_{n-1} = U.$$

Тогда в векторном пространстве $V = U \times W$ может быть определена структура линейной алгебры Ли:

$$\mathfrak{g} = \{(u, w) \mapsto ((y + \omega(x))(w), x(w)) \mid x \in \mathfrak{h}, y \in \mathfrak{a}\},$$

превращающая $\mathfrak{g}$ в подалгебру ступени нильпотентности n, такую, что $\mathfrak{g}(V_{n-1}) = U$ и $\mathfrak{h} = \pi(\mathfrak{g})$.

Таким образом, показано, что *существует взаимно-однозначное соответствие между подалгебрами ступени нильпотентности n и тройками* $(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}, [\omega])$, *где* $\mathfrak{h}$ *– подалгебра ступени нильпотентности* $n-1$, $\mathfrak{a}$ *– подмодуль* $\mathfrak{h}$*-модуля* $\mathcal{L}(W, U)$ *и* $[\omega] \in H^1(\mathfrak{h}, \mathcal{L}(W, U) / \mathfrak{a})$, $(\omega(\mathfrak{h}) + \mathfrak{a}).W_{n-1} = U$.

Для подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(W)$ и подмодуля $\mathfrak{a} \subset \mathcal{L}(W, U)$ определим следующие подгруппы:

$$A(\mathfrak{h}) \quad = \{\varphi \in GL(W) \mid \varphi \cdot \mathfrak{h} \cdot \varphi^{-1} = \mathfrak{h}\},$$
$$A(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}) = \{(\psi, \varphi) \in GL(U) \times GL(W) \mid (\psi, \varphi).\mathfrak{a} =$$
$$= \mathfrak{a}, \varphi \in A(\mathfrak{h}), \psi \in GL(U)\},$$

где $(\psi, \varphi).y = \psi y \varphi^{-1}$ для $y \in \mathfrak{a}$.

Пусть $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ – две алгебры Ли, соответствующие тройкам $(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}, [\omega_1])$ и $(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}, [\omega_2])$. Тогда для того, чтобы алгебра Ли $\mathfrak{g}_1$ была сопряжена алгебре Ли $\mathfrak{g}_2$, необходимо и достаточно, чтобы элементы $[\omega_1]$ и $[\omega_2]$ были сопряжены относительно действия группы $A(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ в пространстве $H^1(\mathfrak{h}, \mathcal{L}(W, U) / \mathfrak{a})$.

Действительно, пусть подалгебры $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ сопряжены при помощи элемента $h \in GL(V)$, т. е. $h \cdot \mathfrak{g}_1 \cdot h^{-1} = \mathfrak{g}_2$. Тогда изоморфизм h может быть записан в виде

$$h : (u, \omega) \mapsto (\psi(u) + \alpha(\omega), \varphi(\omega)),$$

где $\psi \in GL(U)$, $\varphi \in GL(W)$, $\alpha \in \mathcal{L}(W, U)$. Следовательно, $(\psi, \varphi) \in A(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ и

$$\psi \cdot \omega_1(x) \cdot \varphi^{-1} + \psi \cdot \mathfrak{a} \cdot \varphi^{-1} + \alpha(x) \cdot \varphi^{-1} = \omega_2(\varphi x \varphi^{-1}) + \mathfrak{a}$$

для всех $x \in \mathfrak{h}$.

Поскольку $\alpha(x) = x.(-\alpha) \in B^1(\mathfrak{h}, \mathcal{L}(W, U))$, то элементы $[\omega_1]$ и $[\omega_2]$ сопряжены относительно группы $A(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$. Обратное утверждение очевидно.

Таким образом, получаем алгоритм классификации линейных алгебр ступени нильпотентности n по алгебре $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(W)$ ступени $n-1$ и векторному пространству U.

1. Определяем группу $A(\mathfrak{h})$ и ее действие в пространстве $\mathcal{L}(W, U)$, где U – тривиальный $\mathfrak{h}$-модуль.
2. С точностью до группы $A(\mathfrak{h})$ производим классификацию подмодулей $\mathfrak{h}$-модуля $\mathcal{L}(W, U)$.
3. Для всякого подмодуля $\mathfrak{a}$ из предыдущего пункта классифицируем элементы $[\omega] \in H^1(\mathfrak{h}, \mathcal{L}(W, U) / \mathfrak{a})$, такие, что $(\omega(\mathfrak{h}) + \mathfrak{a}).W_{n-1} = U$.
4. Для каждой тройки $(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}, [\omega])$ строим соответствующую подалгебру $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, где $V = U \times W$.

Тогда всякая подалгебра $\mathfrak{g}$ ступени нильпотентности n, такая, что $\mathfrak{g}(V) = U$ и $\pi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$, сопряжена одной и только одной из построенных алгебр.

Получим классификацию подалгебр в $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$, состоящих из нильпотентных элементов. Решение этой задачи является первым шагом в алгоритме классификации всех подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$, описанном ранее. При классификации подалгебр, состоящих из нильпотентных элементов, мы используем методику, приведенную выше.

Теорема. *Любая подалгебра в* $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$, *состоящая из нильпотентных элементов, сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр:*

$$\begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & y \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&x&0&0\\0&0&x&0\\0&0&0&x\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&x&y&0\\0&0&0&y\\0&0&0&x\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&x&0\\0&0&y&z\\0&0&0&x\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&y&z&u\\0&0&x&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&x&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&y\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&0&x\\0&0&z&y\\0&0&0&z\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&x&y&z\\0&0&x&0\\0&0&0&x\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&y&z\\0&0&x&u\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&x&y\\0&0&0&x\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&0&x\\0&0&0&y\\0&0&0&z\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&x&0&y\\0&0&x&z\\0&0&0&x\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&0&y\\0&0&z&u\\0&0&0&x\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&x\\0&0&0&y\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&x&y&z\\0&0&x&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&\alpha x&y&z\\0&0&x&y\\0&0&0&x\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&y&x&z\\0&0&0&u\\0&0&0&x\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&x&y\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&x&y&z\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&-x&y&z\\0&0&0&y\\0&0&0&x\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&y&z&u\\0&0&0&x\\0&0&0&y\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&x&y&0\\0&0&0&0\\0&0&0&y\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&x&y\\0&0&0&z\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&(1+\alpha)x&(1-\alpha)y&z\\0&0&0&y\\0&0&0&x\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&-y&z&x\\0&0&u&z\\0&0&0&y\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&x&y\\0&0&0&0\\0&0&0&x\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&x&y\\0&0&y&z\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&-x&x+y&z\\0&0&0&y\\0&0&0&x\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&y-z&u&x\\0&0&y&u\\0&0&0&z\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&x&y&z\\0&0&x&y\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&x&0&y\\0&0&x&z\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&y&z&x\\0&0&y&u\\0&0&0&y\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&y&u&v\\0&0&0&x\\0&0&0&z\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&x&y&0\\0&0&z&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&y&z\\0&0&x&u\\0&0&0&x\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&y&z&u\\0&0&x&0\\0&0&0&x\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&y&u&v\\0&0&x&z\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&x&y&z\\0&0&z&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&y&z&u\\0&0&y&x\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&y&z&u\\0&0&y&x\\0&0&0&z\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&y&v&x\\0&0&u&z\\0&0&0&y\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & y & 0 & z \\ 0 & 0 & y & u \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & y & u & v \\ 0 & 0 & y & x \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & y & u & x \\ 0 & 0 & z & y \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & y+u & v & x \\ 0 & 0 & u & z \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & y-u & z+u & x \\ 0 & 0 & y & z \\ 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & y & v & x \\ 0 & 0 & u & z \\ 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -y & y+u & x \\ 0 & 0 & z & u \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & y & v & w \\ 0 & 0 & x & z \\ 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & y & u \\ 0 & 0 & v & x \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{нулевая.}$$

Действительно, приведем пример классификации подалгебр из нильпотентных элементов в $\mathfrak{gl}(4,\mathbb{C})$ по заданной подалгебре $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{C})$. Пусть

$$\mathfrak{h} = \{x\cdot e_1 + y\cdot e_2\} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| x, y \in \mathbb{C} \right\} -$$

подалгебра ступени нильпотентности 2, $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ – стандартный базис в $\mathbb{C}^4$ и $U = \langle u_1\rangle$, $W = \langle u_2, u_3, u_4\rangle$. Тогда в базисе $\{u_2^*\otimes u_1, u_3^*\otimes u_1, u_4^*\otimes u_1\}$ $\mathfrak{h}$-модуль $\mathcal{L}(W, U)$ имеет вид

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 \end{pmatrix} \right| x, y \in \mathbb{C} \right\}.$$

Всякий его подмодуль сопряжен одному из следующих: $\{0\}$, $\langle u_4^*\otimes u_1\rangle$, $\langle u_3^*\otimes u_1, u_4^*\otimes u_1\rangle$, $\mathcal{L}(W, U)$.

1. Пусть $\mathfrak{a} = \{0\}$. Векторы

$$v_1 : \{e_1 \mapsto u_2^*\otimes u_1\},$$
$$v_2 : \{e_1 \mapsto u_3^*\otimes u_1, e_2 \mapsto u_2^*\otimes u_1\},$$
$$v_3 : \{e_2 \mapsto u_3^*\otimes u_1\},$$
$$v_4 : \{e_1 \mapsto u_4^*\otimes u_1\},$$
$$v_5 : \{e_2 \mapsto u_4^*\otimes u_1\}$$

образуют базис пространства $Z^1(\mathfrak{h}, \boxplus W, U))$ и при этом $B^1(\mathfrak{h}, \mathcal{L}(W, U)) = \langle v_4, v_5\rangle$. Отождествим трехмерное пространство $H^1(\mathfrak{h}, \mathcal{L}(W, U))$ с множеством симметрических матриц второго порядка. Тогда действие группы $A(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ примет вид

$$(a, A).B = a\cdot {}^tA^{-1}\cdot B\cdot A^{-1},$$

где $a\in\mathbb{C}^*$, $A\in GL(2,\mathbb{C})$. Условие $\omega(\mathfrak{h}).W_2 = U$ равносильно $B\neq 0$. С точностью до указанного действия матрица B принимает одну из следующих форм:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Соответствующие подалгебры имеют вид

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, x, y\in\mathbb{C}.$$

2. Пусть $\mathfrak{a} = \langle u_4^*\otimes u_1\rangle$. Тогда $\mathfrak{h}$-модуль $\mathcal{L}(W,U)/\mathfrak{a}$ тривиален и четырехмерное пространство $H^1(\mathfrak{h}, \boxplus W, U)/\mathfrak{a})$ можно отождествить с множеством матриц второго порядка. При этом классы когомологий, соответствующие матрицам B и B', сопряжены относительно группы $A(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, если $B' = a\cdot {}^tA^{-1}\cdot B\cdot A^{-1}$ для некоторых $a\in\mathbb{C}^*$, $A\in GL(2,\mathbb{C})$. Классы эквивалентности матриц имеют вид

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}, \alpha\sim-\alpha \right\}.$$

Им соответствуют следующие подалгебры:

$$\begin{pmatrix} 0 & y & -x & z \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x+y & -x & z \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x+\alpha y & -\alpha x + y & z \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha\sim-\alpha, x, y, z\in\mathbb{C}.$$

3. Пусть $\mathfrak{a} = \langle u_3^*\otimes u_1, u_4^*\otimes u_1\rangle$. Тогда $\mathfrak{h}$-модуль $\mathcal{L}(W, U)/\mathfrak{a}$ является тривиальным. Отож-

дествим пространство $H^1(\mathfrak{h}, \mathcal{L}(W,U)/\mathfrak{a})$ с $\mathbb{C}^2$. При этом действие группы $A(\mathfrak{h},\mathfrak{a})$ запишется в виде

$$(a, A).v = a \cdot {}^t A^{-1} \cdot v,$$

где $v \in \mathbb{C}^2$, $a \in \mathbb{C}^*$ и A – невырожденная верхнетреугольная матрица второго порядка. При заданном действии вектор v эквивалентен одному из следующих:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Соответствующие подалгебры имеют вид

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & z & u \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x & z & u \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & y & z & u \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$
$$x, y, z, u \in \mathbb{C}.$$

4. Пусть $\mathfrak{a} = \mathcal{L}(W, U)$. Тогда подмодулю $\mathfrak{a}$ соответствует единственная подалгебра:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & z & u & w \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| x, y, z, u, v, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Аналогичным образом могут быть рассмотрены все оставшиеся случаи.

Заключение. Описаны с точностью до сопряженности подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$, состоящие из нильпотентных эндоморфизмов. Решение этой задачи является первым шагом в классификации всех подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$.

Алгоритмы классификации, описанные в работе, могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

Литература

1. Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. М.: Наука, 1987. 464 с.
2. Супруненко Д. А. Группы матриц. М.: Наука, 1979. 351 с.
3. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972–1978. Гл. I–VIII.

References

1. Merzlyakov Yu. I. *Ratsional'nyye gruppy* [Rational groups]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 464 p.
2. Suprunenko D. A. *Gruppy matrits* [Matrix groups]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 351 p.
3. Burbaki N. *Gruppy i algebry Li* [Groups and Lie algebras]. Moscow, Mir Publ., 1972–1978.

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна − кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna − PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила после доработки 15.11.2019