

МАЛОМЕРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

Н.П. Можей

БГУИР

Изучение линейных групп Ли связано с более общей задачей изучения произвольных линейных групп, о таких группах см., например, [1, 2]. Линейные группы Ли также тесно связаны с алгебраическими группами над полями R и C . Пусть V – фиксированное конечномерное векторное пространство над полем нулевой характеристики. Целью данной работы является описание подалгебр алгебр Ли $g(V)$ с точностью до сопряженности.

Подалгебры алгебры Ли $g(V)$ называются *линейными алгебрами Ли*. Линейная алгебра Ли называется *разделяющей*, если она содержит полупростую и нильпотентную компоненты каждого своего элемента [3]. *Разделяющей оболочкой* линейной алгебры Ли g называется минимальная разделяющая линейная алгебра Ли, содержащая g , она обозначается $e(g)$ [3].

Группа $GL(V)$ действует на алгебре Ли $g(V)$ при помощи ее автоморфизмов: $\varphi \cdot x = \varphi \cdot x \cdot \varphi^{-1}$, где $\varphi \in GL(V)$ и $x \in g(V)$. Если n – нильпотентный эндоморфизм пространства V , то для всех $x \in g(V)$ $(\exp ad n)(x) = (\exp n) \cdot x \cdot (\exp(-n)) = (\exp n) \cdot x$. Если g – линейная алгебра Ли (т. е. $g \subset g(V)$), то элементы группы $A(g) = \{\varphi \in GL(V) \mid \varphi \cdot g = g\}$ назовем *автосопряжениями* линейной алгебры Ли g . Если r – радикал алгебры Ли g , то автосопряжения вида $\exp n$ ($n \in [g, r]$) называются *специальными*. Они образуют подгруппу группы $A(g)$.

Пусть $\mathfrak{s}$ – подалгебра Леви алгебры Ли g и $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана алгебры Ли $Z_g(\mathfrak{s})$. Подалгебра $\mathfrak{q} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}$ называется *подалгеброй Леви–Картана* алгебры Ли g .

Пусть g – линейная разделяющая алгебра Ли, M – множество подалгебр алгебры Ли g , редутивных в $g(V)$ и дополнительных в g к идеалу $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_g(g)$, и Q – множество подалгебр Леви–Картана алгебры Ли g . Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множествами M и Q . Если $m \in M$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t}$ ($\mathfrak{s} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ и $\mathfrak{t}$ – центр алгебры Ли $\mathfrak{m}$), то $\mathfrak{h} = Z_{Z_g(\mathfrak{s})}(\mathfrak{t})$ – подалгебра Картана алгебры Ли $Z_g(\mathfrak{s})$ и $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h} \in Q$. Если $q \in Q$, $q = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}$ и $\varphi(\mathfrak{h})$ – множество полупростых эндоморфизмов, лежащих в $\mathfrak{h}$, то $\mathfrak{s} \oplus \varphi(\mathfrak{h}) \in M$; группа специальных автосопряжений алгебры Ли g действует на множестве M транзитивно.

Идеал $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_\ell(g)$ называется *линейным нильрадикалом* разделяющей алгебры Ли g , а элементы множества M – *подалгебрами Мальцева* разделяющей алгебры Ли g .

Пусть g – линейная разделяющая алгебра Ли, $\mathfrak{n}$ – ее линейный нильрадикал и $\mathfrak{m}$ – ее подалгебра Мальцева. Если $\mathfrak{a}$ – подалгебра алгебры Ли g , редукируемая в $g(V)$, то существует специальное автосопряжение алгебры Ли g , переводящее $\mathfrak{a}$ в некоторую подалгебру в $\mathfrak{m}$. Также $\mathfrak{m}$ является максимальным элементом множества подалгебр алгебры Ли g , редукируемых в $g(V)$.

Если $\mathfrak{h}$ – подалгебра алгебры Ли g , содержащая ее коммутант $Dg = [g, g]$, то подалгебры $\mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ являются разделяющими.

Пусть g – линейная разделяющая алгебра Ли, $\mathfrak{n}$ – ее линейный нильрадикал и $\mathfrak{m}$ – ее подалгебра Мальцева. Если подалгебры $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ алгебры Ли $\mathfrak{m}$ сопряжены при помощи группы $A(g)$, то они сопряжены при помощи группы $A(g, \mathfrak{m}) = A(g) \cap A(\mathfrak{m})$.

Зафиксируем некоторую линейную алгебру Ли $\mathfrak{n}$, состоящую из нильпотентных эндоморфизмов. Нормализатор $N(\mathfrak{n})$ подалгебры $\mathfrak{n}$ в $g(V)$ является разделяющей подалгеброй. Зафиксируем некоторую подалгебру Мальцева $\bar{\mathfrak{m}}$ алгебры Ли $N(\mathfrak{n})$ и положим $\bar{g} = \bar{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{n}$. Ясно, что $\bar{g}$ является разделяющей алгеброй Ли, $\mathfrak{n}$ – ее линейным нильрадикалом и $\bar{\mathfrak{m}}$ – ее подалгеброй Мальцева. Все разделяющие алгебры Ли указанного вида сопряжены алгебре Ли $\bar{g}$, т. к. специальные автосопряжения алгебры Ли $N(\mathfrak{n})$ сохраняют идеал $\mathfrak{n}$.

Любая разделяющая алгебра Ли с линейным нильрадикалом $\mathfrak{n}$ сопряжена некоторой разделяющей алгебре Ли g с подалгеброй Мальцева $\mathfrak{m} = g \cap \bar{\mathfrak{m}}$. Также пусть $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ – подалгебры алгебры Ли $\bar{\mathfrak{m}}$, редукируемые в $g(V)$, тогда для того, чтобы алгебра Ли $g_1 = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{n}$ была сопряжена алгебре Ли $g_2 = \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{n}$, необходимо и достаточно, чтобы подалгебра $\mathfrak{m}_1$ переводилась в подалгебру $\mathfrak{m}_2$ при помощи группы $A(\bar{g}, \bar{\mathfrak{m}})$.

Итак, алгоритм классификации разделяющих алгебр Ли с данным линейным нильрадикалом $\mathfrak{n}$ выглядит следующим образом:

- 1) Строится нормализатор $N(\mathfrak{n})$ подалгебры $\mathfrak{n}$ в $g(V)$.
- 2) Фиксируется некоторая подалгебра Мальцева $\bar{\mathfrak{m}}$ алгебры Ли $N(\mathfrak{n})$ и строится разделяющая алгебра Ли $\bar{g} = \bar{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{n}$.
- 3) С точностью до сопряженности относительно группы $A(\bar{g}, \bar{\mathfrak{m}})$ описываются подалгебры $\mathfrak{m}_\alpha$ алгебры Ли $\bar{\mathfrak{m}}$, редукируемые в $g(V)$, и выписываются разделяющие подалгебры $g_\alpha = \mathfrak{m}_\alpha \oplus \mathfrak{n}$.

Пусть g – линейная разделяющая алгебра Ли, $\mathfrak{n}$ – ее линейный нильрадикал, $\mathfrak{m}$ – ее подалгебра Мальцева и $\mathfrak{h}$ – некоторая подалгебра алгебры Ли g . Тогда для того, чтобы $e(\mathfrak{h}) = g$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: 1. $Dg \subset \mathfrak{h}$; 2. $\mathfrak{h} + \mathfrak{m} = g$; 3. $\mathfrak{h} + \mathfrak{n} = g$. Отсюда следует, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством подалгебр $\mathfrak{h}$ алгебры Ли g , для которых $e(\mathfrak{h}) = g$, и множеством подпространств U пространства $\mathfrak{a}$, для которых $U + p(\mathfrak{m}) = \mathfrak{a}$ и $U + p(\mathfrak{n}) = \mathfrak{a}$. При этом соответствии $\mathfrak{h} \mapsto p(\mathfrak{h})$; $U \mapsto p^{-1}(U)$. Кроме того, если $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ – такие подалгебры алгебры Ли g , что $e(\mathfrak{h}_1) = g$ и $e(\mathfrak{h}_2) = g$, то подалгебры $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ сопряжены друг другу тогда и только тогда, когда соответствующие им подпространства $p(\mathfrak{h}_1)$ и $p(\mathfrak{h}_2)$ сопряжены друг другу относительно действия группы $A(g, \mathfrak{m})$.

Итак, задача классификации неразделяющих линейных алгебр Ли с разделяющей оболочкой g сводится к классификации подпространств $U \subset \mathfrak{a}$, таких, что $U \neq \mathfrak{a}$, $U + p(\mathfrak{m}) = \mathfrak{a}$ и $U + p(\mathfrak{n}) = \mathfrak{a}$, с точностью до сопряженности относительно действия группы $A(g, \mathfrak{m})$.

Заметим, что если t – центр алгебры Ли $\mathfrak{m}$, то $p(\mathfrak{m}) = p(t)$. Из этого, в частности, следует, что $\mathfrak{a} = p(t) \oplus p(\mathfrak{n})$.

Пусть g – линейная алгебра Ли, L – множество подалгебр алгебры Ли g , редутивных в $g(V)$, и M – множество максимальных элементов в множестве L . Тогда группа специальных автосопряжений алгебры Ли g действует на множестве M транзитивно.

Таким образом, приведен алгоритм классификации разделяющих алгебр Ли с данным линейным нильрадикалом, также решается задача классификации неразделяющих линейных алгебр Ли с данной разделяющей оболочкой. Эти алгоритмы были применены для описания с точностью до сопряженности подалгебр алгебры Ли $g(4, C)$. Алгоритмы, описанные в работе, также могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

Список литературы

1. Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. М.: Наука, 1987. 464 с.
2. Супруненко Д. А. Группы матриц. М.: Наука, 1979. 351 с.
3. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли, гл. I–VIII. М.: Мир, 1972–1978.