Нильпотентные подалгебры линейных алгебр Ли

Н. П. Можей, e-mail: mozheynatalya@mail.ru [1]

[1] Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Аннотация. *Приведен алгоритм классификации линейных алгебр Ли ступени нильпотентности n по алгебре ступени n–1, а также показано, что решение задачи классификации подалгебр линейной алгебры Ли сводится к классификации линейных алгебр Ли, состоящих из нильпотентных эндоморфизмов, классификации максимальных разделяющих алгебр Ли с каждым линейным нильрадикалом, классификации немаксимальных разделяющих алгебр Ли и классификации неразделяющих линейных алгебр Ли с каждой разделяющей оболочкой. Алгоритмы, описанные в работе, применены для размерности четыре, они также могут быть использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.*

Ключевые слова: *линейная группа Ли, алгебра Ли, нильпотентный эндоморфизм, разделяющая алгебра Ли.*

Введение

Изучение линейных групп Ли и их подгрупп связано с более общей задачей изучения произвольных линейных групп (не обязательно групп Ли и над произвольными полями), о таких группах см., например, [1, 2]. Линейные группы Ли тесно связаны и с алгебраическими группами, любая линейная группа, замкнутая в топологии Зарисского, является линейной алгебраической группой. Алгебраические линейные группы составляют наиболее изученный класс линейных групп.

1. Основная часть

Пусть V – фиксированное конечномерное векторное пространство над полем нулевой характеристики. Напомним, что подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ называются *линейными* алгебрами Ли. Будем говорить, что линейные алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ сопряжены, если найдется такой элемент $\varphi \in GL(V)$, что $\varphi \cdot \mathfrak{g}_1 \cdot \varphi^{-1} = \mathfrak{g}_2$. Основой описываемой методики является теория разделяющих алгебр Ли, развитая в [3].

Любой эндоморфизм x пространства V единственным образом может быть представлен в виде суммы коммутирующих полупростого s

и нильпотентного n эндоморфизмов пространства V. При этом s называется полупростой компонентой эндоморфизма x, а n – его нильпотентной компонентой. Разложение $x = s + n$ называется разложением Жордана эндоморфизма x. Линейная алгебра Ли называется *разделяющей*, если она содержит полупростую и нильпотентную компоненты каждого своего элемента [3]. *Разделяющей оболочкой* линейной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется минимальная разделяющая линейная алгебра Ли, содержащая $\mathfrak{g}$, и обозначается $e(\mathfrak{g})$.

Пусть $\mathfrak{g}$ – разделяющая линейная алгебра Ли и $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$ – наибольший идеал нильпотентности тождественного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в V, который мы будем называть *линейным нильрадикалом* линейной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Известно, что существует такая подалгебра $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$, редуктивная в $\mathfrak{gl}(V)$, что $\mathfrak{g}$ является прямой суммой подпространств $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ [3]. Любая подалгебра $\mathfrak{m}$ с указанными свойствами называется *подалгеброй Мальцева* разделяющей алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ называется *разложением Мальцева* разделяющей алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Заметим, что подалгебра Мальцева $\mathfrak{m}$ является прямой суммой подалгебры Леви $\mathfrak{s} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и центра $\mathfrak{t}$ алгебры Ли $\mathfrak{m}$, а $\mathfrak{t}$ – максимальным элементом множества коммутативных подалгебр радикала $\mathfrak{r}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, состоящих из полупростых эндоморфизмов. Кроме того, идеал $\mathfrak{n}$ совпадает с множеством нильпотентных эндоморфизмов, лежащих в радикале $\mathfrak{r}$, и $\mathfrak{r} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}$.

Пусть $\mathfrak{n}$ – линейная алгебра Ли, состоящая из нильпотентных эндоморфизмов. Множество разделяющих алгебр Ли с линейным нильрадикалом $\mathfrak{n}$ обладает *максимальным* элементом $\overline{\mathfrak{g}}$, причем все максимальные элементы этого множества сопряжены алгебре Ли $\overline{\mathfrak{g}}$. Пусть $\overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{n}$ – разложение Мальцева разделяющей алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$. Любая разделяющая алгебра Ли с линейным нильрадикалом $\mathfrak{n}$ сопряжена некоторой разделяющей алгебре Ли $\mathfrak{g}$ с разложением Мальцева $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$, у которого $\mathfrak{m} \subset \overline{\mathfrak{m}}$.

Таким образом, решение задачи классификации подалгебр алгебр Ли $\mathfrak{gl}(4, P)$, $P = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, разбивается на следующие подзадачи:

1) классификация линейных алгебр Ли, состоящих из нильпотентных эндоморфизмов;

2) классификация максимальных разделяющих алгебр Ли с каждым линейным нильрадикалом из пункта 1;

3) классификация немаксимальных разделяющих алгебр Ли с каждым линейным нильрадикалом из пункта 1 и с учетом результатов пункта 2;

4) классификация неразделяющих линейных алгебр Ли с каждой разделяющей оболочкой из пунктов 2 и 3.

Заметим также, что (за исключением пункта 1) остальная часть работы может быть без изменений перенесена на случай подалгебр произвольной редуктивной алгебры Ли.

Остановимся подробнее на классификации линейных алгебр Ли, состоящих из нильпотентных эндоморфизмов, которая и является целью настоящей работы.

Пусть $\mathfrak{g}$ – подалгебра Ли $\mathfrak{gl}(V)$, состоящая из нильпотентных элементов. Определим убывающую фильтрацию векторного пространства V следующим образом: $V_1 = V$, $V_{k+1} = \mathfrak{g}(V_k)$ при $k \geqslant 1$. Из теоремы Энгеля следует, что существует такое натуральное число n, что $V_n \neq \{0\}$, а $V_{n+1} = \{0\}$. Назовем это число n *ступенью нильпотентности подалгебры* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$.

Пусть $\mathfrak{g}$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ ступени n. Тогда $\mathfrak{g}(V_n) = \{0\}$. Положим $W = V / V_n$. Пусть $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(W)$ – гомоморфизм алгебр Ли вида: $\pi(x) : v + V_n \mapsto x(v) + V_n$. Положим $\mathfrak{a} = ker\pi$, $\mathfrak{h} = \pi(\mathfrak{g})$. Тогда очевидно, что $\mathfrak{h}$ – подалгебра в $\mathfrak{gl}(W)$, состоящая из нильпотентных элементов и имеющая ступень нильпотентности $n-1$.

Алгебра Ли $\mathfrak{a}$ является коммутативным идеалом в $\mathfrak{g}$ и может быть естественным образом отождествлена с подпространством в $\mathcal{L}(W, V_n)$: $y(v + V_n) = y(v)$ для всех $y \in \mathfrak{a}$, $v \in V$.

Определим действие алгебры Ли $\mathfrak{h}$ на $\mathcal{L}(W, V_n)$ следующим образом:

$$x.\alpha = -\alpha \circ x, \text{где } x \in \mathfrak{h}, \alpha \in \mathcal{L}(W, V_n). \quad (1)$$

Тогда $x.y = [\pi^{-1}(x), y]$ для $x \in \mathfrak{h}$, $y \in \mathfrak{a}$. Следовательно, $\mathfrak{a}$ является подмодулем $\mathfrak{h}$-модуля $\mathcal{L}(W, V_n)$. Далее, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ естественным образом определяет элемент $[\omega] \in H^1(\mathfrak{h}, \mathcal{L}(W, V_n) / \mathfrak{a})$. Действительно, пусть $s : W \to V$ – произвольное сечение канонической проекции $p : V \to W = V / V_n$. Отождествим векторное пространство V

с $V_n \times W$ при помощи изоморфизма $I_s: \quad x \mapsto (x - s \circ p(x), p(x))$. Определим отображение $\overline{\omega}_s : \mathfrak{h} \to \mathcal{L}(W, V_n)$ следующим образом:

$$\overline{\omega}_s(x) : w \mapsto s(x(w)) - \pi^{-1}(x).s(w). \tag{2}$$

Тогда, как нетрудно проверить, $\overline{\omega}_s \in Z^1(\mathfrak{h}, \mathcal{L}(W, V_n))$. Посредством факторизации возникает элемент $\omega_s \in Z^1(\mathfrak{h}, \mathcal{L}(W, V_n) / \mathfrak{a})$. При этом, если s' – другое сечение, то $\omega_s - \omega_{s'} \in B^1(\mathfrak{h}, \mathcal{L}(W, V_n) / \mathfrak{a})$, и поэтому класс $[\omega_s]$ элемента ω_s не зависит от выбора сечения.

Пусть $\mathfrak{g}$ – подалгебра ступени нильпотентности n, $\mathfrak{h} = \pi(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{a} = ker\pi$ и $[\omega]$ – соответствующий подалгебре $\mathfrak{g}$ элемент пространства $H^1(\mathfrak{h}, \mathcal{L}(W, V_n) / \mathfrak{a})$. Тогда имеет место равенство:

$$(\omega(\mathfrak{h}) + \mathfrak{a}).W_{n-1} = V_n. \tag{3}$$

Действительно, как и ранее, отождествим V с $V_n \times W$ при помощи некоторого сечения $s : W \to V$. Поскольку $\mathfrak{g}(V_n) = 0$ и $\mathfrak{h}(W_{n-1}) = 0$, то

$$V_n = \mathfrak{g}^{n-1}(V) = \mathfrak{g}^{n-1}(\{0\} \times W) = \tag{4}$$

$$= (\omega(\mathfrak{h}) + \mathfrak{a}).W_{n-1} \times \mathfrak{h}^{n-1}(W) = (\omega(\mathfrak{h}) + \mathfrak{a}).W_{n-1} \times \{0\}.$$

Обратно, пусть $\mathfrak{h}$ – подалгебра в $\mathfrak{gl}(W)$ ступени нильпотентности $n-1$, U – некоторый тривиальный $\mathfrak{h}$-модуль, $\mathfrak{a}$ – подмодуль $\mathfrak{h}$-модуля $\mathcal{L}(W, U)$, и элемент $[\omega] \in H^1(\mathfrak{h}, \mathcal{L}(W, U) / \mathfrak{a})$ таков, что

$$(\omega(\mathfrak{h}) + \mathfrak{a}).W_{n-1} = U. \tag{5}$$

Тогда в векторном пространстве $V = U \times W$ может быть определена структура линейной алгебры Ли:

$$\mathfrak{g} = \{(u, w) \mapsto ((y + \omega(x))(w), x(w)) \mid x \in \mathfrak{h}, y \in \mathfrak{a}\}, \tag{6}$$

превращающая $\mathfrak{g}$ в подалгебру ступени нильпотентности n, такую, что $\mathfrak{g}(V_{n-1}) = U$ и $\mathfrak{h} = \pi(\mathfrak{g})$.

Таким образом, показано, что существует взаимно-однозначное соответствие между подалгебрами ступени нильпотентности n и тройками $(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}, [\omega])$, где $\mathfrak{h}$ – подалгебра ступени нильпотентности $n-1$, $\mathfrak{a}$ – подмодуль $\mathfrak{h}$-модуля $\mathcal{L}(W, U)$ и $[\omega] \in H^1(\mathfrak{h}, \mathcal{L}(W, U) / \mathfrak{a})$, $(\omega(\mathfrak{h}) + \mathfrak{a}).W_{n-1} = U$.

Для подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(W)$ и подмодуля $\mathfrak{a} \subset \mathcal{L}(W,U)$ определим следующие подгруппы:

$$A(\mathfrak{h}) \quad = \{\varphi \in GL(W) \mid \varphi \cdot \mathfrak{h} \cdot \varphi^{-1} = \mathfrak{h}\}, \tag{7}$$

$$A(\mathfrak{h},\mathfrak{a}) = \{(\psi,\varphi) \in GL(U) \times GL(W) \mid (\psi,\varphi).\mathfrak{a} = \mathfrak{a}, \varphi \in A(\mathfrak{h}), \psi \in GL(U)\},$$

где $(\psi,\varphi).y = \psi y \varphi^{-1}$ для $y \in \mathfrak{a}$.

Пусть $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ – две алгебры Ли, соответствующие тройкам $(\mathfrak{h},\mathfrak{a},[\omega_1])$ и $(\mathfrak{h},\mathfrak{a},[\omega_2])$. Тогда для того, чтобы алгебра Ли $\mathfrak{g}_1$ была сопряжена алгебре Ли $\mathfrak{g}_2$, необходимо и достаточно, чтобы элементы $[\omega_1]$ и $[\omega_2]$ были сопряжены относительно действия группы $A(\mathfrak{h},\mathfrak{a})$ в пространстве $H^1(\mathfrak{h},\mathcal{L}(W,U)/\mathfrak{a})$.

Действительно, пусть подалгебры $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ сопряжены при помощи элемента $h \in GL(V)$, т. е. $h \cdot \mathfrak{g}_1 \cdot h^{-1} = \mathfrak{g}_2$. Тогда изоморфизм h может быть записан в виде:

$$h : (u,\omega) \mapsto (\psi(u) + \alpha(\omega), \varphi(\omega)), \tag{8}$$

где $\psi \in GL(U)$, $\varphi \in GL(W)$, $\alpha \in \mathcal{L}(W,U)$. Следовательно, $(\psi,\varphi) \in A(\mathfrak{h},\mathfrak{a})$ и

$$\psi \cdot \omega_1(x) \cdot \varphi^{-1} + \psi \cdot \mathfrak{a} \cdot \varphi^{-1} + \alpha(x) \cdot \varphi^{-1} = \omega_2(\varphi x \varphi^{-1}) + \mathfrak{a} \tag{9}$$

для всех $x \in \mathfrak{h}$.

Поскольку $\alpha(x) = x.(-\alpha) \in B^1(\mathfrak{h},\mathcal{L}(W,U))$, то элементы $[\omega_1]$ и $[\omega_2]$ сопряжены относительно группы $A(\mathfrak{h},\mathfrak{a})$.

Таким образом, получаем алгоритм классификации линейных алгебр ступени нильпотентности n по алгебре $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(W)$ ступени $n-1$ и векторному пространству U.

1) Определяем группу $A(\mathfrak{h})$ и ее действие в пространстве $\mathcal{L}(W,U)$, где U – тривиальный $\mathfrak{h}$-модуль.

2) С точностью до группы $A(\mathfrak{h})$ производим классификацию подмодулей $\mathfrak{h}$-модуля $\mathcal{L}(W,U)$.

3) Для всякого подмодуля $\mathfrak{a}$ из предыдущего пункта классифицируем элементы $[\omega] \in H^1(\mathfrak{h},\mathcal{L}(W,U)/\mathfrak{a})$, такие, что $(\omega(\mathfrak{h}) + \mathfrak{a}).W_{n-1} = U$.

4) Для каждой тройки $(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}, [\omega])$ строим соответствующую подалгебру $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, где $V = U \times W$.

Тогда всякая подалгебра $\mathfrak{g}$ ступени нильпотентности n, такая, что $\mathfrak{g}(V) = U$ и $\pi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$, сопряжена одной и только одной из построенных алгебр.

Для автоматизации вычислений используем систему Maple, в частности, пакеты DifferentialGeometry, LieAlgebraCohomology, LieAlgebras, получена классификация подалгебр в $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$, состоящих из нильпотентных элементов. Решение этой задачи является первым шагом в алгоритме классификации всех подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$, описанном ранее. При классификации подалгебр, состоящих из нильпотентных элементов, использована методика, приведенная выше.

Заключение

Описаны с точностью до сопряженности подалгебры линейной алгебры Ли на четырехмерном пространстве, состоящие из нильпотентных эндоморфизмов. Решение этой задачи является первым шагом в классификации всех подалгебр линейной алгебры Ли. Алгоритмы, описанные в работе, могут быть использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

Список литературы

1. Мерзляков, Ю. И. Рациональные группы / Ю. И. Мерзляков. – М. : Наука, 1987. – 464 с.
2. Супруненко, Д. А. Группы матриц / Д. А. Супруненко. – М. : Наука, 1979. – 351 с.
3. Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли, гл. I–VIII / Н. Бурбаки. – М. : Мир, 1972–1978.