УДК 514.765

# О геометрии трехмерных псевдоримановых однородных пространств. I

**Н. П. Можей**

Можей Наталья Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Беларусь, 220013, г. Минск, ул. П. Бровки, д. 6, mozheynatalya@mail.ru

Одной из важных проблем геометрии является задача об установлении связей между кривизной и топологической структурой многообразия. В общем случае задача исследования многообразий различных типов является достаточно сложной. Поэтому естественно рассматривать данную задачу в более узком классе псевдоримановых многообразий, например, в классе однородных псевдоримановых многообразий. В статье определены основные понятия — изотропно-точная пара, псевдориманово однородное пространство, аффинная связность, тензоры кривизны и кручения, связность Леви–Чевита, тензор Риччи, Риччи-плоское, Эйнштейново, Риччи-параллельное, локально-симметрическое, конформно-плоское пространства. В работе для трехмерных римановых однородных пространств определено, при каких условиях пространство является Риччи-плоским, Эйнштейновым, Риччи-параллельным, локально-симметрическим или конформно-плоским. Кроме этого, для всех указанных пространств выписаны в явном виде связности Леви–Чевита, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, скалярные кривизны, тензоры Риччи. Полученные результаты могут найти приложения в математике и физике, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях сводятся к изучению инвариантных объектов на однородных пространствах.

*Ключевые слова:* группа преобразований, риманово многообразие, тензор Риччи, Эйнштейново пространство, конформно-плоское пространство.

Поступила в редакцию: 03.11.2018 / Принята: 31.01.2019 / Опубликована: 02.03.2020



DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-29-41

## ВВЕДЕНИЕ

При исследовании римановых (и псевдоримановых) многообразий важную роль играют операторы кривизны, а также тензор Риччи. Изучение их свойств представляет интерес для понимания геометрического и топологического строения однородного риманова пространства. Исследованию многообразий Эйнштейна, локально-симметрических, Риччи-параллельных и конформно-плоских многообразий посвящены работы многих математиков. Римановы локально симметрические пространства введены П. А. Широковым и Э. Картаном. В настоящее время их геометрия представляет собой обширную и богатую приложениями теорию. Естественные обобщения симметрических пространств привели к другим, не менее интересным классам римановых пространств, одним из которых является класс римановых пространств с параллельным тензором Риччи, теория которых сводится к теории Эйнштейновых пространств.

Эйнштейновы многообразия в последние десятилетия также стали объектом многочисленных исследований (в книге А. Бессе [1] собраны факты по эйнштейновым многообразиям, полученные различными авторами, см. также обзор М. Вана [2]). Многомерным обобщением двумерных многообразий с локально изотермической координатной системой [3] являются конформно-плоские многообразия (римановы многообразия, окрестность каждой точки которых может быть конформно отображена на область евклидова пространства). В трехмерном случае класс конформно-плоских многообразий — это класс римановых многообразий с нулевым тензором Коттона (если размерность многообразия выше трех — с нулевым тензором Вейля), он содержит многообразия Эйнштейна и их прямые произведения, локально симметричные пространства, Риччи-параллельные и конформно-плоские многообразия (см., например, [1]). В случае многообразий постоянной скалярной кривизны класс конформно-плоских многообразий содержится в классе эйнштейновоподобных многообразий в смысле А. Грея [4]. Исследованию многообразий указанных классов посвящены работы М. А. Акивиса, В. В. Гольдберга, Н. Кюйпера, Д. В. Алексеевского, Б. Н. Кимельфельда, Е. Д. Родионова, В. В. Славского, О. Ковальского, С. Никшевича и др. (см., например, [5–8]); задача описания многообразий каждого типа не решена в полном объеме, но для некоторых классов пространств получен ответ (подробнее см. обзор [9]). Задачи изучения пространств рассматриваемых классов представляют интерес и в приложениях, например, в задачах геофизики.

В данной работе исследуются геометрические свойства трехмерных римановых однородных пространств, приведены основные факты по указанным пространствам и их классификация, далее изучена геометрия каждого класса, а именно для всех трехмерных римановых однородных пространств выписаны в явном виде связности Леви – Чевита, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, тензоры Риччи и определено, в каких случаях пространство является Риччи-плоским, Эйнштейновым, Риччи-параллельным, локально-симметрическим либо конформно-плоским.

## 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $M$ — дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\overline{G}$, $(M, \overline{G})$ — однородное пространство, $G = \overline{G}_x$ — стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \overline{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\overline{G}, G)$, где $G \subset \overline{G}$, так как многообразие $M$ может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\overline{G}/G$ (см., например, [10]). Изучая однородные пространства, важно рассматривать не саму группу $\overline{G}$, а ее образ в $\mathrm{Diff}(M)$, другими словами, достаточно рассматривать только эффективные действия группы $\overline{G}$ на многообразии $M$.

Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли группы Ли $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ — подалгебра, соответствующая подгруппе $G$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. В дальнейшем будем предполагать, что $G$ — связная подгруппа, что всегда можно сделать, ограничиваясь локальной точкой зрения. *Изотропное действие* группы $G$ на $T_xM$ — это фактордействие присоединенного действия $G$ на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s.(x + \mathfrak{g}) = (\mathrm{Ad}\, s)(x) + \mathfrak{g}$, для всех $s \in G, x \in \bar{\mathfrak{g}}$. При этом алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действует на касательном пространстве $T_xM = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ следующим образом: $x.(y+\mathfrak{g}) = [x, y]+\mathfrak{g}$ для всех $x \in \mathfrak{g}, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-*

*точной*, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. С геометрической точки зрения это означает, что естественное действие стабилизатора $\overline{G}_x$ произвольной точки $x \in M$ на $T_xM$ имеет нулевое ядро.

*Псевдориманово однородное пространство* задается тройкой $(\overline{G}, M, \mathbf{g})$, где $\overline{G}$ — связная группа Ли, $M$ является связным гладким многообразием с транзитивным действием $\overline{G}$ , а $\mathbf{g}$ — инвариантная псевдориманова метрика на $M$. Инвариантные псевдоримановы метрики $\mathbf{g}$ на $M$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с инвариантными симметрическими невырожденными билинейными формами $B$ на $G$-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ [11]. Билинейная форма $B$ также является инвариантной билинейной формой на $\mathfrak{g}$-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$: $B(x.v_1, v_2) + B(v_1, x.v_2) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, $v_1, v_2 \in \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Каждое псевдориманово однородное пространство $(\overline{G}, M, \mathbf{g})$, $\operatorname{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g} \leqslant 4$ описывается тройкой $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$, где $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ — эффективная пара алгебр Ли, а $B$ — инвариантная симметричная невырожденная билинейная форма на $\mathfrak{g}$ модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Существует единственное (с точностью до эквивалентности) псевдориманово однородное пространство $(\overline{G}, M, \mathbf{g})$, соответствующее $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$, такое, что $M$ односвязно и $G$ связна [12]. Будем называть тройку $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ *локально псевдоримановым однородным пространством*. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

## 2. ТРЕХМЕРНЫЕ РИМАНОВЫ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Трехмерные римановы однородные пространства описываются в работе [12] (псевдоримановы – в работе [13]):

**Теорема 1.** *Пусть* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ *– трехмерное локально риманово однородное пространство и* $\mathfrak{g} \neq \{0\}$. *Оно эквивалентно только одной из следующих троек:*

*1.3.1* $\lambda = 0$ $\bar{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{so}(2) \leftthreetimes \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$

| | $e_1$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $0$ | $-u_2$ | $u_1$ | $0$ |
| $u_1$ | $u_2$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $u_2$ | $-u_1$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $u_3$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |

$$B = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1;$$

*1.3.2* $\lambda = 0$

| | $e_1$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $0$ | $-u_2$ | $u_1$ | $0$ |
| $u_1$ | $u_2$ | $0$ | $0$ | $u_1$ |
| $u_2$ | $-u_1$ | $0$ | $0$ | $u_2$ |
| $u_3$ | $0$ | $-u_1$ | $-u_2$ | $0$ |

$$B = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \pm 1,\ a \neq 0;$$

*1.3.3* $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$

| | $e_1$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $0$ | $-u_2$ | $u_1$ | $0$ |
| $u_1$ | $u_2$ | $0$ | $e_1 + u_3$ | $0$ |
| $u_2$ | $-u_1$ | $-e_1 - u_3$ | $0$ | $0$ |
| $u_3$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad ab \neq 0;$$

*1.3.4* $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2) \times \mathbb{R}$

| | $e_1$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $0$ | $-u_2$ | $u_1$ | $0$ |
| $u_1$ | $u_2$ | $0$ | $-e_1 + u_3$ | $0$ |
| $u_2$ | $-u_1$ | $e_1 - u_3$ | $0$ | $0$ |
| $u_3$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |

, $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, $ab \neq 0$;

*1.3.5* $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$

| | $e_1$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $0$ | $-u_2$ | $u_1$ | $0$ |
| $u_1$ | $u_2$ | $0$ | $e_1$ | $0$ |
| $u_2$ | $-u_1$ | $-e_1$ | $0$ | $0$ |
| $u_3$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |

, $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $a \neq 0, \varepsilon = \pm 1$;

*1.3.6* $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2) \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$

| | $e_1$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $0$ | $-u_2$ | $u_1$ | $0$ |
| $u_1$ | $u_2$ | $0$ | $-e_1$ | $0$ |
| $u_2$ | $-u_1$ | $e_1$ | $0$ | $0$ |
| $u_3$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |

, $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $a \neq 0, \varepsilon = \pm 1$;

*1.3.7*

| | $e_1$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $0$ | $-u_2$ | $u_1$ | $0$ |
| $u_1$ | $u_2$ | $0$ | $u_3$ | $0$ |
| $u_2$ | $-u_1$ | $-u_3$ | $0$ | $0$ |
| $u_3$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |

, $B = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \pm 1$, $a \neq 0$;

*3.5.1* $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3) \leftthreetimes \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$

| | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $0$ | $e_3$ | $-e_2$ | $-u_3$ | $0$ | $u_1$ |
| $e_2$ | $-e_3$ | $0$ | $e_1$ | $-u_2$ | $u_1$ | $0$ |
| $e_3$ | $e_2$ | $-e_1$ | $0$ | $0$ | $-u_3$ | $u_2$ |
| $u_1$ | $u_3$ | $u_2$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $u_2$ | $0$ | $-u_1$ | $u_3$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $u_3$ | $-u_1$ | $0$ | $-u_2$ | $0$ | $0$ | $0$ |

, $B = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

*3.5.2* $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$

| | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $0$ | $e_3$ | $-e_2$ | $-u_3$ | $0$ | $u_1$ |
| $e_2$ | $-e_3$ | $0$ | $e_1$ | $-u_2$ | $u_1$ | $0$ |
| $e_3$ | $e_2$ | $-e_1$ | $0$ | $0$ | $-u_3$ | $u_2$ |
| $u_1$ | $u_3$ | $u_2$ | $0$ | $0$ | $e_2$ | $e_1$ |
| $u_2$ | $0$ | $-u_1$ | $u_3$ | $-e_2$ | $0$ | $e_3$ |
| $u_3$ | $-u_1$ | $0$ | $-u_2$ | $-e_1$ | $-e_3$ | $0$ |

, $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$;

*3.5.3* $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3,1)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$

| | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $0$ | $e_3$ | $-e_2$ | $-u_3$ | $0$ | $u_1$ |
| $e_2$ | $-e_3$ | $0$ | $e_1$ | $-u_2$ | $u_1$ | $0$ |
| $e_3$ | $e_2$ | $-e_1$ | $0$ | $0$ | $-u_3$ | $u_2$ |
| $u_1$ | $u_3$ | $u_2$ | $0$ | $0$ | $-e_2$ | $-e_1$ |
| $u_2$ | $0$ | $-u_1$ | $u_3$ | $e_2$ | $0$ | $-e_3$ |
| $u_3$ | $-u_1$ | $0$ | $-u_2$ | $e_1$ | $e_3$ | $0$ |

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \neq 0.$$

*Здесь $e_i$ ($i = \overline{1,3}$) – базис $\mathfrak{g}$, $u_1$, $u_2$, $u_3$ – базис $\mathfrak{m}$, нумерация пар соответствует приведенной в [14].*

## 3. ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНЫХ РИМАНОВЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Тензоры кручения $T \in \operatorname{Inv} {T_2}^1(\mathfrak{m})$ и кривизны $R \in \operatorname{Inv} {T_3}^1(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют, соответственно, вид $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x,y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x,y])$. *Риманова связность*, соответствующая форме $B$, находится из соотношения

$$\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} = \frac{1}{2}[x,y]_{\mathfrak{m}} + u(x,y),$$

где $2B(u(x,y),z) = B(x,[z,y]_{\mathfrak{m}}) + B([z,x]_{\mathfrak{m}},y)$ для всех $x,y,z \in \mathfrak{m}$. Существует единственная риманова связность без кручения, называемая *Леви – Чевита связностью*.

Тензор Риччи определяется через тензор кривизны следующим образом:

$$\operatorname{Ric}(x,y) = \operatorname{tr}\{z \to R(z,x)y\},$$

где $x$, $y$, $z$ — произвольные касательные векторы на многообразии.

С тензором Риччи связано несколько геометрических свойств многообразия. Многообразие $(M, \mathbf{g})$ называется *Риччи-плоским*, если тензор Риччи тождественно равен нулю. Более общее условие — многообразие является *Эйнштейновым*, если $\operatorname{Ric} = \lambda\mathbf{g}$ для некоторой константы $\lambda$. Условие *Риччи-параллельности* — ковариантная производная тензора Риччи равна нулю. Если ковариантная производная тензора кривизны равна нулю, т. е. $\Lambda(R) = 0$, многообразие называется *локально симметрическим*.

Конформно-плоские многообразия — многообразия, окрестность каждой точки которых может быть конформно отображена на область евклидова пространства. Если размерность многообразия не менее четырех, то многообразие является конформно плоским при равенстве нулю тензора Вейля

$$W(x,y,z,v) = R(x,y,z,v) + R/2\{\mathbf{g}(x,v)\mathbf{g}(y,z) - \mathbf{g}(x,z)\mathbf{g}(y,v)\} - \{\mathbf{g}(x,v)\operatorname{Ric}(y,z) - \\ - \operatorname{Ric}(x,z)\mathbf{g}(y,v) + \operatorname{Ric}(x,v)\mathbf{g}(y,z) - \mathbf{g}(x,z)\operatorname{Ric}(y,v)\},$$

где $x$, $y$, $z$, $v$ — произвольные касательные векторы на многообразии (а $R$ — скалярная кривизна). В размерности три тензор Вейля всегда равен нулю, вместо него применяется тензор Коттона (тензор Схоутена – Вейля), который на римановом многообразии задается как тензор 3-го ранга, определяемый с помощью метрики:

$$C(x,y,z) = \nabla_z \operatorname{Ric}(x,y) - \nabla_y \operatorname{Ric}(x,z) + \frac{1}{2(n-1)} \left(\nabla_y R\mathbf{g}(x,z) - \nabla_z R\mathbf{g}(x,y)\right),$$

где $x, y, z \in \mathfrak{m}$. В размерности три равенство нулю тензора Коттона является необходимым и достаточным условием того, что многообразие *конформно-плоское* [15].

Риччи-плоские, Эйнштейновы, Риччи-параллельные, локально-симметрические и конформно-плоские пространства описываются в следующей теореме.

**Теорема 2.** *Пусть* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ *— одно из трехмерных локально римановых однородных пространств, представленных в теореме 1. Риччи-плоские, Эйнштейновы, Риччи-параллельные, локально-симметрические и конформно-плоские пространства выписаны в табл. 1 и 2.*

*Таблица 1 / Table 1*

Риччи-плоские, Эйнштейновы и Риччи-параллельные пространства
Ricci-flat, Einstein and Ricci-parallel spaces

| Пара<br>Pair | Риччи-плоское<br>Ricci-flat | Эйнштейново<br>Einstein | Риччи-параллельное<br>Ricci-parallel |
|---|---|---|---|
| 1.3.1. | да / yes | да / yes ($\lambda = 0$) | да / yes |
| 1.3.2 | нет / no | да / yes ($\lambda = -2/a$) | да / yes |
| 1.3.3 | нет / no | при / for $b = -a$ ($\lambda = -1/(2a)$) | при / for $b = -a$ |
| 1.3.4 | нет / no | при / for $b = a$ ($\lambda = 1/(2a)$) | при / for $b = a$ |
| 1.3.5 | нет / no | нет / no | да / yes |
| 1.3.6 | нет / no | нет / no | да / yes |
| 1.3.7 | нет / no | нет / no | нет / no |
| 3.5.1 | да / yes | да / yes ($\lambda = 0$) | да / yes |
| 3.5.2 | нет / no | да / yes ($\lambda = -2/a$) | да / yes |
| 3.5.3 | нет / no | да / yes ($\lambda = 2/a$) | да / yes |

*Таблица 2 / Table 2*

Локально-симметрические и конформно-плоские пространства
Locally symmetric and conformally flat spaces

| Пара<br>Pair | Локально-симметрическое<br>Locally-symmetric | Конформно-плоское<br>Conformally-flat |
|---|---|---|
| 1.3.1. | да / yes | да / yes ($R = 0$) |
| 1.3.2 | да / yes | да / yes ($R = -6/a$) |
| 1.3.3 | при / for $b = -a$ | при / for $b = -a$ ($R = -(b+4a)/(2a^2)$) |
| 1.3.4 | при / for $b = a$ | при / for $b = a$ ($R = (4a-b)/(2a^2)$) |
| 1.3.5 | да / yes | да / yes ($R = -2/a$) |
| 1.3.6 | да / yes | да / yes ($R = 2/a$) |
| 1.3.7 | нет / no | нет / no ($R = -a/2$) |
| 3.5.1 | да / yes | да / yes ($R = 0$) |
| 3.5.2 | да / yes | да / yes ($R = -6/a$) |
| 3.5.3 | да / yes | да / yes ($R = 6/a$) |

**Доказательство.** Поскольку ограничение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, связность однозначно определяется своими значениями на $\mathfrak{m}$. Будем выписывать ее через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны $R$ будем выписывать его значениями $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$, а кручения $T$ — его значениями $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$.

Рассмотрим, например, случай 1.3.3. Аффинная связность имеет вид [12] (по умолчанию все параметры принадлежат $\mathbb{R}$)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{23} \\ 0 & 0 & p_{13} \\ -p_{32} & p_{31} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ -r_{12} & r_{11} & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}.$$

Связность является связностью Леви – Чевита ($\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} = \frac{1}{2}[x,y]_{\mathfrak{m}} + u(x,y)$, где $2B(u(x,y),z) = B(x,[z,y]_{\mathfrak{m}}) + B([z,x]_{\mathfrak{m}},y)$) при выполнении следующих условий:

$$2p_{31}b = 0, (2p_{32}-1)b = 0, 2p_{13}a = 0, 2p_{23}a+b = 0, -(2p_{32}-1)b = 0, 2p_{31}b = 0, -2p_{23}a-b=0,$$
$$2p_{13}a = 0, 2r_{11}a = 0, -2r_{12}a + b = 0, 2r_{12}a - b = 0, 2r_{11}a = 0, 2r_{33}b = 0.$$

Тогда $p_{13} = 0$, $p_{23} = -b/(2a)$, $p_{31} = 0$, $p_{32} = 1/2$, $r_{11} = 0$, $r_{12} = b/(2a)$, $r_{33} = 0$, а связность имеет вид, представленный в табл. 3.

*Таблица 3 / Table 3*

Аффинные связности / Affine connections

| Пара / Pair | Аффинная связность / Affine connection |
|---|---|
| 1.3.1 | нулевая / zero |
| 1.3.2 | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon/a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\varepsilon/a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ |
| 1.3.3 | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b/(2a) \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & b/(2a) \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b/(2a) & 0 \\ -b/(2a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ |
| 1.3.4 | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b/(2a) \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & b/(2a) \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b/(2a) & 0 \\ -b/(2a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ |
| 1.3.5, 1.3.6 | нулевая / zero |
| 1.3.7 | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a\varepsilon/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & a\varepsilon/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a\varepsilon/2 & 0 \\ -a\varepsilon/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ |
| 3.5.1–3.5.3 | нулевая / zero |

Тензор кривизны $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x,y])$ инвариантной аффинной связности:

$$R(u_1,u_2) = \begin{pmatrix} -p_{13}p_{32}+p_{23}p_{31}-r_{11} & p_{13}p_{31}+p_{23}p_{32}-1-r_{12} & 0 \\ -p_{23}p_{32}-p_{13}p_{31}+1+r_{12} & -p_{13}p_{32}+p_{23}p_{31}-r_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{23}p_{31}+2p_{13}p_{32}-r_{33} \end{pmatrix},$$

$$R(u_1,u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{13}r_{33}-r_{11}p_{13}-r_{12}p_{23} \\ 0 & 0 & p_{23}r_{33}+r_{12}p_{13}-r_{11}p_{23} \\ p_{31}r_{11}-p_{32}r_{12}-r_{33}p_{31} & p_{31}r_{12}+p_{32}r_{11}-r_{33}p_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{23}r_{33}-r_{12}p_{13}+r_{11}p_{23} \\ 0 & 0 & p_{13}r_{33}-r_{11}p_{13}-r_{12}p_{23} \\ -p_{32}r_{11}-p_{31}r_{12}+r_{33}p_{32} & p_{31}r_{11}-p_{32}r_{12}-r_{33}p_{31} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кручения $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x,y]_{\mathfrak{m}}$ имеет вид $T(u_1,u_2) = (0,0,2p_{32}-1)$, $T(u_1,u_3) = (p_{13}-r_{11}, p_{23}+r_{12}, 0), T(u_2, u_3) = (-p_{23}-r_{12}, p_{13}-r_{11}, 0)$. Для связности Леви – Чевита тензор кривизны примет вид, представленный в табл. 4, а тензор кручения нулевой.

*Таблица 4 / Table 4*

Тензоры кривизны / Curvature tensors

| Пара / Pair | Тензор кривизны / Curvature tensor |
|---|---|
| 1.3.1 | нулевой / zero |
| 1.3.2 | $\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon/a & 0 \\ \varepsilon/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon/a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \varepsilon/a & 0 \end{pmatrix},$ |
| 1.3.3 | $\begin{pmatrix} 0 & -(3b+4a)/(4a) & 0 \\ (3b+4a)/(4a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2/(4a^2) \\ 0 & 0 & 0 \\ -b/(4a) & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2/(4a^2) \\ 0 & -b/(4a) & 0 \end{pmatrix},$ |
| 1.3.4 | $\begin{pmatrix} 0 & (-3b+4a)/(4a) & 0 \\ (3b-4a)/(4a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2/(4a^2) \\ 0 & 0 & 0 \\ -b/(4a) & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2/(4a^2) \\ 0 & -b/(4a) & 0 \end{pmatrix},$ |
| 1.3.5 | $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ |
| 1.3.6 | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ |
| 1.3.7 | $\begin{pmatrix} 0 & -3\varepsilon a/4 & 0 \\ 3\varepsilon a/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon a/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2/4 \\ 0 & -\varepsilon a/4 & 0 \end{pmatrix},$ |
| 3.5.1 | нулевой / zero |
| 3.5.2 | $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$ |
| 3.5.3 | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$ |

*Алгебра Ли группы голономии* инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, где $V$ — подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x,y]) | x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$.

Прямыми вычислениями получаем, что алгебра голономии имеет вид, представленный в табл. 5. Тогда тензор Риччи $\mathrm{Ric}(x,y) = \mathrm{tr}\{z \to R(z,x)y\}$ примет вид

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} p_{23}p_{32}+p_{13}p_{31}-1-r_{12}-p_{31}r_{11}+p_{32}r_{12}+r_{33}p_{31} & p_{13}p_{32}-p_{23}p_{31}+r_{11}-p_{31}r_{12}-p_{32}r_{11}+r_{33}p_{32} & 0 \\ -p_{13}p_{32}+p_{23}p_{31}-r_{11}+p_{32}r_{11}+p_{31}r_{12}-r_{33}p_{32} & p_{23}p_{32}+p_{13}p_{31}-1-r_{12}-p_{31}r_{11}+p_{32}r_{12}+r_{33}p_{31} & 0 \\ 0 & 0 & H \end{pmatrix},$$

где $H = 2p_{13}r_{33}-2r_{11}p_{13}-2r_{12}p_{23}$. Следовательно, при $p_{13} = 0$, $p_{23} = -b/(2a)$, $p_{31} = 0$, $p_{32} = 1/2$, $r_{11} = 0$, $r_{12} = b/(2a)$, $r_{33} = 0$ (для связности Леви – Чевита) тензор Риччи имеет вид, представленный в табл. 6, а пространство не является Риччи-плоским (так как тензор Риччи не равен нулю).

*Таблица 5 / Table 5*

Алгебры голономии / Holonomy algebras

| Пара Pair | Алгебра голономии Holonomy algebra | Пара Pair | Алгебра голономии Holonomy algebra |
|---|---|---|---|
| 1.3.1 | нулевая / zero | 3.5.1 | нулевая / zero |
| 1.3.3 | $\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -(b/a)p_2 \\ p_1 & 0 & -(b/a)p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$ | 1.3.4 | $\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -(b/a)p_2 \\ p_1 & 0 & -(b/a)p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 1.3.5 | $\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | 1.3.6 | $\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 1.3.7 | $\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -\varepsilon a p_2 \\ p_1 & 0 & -\varepsilon a p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$ | 1.3.2 | $\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -\varepsilon a p_2 \\ p_1 & 0 & -\varepsilon a p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 3.5.2 | $\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ p_1 & 0 & -p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$ | 3.5.3 | $\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ p_1 & 0 & -p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$ |

*Таблица 6 / Table 6*

Тензоры Риччи / Ricci tensors

| Пара Pair | Тензор Риччи Ricci tensor | Пара Pair | Тензор Риччи Ricci tensor |
|---|---|---|---|
| 1.3.1 | нулевой / zero | 3.5.1 | нулевой / zero |
| 1.3.3 | $\begin{pmatrix} -(b+2a)/(2a) & 0 & 0 \\ 0 & -(b+2a)/(2a) & 0 \\ 0 & 0 & b^2/(2a^2) \end{pmatrix}$ | 1.3.5 | $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 1.3.4 | $\begin{pmatrix} (-b+2a)/(2a) & 0 & 0 \\ 0 & (-b+2a)/(2a) & 0 \\ 0 & 0 & b^2/(2a^2) \end{pmatrix}$ | 1.3.6 | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 1.3.7 | $\begin{pmatrix} -\varepsilon a/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon a/2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2/2 \end{pmatrix}$ | 1.3.2 | $\begin{pmatrix} -2\varepsilon/a & 0 & 0 \\ 0 & -2\varepsilon/a & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ |
| 3.5.2 | $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ | 3.5.3 | $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ |

Для связности Леви – Чевита

$$\mathrm{Ric} - \lambda B = \begin{pmatrix} -(b+2a+2\lambda a^2)/(2a) & 0 & 0 \\ 0 & -(b+2a+2\lambda a^2)/(2a) & 0 \\ 0 & 0 & -b(-b+2\lambda a^2)/(2a^2) \end{pmatrix},$$

т. е. при $\lambda = -1/(2a)$ и $b = -a$ пространство Эйнштейново (поскольку $\mathrm{Ric} = \lambda B$).

Пространство является Риччи-параллельным, если ковариантная производная тензора Риччи равна нулю, т.е. если $b(a+b)/(2a^2) = 0$, а локально симметрическим при $\Lambda(R) = 0$, т.е. при $b(a+b)/(2a) = 0$. Скалярная кривизна

$$R = -2(-bp_{23}p_{32} - bp_{13}p_{31} + b + br_{12} + bp_{31}r_{11} - bp_{32}r_{12} - p_{31}br_{33} - ap_{13}r_{33} + p_{13}ar_{11} + p_{23}ar_{12})/(ab),$$

для связности Леви – Чевита $R = -(b+4a)/(2a^2)$. Пространство является конформно-плоским при равенстве нулю тензора Коттона, для связности Леви – Чевита получаем, что $b(a+b)/a^2 = 0$, т.е. $b = -a$.

Аналогично рассмотрим теперь, например, случай 3.5.2. Аффинная связность имеет вид [12]

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & -p_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{23} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & p_{23} & 0 \\ -p_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Связность является связностью Леви – Чевита при $2p_{23}a = 0$, тогда $p_{23} = 0$, она имеет вид, представленный в табл. 3. Тензор кривизны инвариантной аффинной связности:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p_{23}^2 - 1 & 0 \\ p_{23}^2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{23}^2 - 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{23}^2 + 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{23}^2 - 1 \\ 0 & p_{23}^2 + 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кручения — $(0, 0, -2p_{23}), (0, 2p_{23}, 0), (-2p_{23}, 0, 0)$. Для связности Леви – Чевита тензор кривизны примет вид, представленный в табл. 4, тензор кручения нулевой, а алгебра голономии имеет вид, представленный в табл. 5. Тензор Риччи —

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} -2p_{23}^2 - 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{23}^2 - 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{23}^2 - 2 \end{pmatrix},$$

т. е. пространство не является Риччи-плоским при $p_{23} = 0$ (поскольку тензор Риччи не равен нулю), тензор Риччи для связности Леви – Чевита выписан в табл. 6. Скалярная кривизна $R = 3/a(-2p_{23}^2 - 2)$. Находим $\mathrm{Ric} - \lambda B$. Очевидно, что при $\lambda = -2/a$ (и $p_{23} = 0$) пространство Эйнштейново. Также получаем, что (для связности Леви – Чевита) пространство является Риччи-параллельным, локально симметрическим и конформно-плоским (скалярная кривизна $R = -3/(2a)$).

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Прямыми вычислениями для всех римановых однородных пространств получаем, что связности Леви – Чевита имеют вид, приведенный в табл. 3, а их тензоры кривизны — вид, приведенный в табл. 4 (тензоры кручения во всех случаях нулевые).

Алгебры голономии указанных связностей приведены в табл. 5.

Тензоры Риччи $\mathrm{Ric}(x, y) = \mathrm{tr}\{z \to R(z, x)y\}$ указанных связностей приведены в табл. 6, скалярные кривизны $R$ — в табл. 2. □

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, для всех трехмерных римановых однородных пространств определено, при каких условиях пространство является Риччи-плоским, Эйнштейновым, Риччи-параллельным, локально-симметрическим или конформно-плоским. Кроме этого, для всех указанных пространств выписаны в явном виде связности Леви – Чевита, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, скалярные кривизны, тензоры Риччи. Полученные результаты могут найти приложения в математике и физике, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях сводятся к изучению инвариантных объектов на однородных пространствах.

*Окончание следует.*

### Библиографический список

1. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна : в 2 т. М. : Мир, 1990. Т. 1, 318 с. ; Т. 2, 384 с.
2. *Wang M.* Einstein metrics from symmetry and Bundle Constructions // Surveys in Differential Geometry. VI : Essays on Einstein Manifolds. Boston, MA : International Press, 1999. P. 287–325.
3. *Решетняк Ю. Г.* Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны // Сиб. матем. журн. 1960. Т. 1, № 1. С. 88–116 ; Т. 1, № 2. С. 248–276.
4. *Gray A.* Einstein-like manifolds which are not Einstein // Geom. Dedicata. 1978. Vol. 7, iss. 3. P. 259–280. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00151525
5. *Алексеевский Д. В., Кимельфельд Б. Н.* Классификация однородных конформно плоских римановых многообразий // Матем. заметки. 1978. Т. 24, № 1. С. 103–110.
6. *Kowalski O., Nikcevic S.* On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds // Geom. Dedicata. 1996. Vol. 1. P. 65–72. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00240002
7. *Родионов Е. Д., Славский В. В., Чибрикова Л. Н.* Локально конформно однородные псевдоримановы пространства // Матем. тр. 2006. Т. 9, № 1. С. 130–168.
8. *Родионов Е. Д.* Односвязные компактные стандартные однородные Эйнштейновы многообразия с группой голономии SO(n) // Изв. АлтГУ. 1997. № 1 (3). С. 7–10.
9. *Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. 2006. Т. 37. Геометрия. С. 1–78.
10. *Онищик А. Л.* Топология транзитивных групп Ли преобразований. М. : Физматлит, 1995. 384 с.
11. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry : in 2 vols. N. Y. : John Wiley and Sons, Vol. 1, 1963. 330 p. ; Vol. 2, 1969. 488 p.
12. *Можей Н. П.* Аффинные связности на трехмерных псевдоримановых однородных пространствах. I // Изв. вузов. Матем. 2013. № 12. С. 51–68.
13. *Можей Н. П.* Аффинные связности на трехмерных псевдоримановых однородных пространствах. II // Изв. вузов. Матем. 2014. № 6. С. 33–48.
14. *Можей Н. П.* Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. 394 с.
15. *Garcia A., Hehl F. W., Heinicke C., Macias A.* The Cotton tensor in Riemannian spacetimes // Classical and Quantum Gravity. 2004. Vol. 21, № 4. P. 1099–1118.

**Образец для цитирования:**

*Можей Н. П.* О геометрии трехмерных псевдоримановых однородных пространств. I // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 29–41. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-29-41

# On the Geometry of Three-dimensional Pseudo-Riemannian Homogeneous Spaces. I

**N. P. Mozhey**

Natalya P. Mozhey, https://orcid.org/0000-0001-9237-7208, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 6 P. Brovki St., Minsk 220013, Belarus, mozheynatalya@mail.ru

The problem of establishing links between the curvature and the topological structure of a manifold is one of the important problems of geometry. In general, the purpose of the research of manifolds of various types is rather complicated. Therefore, it is natural to consider this problem for a narrower class of pseudo-Riemannian manifolds, for example, for the class of homogeneous pseudo-Riemannian manifolds. The basic notions — such as an isotropically-faithful pair, a pseudo-Riemannian homogeneous space, an affine connection, curvature and torsion tensors, Levi – Cevita connection, Ricci tensor, Ricci-flat space, Einstein space, Ricci-parallel space, locally-symmetric space, conformally-flat space — are defined. In this paper, for all three-dimensional Riemannian homogeneous spaces, it is determined under what conditions the space is Ricci-flat, Einstein, Ricci-parallel, locally-symmetric or conformally-flat. In addition, Levi – Cevita connections, curvature and torsion tensors, holonomy algebras, scalar curvatures, Ricci tensors are written out in explicit form for all these spaces. The results can be applied in mathematics and physics, since many fundamental problems in these fields are reduced to the study of invariant objects on homogeneous spaces.

*Keywords:* transformation group, Riemannian manifold, Ricci tensor, Einstein space, conformally-flat space.

Received: 03.11.2018 / Accepted: 31.01.2019 / Published: 02.03.2020



*The following part is to be published.*

## References

1. Besse A. *Mnogoobraziya Eynshteyna* [Einstein Manifolds: in 2 vols]. Moscow, Mir, 1990. Vol. 1, 318 p.; vol. 2, 384 p. (in Russian).
2. Wang M. Einstein metrics from symmetry and Bundle Constructions. In: *Surveys in Differential Geometry. VI: Essays on Einstein Manifolds*. Boston, MA, International Press, 1999, pp. 287–325.
3. Reshetnyak Yu. G. Isothermal coordinates in manifolds of bounded curvature. *Sib. Matem. Zhurn.*, 1960, vol. 1, no. 1, pp. 88–116; vol. 1, no. 2, pp. 248–276 (in Russian).
4. Gray A. Einstein-like manifolds which are not Einstein. *Geom. Dedicata*, 1978, vol. 7, iss. 3, pp. 259–280. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00151525
5. Alekseevsky D. V., Kimelfeld B. N. Classification of homogeneous conformally flat Riemannian manifolds. *Math. Notes*, 1978, vol. 24, no. 1, pp. 559–562
6. Kowalski O., Nikcevic S. On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds. *Geom. Dedicata*, 1996, vol. 62, pp. 65–72. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00240002
7. Rodionov E. D., Slavsky V. V., Chibrikova L. N. Locally conformally homogeneous pseudo-Riemannian spaces. *Sib. Adv. Math.*, 2007, vol. 17, pp. 186–212. DOI: https://doi.org/10.3103/S1055134407030030
8. Rodionov E. D. Compact simply connected standard homogeneous Einstein manifolds with holonomy group $SO(n)$. *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta* [Izvestiya of Altai State University], 1997, no. 1 (3), pp. 7–10 (in Russian).

9. Nikonorov Yu. G., Rodionov E. D., Slavsky V. V. Geometry of homogeneous Riemannian manifolds. *J. Math. Sci.*, 2007, vol. 146, pp. 6313–6390. DOI: https://doi.org.10.1007/s10958-007-0472-z
10. Onishchik A. L. *Topologiya tranzitivnykh grupp Li preobrazovaniy* [Topology of transitive transformation groups]. Moscow, Fizmatlit, 1995. 384 p. (in Russian).
11. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of differential geometry*: in 2 vols. New York, John Wiley and Sons, vol. 1, 1963. 330 p.; vol. 2, 1969. 448 p.
12. Mozhey N. P. Affine connections on three-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces. I. *Russ. Math.*, 2013, vol. 57, iss. 12, pp. 44–62. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X13120050
13. Mozhei N. P. Affine connections on three-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces. II. *Russ. Math.*, 2014, vol. 58, iss. 6, pp. 28–43. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X14060048
14. Mozhey N. P. *Trekhmernye izotropno-tochnye odnorodnye prostranstva i sviaznosti na nikh* [Three-dimensional isotropy-faithful homogeneous spaces and connections on them]. Kazan, KFU Publishing House, 2015. 394 p. (in Russian).
15. Garcia A., Hehl F. W., Heinicke C., Macias A. The Cotton tensor in Riemannian spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 2004, vol. 21, no. 4, pp. 1099–1118.


**Cite this article as:**

Mozhey N. P. On the Geometry of Three-dimensional Pseudo-Riemannian Homogeneous Spaces. I. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 29–41 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-29-41