Н. П. МОЖЕЙ
УО БГУИР (г. Минск, Республика Беларусь)

ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С ЭКВИАФФИННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

Трехмерные однородные пространства описывались в работе [1], в ней также рассматривался случай аффинных связностей. В данной работе изучаются эквиаффинные (локально эквиаффинные) связности на таких пространствах, находятся также тензоры кручения и тензоры Риччи.

Аффинная связность является эквиаффинной, если допускает параллельную форму объема (см. [2]). Для трехмерных однородных пространств определим, при каких условиях связность является эквиаффинной (локально эквиаффинной), также выпишем в явном виде сами связности, их тензоры кручения и тензоры Риччи.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G=\bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G}, G)$ (см., например, [3]). Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m}=\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, инвариантные аффинные связности на $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии со связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [4]. *Тензор кручения* $T \in InvT^1_2(\mathfrak{m})$ и *тензор кривизны* $R \in InvT^1_3(\mathfrak{m})$ имеют вид: $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x,y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x,y])$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Будем говорить, что Λ имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если $T=0$. В этом случае имеет место первое тождество Бьянки:

$$R(x,y)z + R(y,z)x + R(z,x)y = 0 \qquad \forall x,y,z \in \mathfrak{m}.$$

Определим тензор Риччи $Ric \in Inv\mathrm{T}_2(\mathfrak{m})$:

$$Ric(y,z) = \mathrm{tr}\{x \quad R(x,y)z\}.$$

Будем говорить, что аффинная связность Λ является *локально эквиаффинной*, если $\mathrm{tr}\Lambda([x,y])=0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ (то есть $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}]) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$).

Аффинная связность Λ с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиаффинна. Действительно, по определению,

$$Ric(y,z) - Ric(z,y) = \mathrm{tr}\{x \quad R(x,y)z - R(x,z)y\}.$$

С учетом первого тождества Бьянки получаем

$$Ric(y,z)-Ric(z,y)=\mathrm{tr}\{x \quad -R(y,z)x\}=-\mathrm{tr}R(y,z).$$

Поскольку $\mathrm{tr}(AB-BA)=0$, имеем

$$Ric(y,z)-Ric(z,y)=-\mathrm{tr}(\Lambda(y)\Lambda(z)-\Lambda(z)\Lambda(y))+\mathrm{tr}\Lambda([y,z])=\mathrm{tr}\Lambda([y,z]).$$

Следовательно, тензор Ric симметрический тогда и только тогда, когда $\mathrm{tr}\Lambda([y,z])=0$ для всех $y,z\in\bar{\mathfrak{g}}$.

Под *эквиаффинной* связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\mathrm{tr}\Lambda(x)=0$ для всех $x\in\bar{\mathfrak{g}}$. В этом случае очевидно, что $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}})\subset\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Определено, при каких условиях связность является эквиаффинной (локально эквиаффинной); найдены в явном виде сами связности, тензоры кручения и тензоры Риччи. Полученные результаты могут найти приложения в общей теории относительности (которая, с математической точки зрения, базируется на геометрии искривленных пространств), в ядерной физике и физике элементарных частиц (поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах), а также при конструировании математических моделей реальных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Можей, Н. П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них / Н. П. Можей. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 394 с.
2. Nomizu, K. Affine differential geometry / K. Nomizu, T. Sasaki. – Cambridge Univ. Press, 1994. – 263 p.
3. Онищик, А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. – М. : Физ.-мат. лит., 1995. – 384 с.
4. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 2.