КРИВЫЕ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ГРАФИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Мацкевич А.В.
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь
Зеленовская Н.В. – ст. преподаватель

Настоящий доклад преследует цель помочь студентам систематизировать и укрепить свои знания в области представления кривых и поверхностей и дать возможность провести небольшую аналогию математических и графических методов.

Кривые второго порядка используются при решении задач по аналитической геометрии, кривые других порядков используются при решении задач математического анализа в разделе вычисления кратных, криволинейных и поверхностных интегралов. Знакомство студентов с кривыми происходит в первом семестре при изучении раздела высшей математики” Аналитическая геометрия“. В НГИГ (начертательная геометрия и инженерная графика) этот материал представлен коротко из-за ограниченного времени на изучение курса.

Кривые линии позволяют создавать наглядные модели многих процессов и проследить их течение во времени, позволяют установить функциональную зависимость между различными величинами. С их помощью можно решить многие научные и инженерные задачи.

Кривые линии могут быть заданы различными способами: аналитическим – кривая задана математическим уравнением; графическим – кривая задана визуально на носителе графической информации; табличным – кривая задана координатами последовательного ряда точек.

Графически кривая линия определяется множеством последовательных положений точки, непрерывно движущейся в пространстве по определенному закону.

Линия второго порядка на плоскости определяется алгебраическим уравнением второй степени относительно переменных x и y: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Dy + F = 0$, где хотя бы один из коэффициентов A, B, C не равен нулю. Это может быть окружность, эллипс, гипербола, парабола и их вырождения. В аналитической геометрии всякая кривая определяется как геометрическое место точек. Рассмотрим кривые второго порядка на примере эллипса.

Эллипс - это замкнутая плоская кривая линия, у которой сумма расстояний от любой точки этой кривой до двух ее фокусов (F1 и F2), расположенных на большой оси, есть величина постоянная, равная большой оси эллипса. Например, сумма расстояний от точки M до двух фокусов F1 и F2 равна величине большой оси эллипса AB (2a), то есть F1M + F2M = AB = 2a. Это соотношение представлено на рисунке 1.

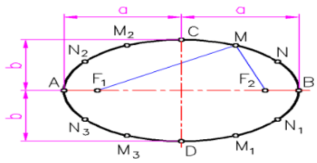

Рисунок 1 –- Эллипс

Если фокусы F1 и F2 совпадают, то F1M = F2M = a. Получаем множество точек, равноудаленных от одной данной точки, то есть окружность (частный вид эллипса).

Уравнение (1) называется каноническим уравнением эллипса, где a - большая полуось, b - малая полуось эллипса.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Каноническое уравнение эллипса может быть параметризовано. Параметром называется переменная величина t, определяющая положение точки на некоторой кривой l. Параметрические уравнения эллипса имеют следующий вид (2):

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad (2)$$

Меняя параметр t от 0 до 2π, получим все точки этого эллипса. В частности, при a = b, имеем параметрические уравнения окружности: $x = a\cos t,\ y = a\sin t$. Чтобы перейти к заданию уравнения эллипса в декартовых координатах, исключим параметр t. Для этого выразим

$$\cos t = \frac{x}{a},\ \sin t = \frac{y}{b}. \qquad (3)$$

Возведем в квадрат получившиеся оба равенства и сложим их. Получим то же уравнение (1).

Графически эллипс можно представить как сечение плоскостью всех образующих конуса в точках одной его полости, если секущая плоскость не перпендикулярна оси конуса (если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса – получаем окружность). Это показано на рисунке 2:

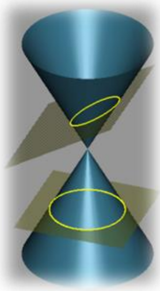

Рисунок 2 – Эллипс как кривая конического сечения

В инженерной практике поверхности обычно задаются уравнением, т.е. аналитически, или чертежом – графически. При аналитическом способе задания поверхность рассматривается как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению. При графическом задании поверхности чаще всего исходят из кинематического способа образования ее, сущность которого заключается в том, что поверхность образуется непрерывным перемещением линии (образующей), движущейся в пространстве по определенному закону (направляющей). Образующей может быть как прямая, так и любая кривая линия, причем она может быть постоянной или менять свою форму в процессе перемещения. В зависимости от формы образующей и закона ее перемещения в пространстве поверхности имеют широкую классификацию: поверхности вращения, линейчатые и винтовые поверхности, а также циклические, топографические или каркасные поверхности.

Для примера в докладе рассмотрим линейчатую поверхность однополостный гиперболоид. Математически однополостный гиперболоид имеет следующее уравнение (4):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (4)$$

Графически поверхность формируется движением прямой линии (образующей) d, которая в каждый момент перемещения пересекает три предварительно заданные скрещивающиеся прямые (направляющие) – a, b и c (Рисунок 3).

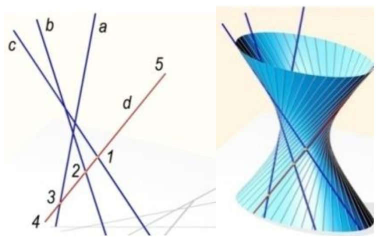

Рисунок 3 – Кинематический «механизм» образования однополостного гиперболоида

К графическому представлению поверхностей часто прибегают при конструировании сложных технических форм. Аналитический прием иногда приводит к использованию слишком громоздкого математического аппарата. И тогда на помощь приходят компьютерные 3D методы моделирования сложных поверхностей. Эти методы позволяют в значительной мере “переложить” решение на математическое и программное обеспечение графического пакета САПР. Компьютерные 3D методы, особенно 3D параметризация, позволяют достаточно просто исследовать геометрические закономерности задач. Этим они создают возможности для реализации исследовательских интересов студентов.

Список использованных источников:

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. Учебник для ВУЗов. — Москва: Физматлит, 2007. — 223 с.

2. Хейфец А.Л. 3D-модели линейчатых поверхностей с тремя прямолинейными направляющими / А.Л. Хейфец, А.Н. Логиновский // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия “Строительство и архитектура”. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ. – 2008. – Вып. 7. №25(125), с. 51-55