Ю. В. Сильванович

КРИВАЯ 4-ГО ПОРЯДКА ЛЕМНИСКАТА БЕРНУЛЛИ

В работе рассмотрена замечательная кривая 4-го порядка лемниската Бернулли, приведены собственные свойства кривой.

Введение

Лемниската Бернулли не утратила своего значения, так как применяется в технике, в частности, в качестве переходной кривой на закруглениях малого радиуса, как это имеет место на железнодорожных линиях в горной местности и на трамвайных путях. В связи с этим, необходимо знать длину и область площади, ограниченной данной кривой. Для решения этой задачи необходимо вывести уравнения кривой; вычислить длину кривой; вычислить область площади, ограниченной кривой;вывести уравнения касательной к кривой;вывести формулы кривизны кривой;изобразить кривую на плоскости.Целью работы является исследование лемнискаты Бернулли.

I. Определение кривой

Лемниската Бернулли – плоская алгебраическая кривая 4-го порядка. Определяется как геометрическое место точек, произведение расстояний от которых до двух заданных точек (фокусов) постоянно и равно квадрату половины расстояния между фокусами[1].

Лемниската по форме напоминает восьмёрку или символ бесконечности. (см.рис.1.)

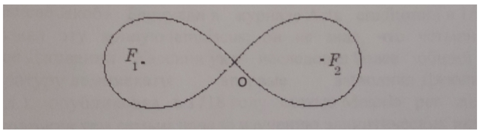

Рис. 1 – Лемниската Бернулли,где F_1 и F_2 – Фокусы,O–узловая(двойная) точка.

Точка, в которой лемниската пересекает саму себя, называется узловой или двойной точкой.

II. Собственные свойства кривой

1. Кривая является геометрическим местом точек, симметричных центру равносторонней гиперболы относительно её касательных;
2. Отрезок биссектрисы угла между фокальными радиусами-векторами точки лемнискаты равен отрезку от центра лемнискаты до пересечения её оси с этой биссектрисой;
3. Материальная точка, движущаяся по лемнискате под действием однородного гравитационного поля, пробегает дугу за то же время, что и соответствующую хорду;
4. Площадь полярного сектора $\phi \in [0, a]$, при $0 \le a \le \frac{\pi}{4}$:

$$S(a) = \frac{c^2}{2}\sin 2a \tag{1}$$

   В частности, площадь каждой петли $2S(\frac{\pi}{4})$ =c^2,то есть площадь, ограниченная кривой,равна площади квадрата со стороной $c\sqrt{2}$;

5. Перпендикуляр,опущенный из фокуса лемнискаты на радиус-вектор какой-либо её точки, делит площадь соответствующего сектора пополам;
6. Длина дуги лемнискаты между точками $\phi_1 = 0$ и $\phi_2 = \phi$ выражается эллиптическим интегралом I рода:

$$L(\phi) = c\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-2\sin^2\phi}} = \frac{c}{\sqrt{2}}F(\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}), \tag{2}$$

   где $2\sin^2\phi = \sin^2\theta$

   В частности, длина всей лемнискаты

$$4L(\frac{\pi}{4}) = 2c\sqrt{2}K(\frac{1}{\sqrt{2}}) \approx 5,9c \qquad (3).$$

Заключение

В ходе работы была описана теория лемнискаты Бернулли: вычислена длина кривой; вычислена площадь области, ограниченной данной кривой; выведены уравнения кривой; описаны собственные свойства кривой.

Список литературы

1. Савелов А. А. Плоские кривые. – М.,1960. – 293 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М., 1969, т.1. -607 с.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М., 1969, т.2. -800 с.

Сильванович Юлия Васильевна, студентка 2 курса инженерно-экономического факультета БГУИР, uliasilvanovic440@gmail.com.

Научный руководитель: Баженова Ирина Владимировна, старший преподаватель кафедры вычислительных методов и программирования БГУИР, канд. физ.-мат. наук, доцент, liv@bsuir.by.