УДК 539.12

В. В. КИСЕЛЬ[1], В. А. ПЛЕТЮХОВ[2], В. М. РЕДЬКОВ[3]
[1]Минск, БГУИР
[2]Брест, БрГУ
[3]Минск, ИФ НАН Беларуси

ФЕРМИОН С ТРЕМЯ МАССОВЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ, P-НЕИНВАРИАНТНАЯ МОДЕЛЬ

Для построения P-неинвариантного уравнения для фермиона со спином 1/2 и с тремя массовыми параметрами будем исходить из формализма Гельфанда–Яглома. Модель строится на основе 20-компонентной волновой функции, эквивалентной следующему набору зацепляющихся неприводимых представлений группы Лоренца (используем обозначения из [1; 2]):

$$T = (0,\frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2},0) \oplus (0,\frac{1}{2})' \oplus (\frac{1}{2},0)' \oplus (1,\frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2},1), \qquad (1)$$

или (нумеруем отдельные представления цифрами от 1 до 6)

$$T = 1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 4 \oplus 5 \oplus 6,$$

$$1 = (0,\frac{1}{2}),\ 2 = (\frac{1}{2},0),\ 3 = (0,\frac{1}{2})',\ 4 = (\frac{1}{2},0)',\ 6 = (1,\frac{1}{2}),\ 5 = (\frac{1}{2},1). \qquad (2)$$

Базисные вектора пространства определим в виде (см. детали формализма в [1; 2])

$$(\varepsilon^1_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}, \varepsilon^1_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}, \varepsilon^2_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}, \varepsilon^2_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}),\quad (\varepsilon^3_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}, \varepsilon^3_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}, \varepsilon^4_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}, \varepsilon^4_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}),\quad (\varepsilon^5_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}, \varepsilon^5_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}, \varepsilon^6_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}, \varepsilon^6_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}),$$
$$(\varepsilon^5_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}, \varepsilon^5_{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}}, \varepsilon^6_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}, \varepsilon^6_{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}}),\quad (\varepsilon^5_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}, \varepsilon^5_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}, \varepsilon^6_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}, \varepsilon^6_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}).$$

Матрица Γ_4 строящегося уравнения 1-го порядка при этом представима в виде

$$\Gamma_4 = \begin{vmatrix} C_4^{(1/2)} & 0 \\ 0 & C_4^{(3/2)} \end{vmatrix}, \qquad (3)$$

где блоки $C_4^{(1/2)}$ и $C_4^{(3/2)}$ имеют размерности 12×12 и 8×8 соответственно. Накладываем требования к модели: релятивистская инвариантность, лагранжева формулировка, единственность спина $S = 1/2$, существование трех массовых параметров, P-неинвариантность (причем P-инвариантная часть исключается полностью), для ненулевого спинового блока находим представление

$$C^{(1/2)}=-i\begin{vmatrix} c_{12}^{(1/2)} & 0 & c_{16}^{(1/2)} \\ 0 & c_{34}^{(1/2)} & c_{36}^{(1/2)} \\ c_{52}^{(1/2)} & c_{54}^{(1/2)} & 0 \end{vmatrix}\otimes(i\gamma_5\gamma_4)=\begin{vmatrix} b_1 & 0 & b_2 \\ 0 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & 0 \end{vmatrix}\otimes(i\gamma_5\gamma_4). \qquad (4)$$

Явный вид характеристического уравнения для блока $C^{(1/2)}$ следующий (его корни определяют три массовых параметра фермиона):

$$\lambda^3-\lambda^2(b_1+b_3)+\lambda(b_1b_3-b_2b_5-b_4b_6)-(b_2b_3b_5+b_1b_4b_6)=0, \qquad (5)$$

при этом выполняются следующие ограничения для корней:

$$b_2b_3b_5+b_1b_4b_6=-\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \quad b_1+b_3=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,$$
$$b_1b_3-b_2b_5-b_4b_6=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3. \qquad (6)$$

После необходимых вычислений полную систему уравнений можно представит в вектор-биспинорной форме (вначале рассматриваем свободную частицу):

$$i\gamma_5\{b_1\hat{\partial}(\gamma_\mu\psi_\mu)-\frac{4b_2}{\sqrt{6}}[(\partial_\mu\psi_\mu)-\frac{1}{4}\hat{\partial}(\gamma_\mu\psi_\mu)]\}+M(\gamma_\mu\psi_\mu)=0,$$

$$i\gamma_5\{b_3\hat{\partial}\psi_0-i\frac{4b_4}{\sqrt{6}}[(\partial_\mu\psi_\mu)-\frac{1}{4}\hat{\partial}(\gamma_\mu\psi_\mu)]\}+M\psi_0=0, \qquad (7)$$

$$\frac{2i}{\sqrt{6}}\gamma_5\{b_5[\partial_\lambda(\gamma_\mu\psi_\mu)-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat{\partial}(\gamma_\mu\psi_\mu)]-ib_6[\partial_\lambda\psi_0-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat{\partial}\psi_0)]\}+$$
$$+M[\psi_\lambda-\frac{1}{4}\gamma_\lambda(\gamma_\mu\psi_\mu)]=0.$$

После необходимых вычислений эта система уравнений приводится к другому (но эквивалентному) виду:

$$\begin{vmatrix} \frac{b_1b_3(b_1+b_2/\sqrt{6})-(1/\sqrt{6})gb_2|b_4|^2+fb_3|b_2|^2}{b_3(b_1+b_2/\sqrt{6})} & -ig\frac{b_2b_4^*}{b_3} & -\frac{i}{M}\frac{4}{\sqrt{6}}\frac{b_2(gb_1|b_4|^2+fb_3|b_2|^2)}{b_3(b_1+b_2/\sqrt{6})} \\ -\frac{i}{\sqrt{6}}\frac{b_4(g|b_4|^2-\sqrt{6}fb_2^*b_3)}{b_3(b_1+b_2/\sqrt{6})} & \frac{b_3^2+g|b_4|^2}{b_3} & +\frac{1}{M}\frac{4}{\sqrt{6}}\frac{b_4(gb_1|b_4|^2+fb_3|b_2|^2)}{b_3(b_1+b_2/\sqrt{6})} \\ \frac{iM}{4}\frac{g|b_4|^2-\sqrt{6}fb_2^*b3+b_3(b_1+b_2/\sqrt{6})}{b_3(b_1+b_2/\sqrt{6})} & -M\frac{\sqrt{6}}{4}\frac{gb_4^*}{b_3} & \frac{b_4(gb_1|b_4|^2+fb_3|b_2|^2)}{b_3(b_1+b_2/\sqrt{6})} \end{vmatrix}\times$$

$$\times i\gamma_5\hat{\partial}\begin{vmatrix} \gamma_\mu\psi_\mu \\ \psi_0 \\ \gamma_5\partial_\mu\psi_\mu \end{vmatrix}+M\begin{vmatrix} \gamma_\mu\psi_\mu \\ \psi_0 \\ \gamma_5\partial_\mu\psi_\mu \end{vmatrix}=0, \qquad (8)$$

или кратко (выделена 3×3-матрица K)

$$(K\, i\gamma_5 \hat{\partial} + M)\Psi = 0, \quad \Psi = \begin{vmatrix} \gamma_\mu \psi_\mu \\ \psi_0 \\ \gamma_5 \partial_\mu \psi_\mu \end{vmatrix}, \quad K = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & R_1 \\ A_2 & B_2 & R_2 \\ A_3 & B_3 & R_3 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Находится линейное преобразование $\Psi' = S\Psi$, которое диагонализирует матрицу K:

$$S(K\, i\gamma_5 \hat{\partial} + M)S^{-1}\Psi' = 0,$$

$$S = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}, \quad STS^{-1} = T_0 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Характеристическое уравнение для матрицы K: $\det(K - \lambda I) = 0$ приводится к кубическому уравнению, совпадающему с уравнением (5).

В результате этого преобразования система уравнений приводится к виду трех раздельных P-неинвариантных раздельных уравнений для трех новых биспиноров Φ_i:

$$\left(i\gamma_5 \hat{\partial} - \frac{M}{\lambda_1}\right)\Phi_1 = 0, \quad \left(i\gamma_5 \hat{\partial} - \frac{M}{\lambda_2}\right)\Phi_2 = 0, \quad \left(i\gamma_5 \hat{\partial} - \frac{M}{\lambda_3}\right)\Phi_3 = 0, \tag{11}$$

определяемых линейными комбинациями

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= a_1(\gamma_\mu \psi_\mu) + a_2 \psi_0 + a_3(\gamma_5 \partial_\mu \psi_\mu), \\ \Phi_2 &= c_1(\gamma_\mu \psi_\mu) + c_2 \psi_0 + c_3(\gamma_5 \partial_\mu \psi_\mu), \\ \Phi_3 &= r_1(\gamma_\mu \psi_\mu) + r_2 \psi_0 + r_3(\gamma_5 \partial_\mu \psi_\mu). \end{aligned} \tag{12}$$

Следующий шаг – это учет внешних электромагнитных полей. Удлиняя стандартным способом производную $\partial_\mu \Rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$, вместо (7) получаем систему уравнений

$$\begin{gathered} \{b_1 \hat{\partial}(\gamma_\mu \psi_\mu) - \frac{4b_2}{\sqrt{6}}[(\partial_\mu \psi_\mu) - \frac{1}{4}\hat{\partial}(\gamma_\mu \psi_\mu)]\} - i\gamma_5 M(\gamma_\mu \psi_\mu) = 0, \\ \{b_3 \hat{\partial}\psi_0 - i\frac{4b_4}{\sqrt{6}}[(\partial_\mu \psi_\mu) - \frac{1}{4}\hat{\partial}(\gamma_\mu \psi_\mu)]\} - i\gamma_5 M\psi_0 = 0, \\ \frac{2}{\sqrt{6}}\{b_5[\partial_\lambda(\gamma_\mu \psi_\mu) - \frac{1}{4}\gamma_\lambda \hat{\partial}(\gamma_\mu \psi_\mu)] - ib_6[\partial_\lambda \psi_0 - \frac{1}{4}\gamma_\lambda \hat{\partial}\psi_0)]\} - \\ -i\gamma_5 M[\psi_\lambda - \frac{1}{4}\gamma_\lambda(\gamma_\mu \psi_\mu)] = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Проводя вычисления, аналогичные выполненным в свободном случае (с учетом некоммутируемости двух операторов дифференцирования

D_μ, $D_\nu = ieF_{\mu\nu}$), вместо (11) получаем систему уравнений, сцепляющую все три биспинора Φ_i:

$$\lambda_1 i\gamma^5 \widehat{D}\Phi_1 + M\Phi_1 + eF_{[\lambda\rho]}(\gamma_\lambda\gamma_\rho - \gamma_\rho\gamma_\lambda)\times$$
$$\times\left\{\left(-ia_1\frac{f\,|b_2|^2}{3M} + a_2 f\frac{b_2^* b_4}{3M} - a_3 f\frac{b_2^*}{2\sqrt{6}}\right)(\gamma_\mu\psi_\mu) +\right.$$
$$\left.+\left(-a_1\frac{g b_2 b_4^*}{3M} - a_2 ig\frac{|b_4|^2}{3M} + a_3 ig\frac{b_4^*}{2\sqrt{6}}\right)\right\}\psi_0 = 0,$$

$$\lambda_2 i\gamma^5 \widehat{D}\Phi_2 + M\Phi_2 + eF_{[\lambda\rho]}(\gamma_\lambda\gamma_\rho - \gamma_\rho\gamma_\lambda)\times$$
$$\times\left\{\left(-ic_1\frac{f\,|b_2|^2}{3M} + c_2 f\frac{b_2^* b_4}{3M} - c_3 f\frac{b_2^*}{2\sqrt{6}}\right)(\gamma_\mu\psi_\mu) +\right.$$
$$\left.+\left(-c_1\frac{g b_2 b_4^*}{3M} - c_2 ig\frac{|b_4|^2}{3M} + c_3 ig\frac{b_4^*}{2\sqrt{6}}\right)\psi_0\right\} = 0,$$

$$\lambda_3 i\gamma^5 \widehat{D}\Phi_3 + M\Phi_3 + eF_{[\lambda\rho]}(\gamma_\lambda\gamma_\rho - \gamma_\rho\gamma_\lambda)\times$$
$$\times\left\{\left(-ir_1\frac{f\,|b_2|^2}{3M} + r_2 f\frac{b_2^* b_4}{3M} - r_3 f\frac{b_2^*}{2\sqrt{6}}\right)(\gamma_\mu\psi_\mu) +\right.$$
$$\left.+\left(-r_1\frac{g b_2 b_4^*}{3M} - r_2 ig\frac{|b_4|^2}{3M} + r_3 ig\frac{b_4^*}{2\sqrt{6}}\right)\psi_0\right\} = 0,$$

входящие в систему уравнений биспиноры Φ_i связаны с исходными биспинорами линейными соотношениями

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= a_1(\gamma_\mu\psi_\mu) + a_2\psi_0 + a_3(\gamma_5 D_\mu\psi_\mu),\\
\Phi_2 &= c_1(\gamma_\mu\psi_\mu) + c_2\psi_0 + c_3(\gamma_5 D_\mu\psi_\mu),\\
\Phi_3 &= r_1(\gamma_\mu\psi_\mu) + r_2\psi_0 + r_3(\gamma_5 D_\mu\psi_\mu).
\end{aligned} \tag{14}$$

По-видимому, следующим шагом должно быть построение модели, в которой присутствовали бы одновременно P-инвариантная и P-неинвариантная составляющие.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 328 с.

2. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields / V. V. Kisel [et al.]. – New York : Nova Science Publishers Inc., 2018. – Vol. I : General Theory. – 404 p. ; Vol. II : Physical Problems. – 402 p.