

## ПОВЫШЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ В COMSOL MULTIPHYSICS

Таратута А.Г.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
г. Минск, Республика Беларусь

Алексеев В.Ф. – канд.техн.наук, доцент

Выполнение расчета задач гидродинамики зачастую занимает довольно много времени по причине сложностей, возникающих при поиске численного решения. Эти сложности обусловлены нелинейностью уравнений, описывающих турбулентные потоки. Сократить время расчета можно, используя методы повышения устойчивости задач.

Математической основой гидродинамических расчетов являются уравнения Навье-Стокса, а именно уравнение неразрывности (сохранения массы)

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (1)$$

и уравнение движения (сохранения импульса)

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \vec{F}, \quad (2)$$

которое представляет собой конвективно-диффузионное уравнение переноса импульса [1]. Наличие конвективного слагаемого приводит к нелинейности этого уравнения, а также к потере устойчивости его решения методом Галёркина, который лежит в основе метода конечных элементов, если значение сеточного числа Пекле оказывается больше 1. Число Пекле представляет собой отношение конвективного и диффузионных потоков импульса и определяется как произведение скорости  $u$  на размер элемента сетки  $L$ , поделенное на обобщенный коэффициент диффузии  $D$  [2]:

$$Pe = \frac{uL}{D}. \quad (3)$$

Для гидродинамических задач этим коэффициентом является коэффициент кинематической вязкости. Таким образом для достижения устойчивости системы необходимо, чтобы число Пекле было меньше 1. Уменьшить значение можно используя очень мелкую сетку, однако во многих случаях этот подход нереализуем, поскольку решение даже простых задач потребует огромного объёма памяти и значительных вычислительных ресурсов. На практике для повышения устойчивости и сходимости используются различные методы, связанные с искусственной вязкостью.

Во-первых, это встроенный физический интерфейс *COMSOL Stabilization*, который задаёт некоторый искусственный коэффициент диффузии. Ещё один способ – это использование метода установления (*Pseudo time stepping*) (рисунок 1).

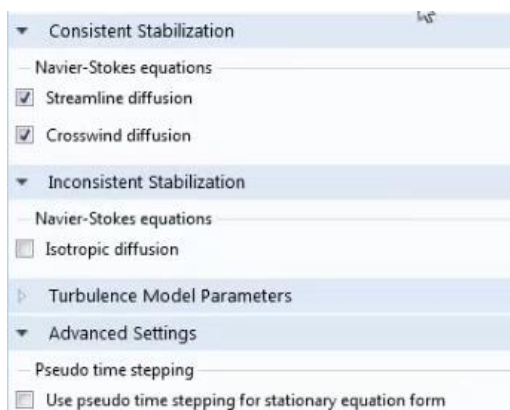


Рисунок 1 – Встроенные методы повышения устойчивости в *COMSOL Multiphysics*

В разделе *Consistent Stabilization* перечислены методы повышения устойчивости решения, которые не приводят к дополнительной погрешности результатов. Здесь вводятся дополнительные коэффициенты вязкости (вдоль и поперёк потока), но эта дополнительная вязкость уменьшается по мере приближения к точному решению, что исключает дополнительную погрешность.

В свою очередь, метод, расположенный в разделе *Inconsistent Stabilization*, добавляет искусственную вязкость по всем направлениям, что приводит к дополнительной погрешности, поскольку мы решаем уже несколько другую задачу. Полученные результаты при данном методе нельзя считать точными, а могут использоваться только как начальные приближения для дальнейших вычислений.

Но как получить точные значения? Для этого необходимо решить задачу, исходными значениями которой будут значения, полученные с использованием метода *раздела Inconsistent Stabilization*, однако сам метод при решении отключается. При этом улучшается сходимость, уменьшается количество итераций решения и соответственно затраченное время. Таким образом, в два этапа мы получаем точное решение, поскольку отключение вязкости по всем направлениям устраняет дополнительные погрешности.

При решении задач гидродинамики использование методов стабилизации *Consistent Stabilization* всегда необходимо. Отказ может быть только в случае использования очень мелкой сетки и второго порядка для дискретизации исходных дифференциальных уравнений, что нецелесообразно из-за высоких вычислительных затрат.

Раздел *Advanced Settings* использует параметр *Use pseudo time stepping for stationary equation form* (использование метода установления для стационарных уравнений). Метод позволяет получить хорошо сходимое решение без дополнительных манипуляций с задачей, но, как правило, с большими затратами времени (в разы).

Ещё один способ получить решение без использования *Pseudo time stepping* – это искусственное завышение вязкости, которое можно реализовать с помощью вспомогательного параметрического коэффициента. В этом случае вязкость среды будет определяться как произведение реального значения вязкости на введённый коэффициент. Например, примем три его значения: 100, 10, 1. Расчёт будет происходить для трёх последовательно изменяющихся значений вязкости: в 100 раз больше, в 10 и равной действительной вязкости, при этом для каждого последующего значения параметра в качестве начального приближения будет использоваться решение, полученное для предыдущего. По итогу получим хорошо сходимое решение для реального значения вязкости.

Для сравнения трёх описанных методов построим линейный график распределения скорости потока в выходном сечении рассматриваемого устройства на рисунке 2. На графике сплошной линией показаны значения скорости при использовании *Inconsistent Stabilization*, зелеными «\*» – при *Pseudo time stepping* и красными «o» – значения, полученные методом искусственного параметрического завышения вязкости. Решения с достаточно высокой точностью совпадают. У каждого способа есть достоинства и недостатки: какие-то позволяют получить сходимость быстрее, какие-то медленнее за различное количество итераций с различной точностью.

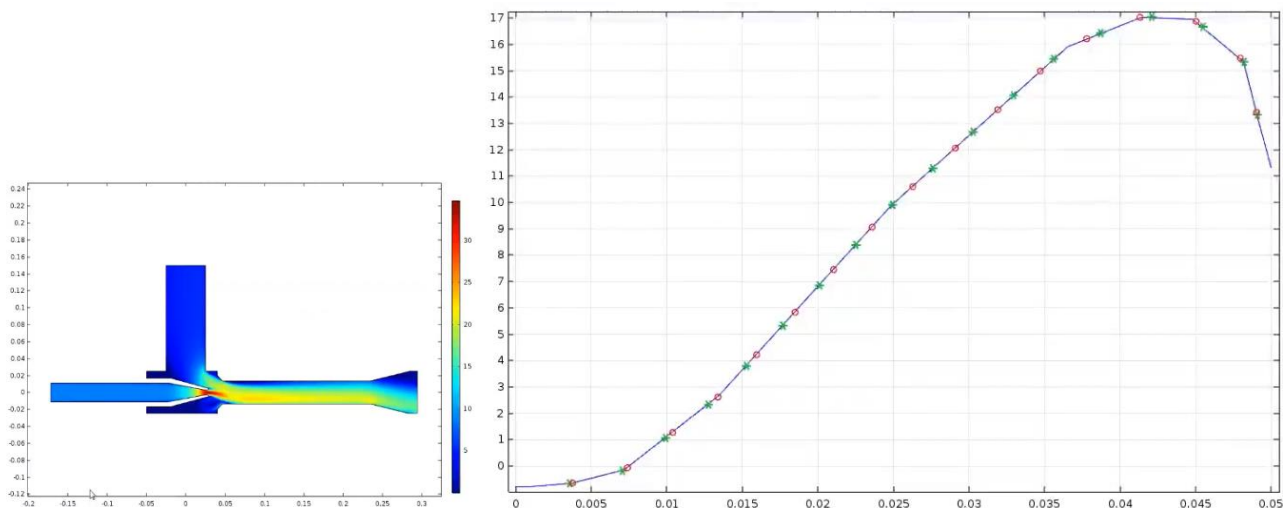


Рисунок 2 – Рассматриваемое устройство и график распределения скорости потока в выходном сечении

При решении разных задач необходимо выбирать наиболее оптимальный алгоритм повышения устойчивости задач, так как это может существенно сэкономить и время, и вычислительные ресурсы.

**Список использованных источников:**

1. Методы повышения устойчивости задач вычислительной гидродинамики в COMSOL Multiphysics [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.comsol.ru/video/cfd-simulations-comsol-multiphysics-webinar-ru>. Дата доступа: 10.02.2020.
2. Критерий подобия Пекле [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.heuristic.su/effects/catalog/est/byId/description/476/index.html>. Дата доступа: 10.02.2020.