УДК 621.396.96:519.87

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОТРАЖЕННОГО СИГНАЛА ПРИ НАЛИЧИИ МИГРАЦИИ ПО ДАЛЬНОСТИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫМ

КОЗЛОВ С. В., ЛЕ ВАН КЫОНГ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
(г. Минск, Республика Беларусь)

E-mail: kozlov@bsuir.by

Аннотация. Предложены точная, на основе решения нелинейного уравнения для времени задержки, и приближенная, на основе поправки к традиционному выражению для времени задержки, математические модели отраженного от точечной цели сигнала при наличии миграции по дальности и ее производным. Модели предназначены для обоснования алгоритмов длительного когерентного накопления отраженных сигналов. Показано, что предлагаемая приближенная модель может быть использована в РЛС с длинноимпульсными зондирующими сигналами и традиционными длинами волн при времени наблюдения точечной цели до единиц секунд.

Abstract. Exact, based on the solution of a nonlinear equation for the delay time, and approximate, based on a correction to the traditional expression for the delay time, mathematical models of the reflected signal in the presence of range migration and its derivatives are proposed. The models are designed to substantiate algorithms for long-term coherent accumulation of reflected signals. It is shown that the proposed approximate model can be used in radars with long-pulse probing signals and traditional wavelengths with a point target observation time of up to a few seconds.

Постановка задачи

При обнаружении и сопровождении целей с малой эффективной площадью рассеяния на больших дальностях требуется длительное когерентное накопление (КН) отраженного сигнала (ОС) [1]. В процессе длительного КН такие параметры ОС как время задержки и доплеровский сдвиг частоты могут существенно изменяться, то есть имеет место миграция дальности (МД) и миграция частоты (МЧ) [2,3,4]. Особенно сильно это будет проявляться при использовании в РЛС обнаружения длинноимпульсных (сотни - тысячи мкс) зондирующих сигналов с большой (десятки МГц), шириной спектра, что целесообразно для обеспечения высокой помехоустойчивости РЛС в отношении внешних активных помеха. МД и МЧ тесно связаны с параметрами движения цели и радиолокационной станции (РЛС). Для разработки алгоритма КН необходимо построить математическую модель ОС, соответствующую заданной ситуации. В предыдущих исследованиях многих авторов по длительному КН использовалась традиционная для радиолокации модель ОС, в которой время задержки ОС относительно зондирующего определяется текущей дальностью до цели. В настоящее работе рассмотрена точная математическая модель ОС, в которой время задержки является корнем нелинейного уравнения, и ее приближенный вариант, используемый для синтеза алгоритма обработки.

Модель отраженного сигнала

Полагаем, что РЛС излучает когерентную пачку из $k=\overline{0,K-1}$, где K - число импульсов в пачке, линейно частотно-модулированных (ЛЧМ) импульсов с длительностью импульсов T_0, периодом повторения $T_r=\mathrm{const}$ и моментами излучения $t_k=kT_r$. Нормированная комплексная огибающая пачки зондирующих сигналов

$$\dot{S}_{\text{зс}}(\tau,k)=rect\left[\frac{\tau-kT_r}{T_0}\right]\mathrm{e}^{j\pi\mu\tau^2}\mathrm{e}^{j2\pi f_0(t_k+\tau)}, \tag{1}$$

где $\mu=\Delta f_0/T_0$ - скорость изменения частоты; f_0 - начальная частота ЛЧМ-импульсов; $rect[x]=1,\ 0\le x\le 1$. Начальная фаза пачки для упрощения выкладок принята нулевой. Общая длительность наблюдения $T_{\text{кн}}=KT_r$.

В (1) время t_k - это «медленное» время, которое изменяется от периода повторения к периоду повторения, время τ - «быстрое» время, изменяемое в пределах одного периода повторения. При цифровой обработке быстрое время принимает дискретные значения $\tau = t_m = m / F_S$, где $m = \overline{0, M-1}$, M - число отсчетов на каждом интервале наблюдения в «быстром» времени; F_S - частота дискретизации.

Примем, что радиолокационная цель представляет собой один локальный центр отражения (блестящую точку) на дальности $r(t)$, изменяющейся на интервале радиолокационного контакта в соответствии с полиномом третьей степени

$$r(t) = r_0 + V_{0r} t + \frac{1}{2} a_r t^2 + \frac{1}{6} a_r^/ t^3, \tag{2}$$

где $r_0, V_{0r}, a_r, a_r^/$ - начальная дальность, начальная радиальная скорость, радиальное ускорение и скорость изменения радиального ускорения цели.

Традиционная для радиолокации модель ОС после переноса на видеочастоту и дискретизации может быть записана в виде

$$\dot{S}(t_m, t_k) = rect\left[\frac{t_m - t_z(t_k + t_m)}{T_0}\right] e^{j\pi\mu(t_m - t_z(t_k + t_m))^2} e^{-j2\pi f_0 t_z(t_k + t_m))}, \tag{3}$$

где

$$t_z(t) = \frac{2r(t)}{c} \tag{4}$$

- время задержки ОС. Модель (3), (4) является достаточно точной для традиционных областей радиолокации.

Получим более точную модель принимаемого ОС, учитывающую движение цели с ненулевыми высшими производными дальности на достаточно большом интервале КН. Для этого запишем принимаемый сигнал относительно текущего времени $t = t_k + \tau$, $\tau \in [0, T_r]$. Если ОС в k-м периоде повторения принимается в момент времени $t = t_{izl} + 2\Delta t_1$, где Δt_1 - время распространения ЗС до цели как в прямом, так и в обратном направлении; $t_{izl} \in [t_k, t_k + T_0]$, то он был излучен в момент времени $t_{izl}(t)$, который можно найти из уравнения

$$c\Delta t_1 = r(t_{izl}(t) + \Delta t_1),$$

откуда

$$c\frac{t - t_{izl}(t)}{2} = r\left(\frac{t_{izl}(t)}{2} + \frac{t}{2}\right). \tag{5}$$

Решение (5) определяет зависимость $t_{izl}(t)$ времени излучения сигнала от текущего времени t наблюдения. Перепишем (5) в явном виде:

$$c\frac{t - t_{izl}(t)}{2} = r_0 + \frac{1}{2} V_{0r}(t_{izl}(t) + t) + \frac{1}{2} a_r (t_{izl}(t) + t)^2 + \frac{1}{6} a_r^/ (t_{izl}(t) + t)^3. \tag{6}$$

Уравнение (6) является кубическим уравнение относительно $t_{izl}(t)$ и после приведения к каноническому виду может быть решено по формулам Кардано или путем тригонометрического разложения Виета. Однако получающееся решение при этом оказывается весьма громоздким и малопригодным для анализа. В этой связи для нахождения $t_{izl}(t)$ целесообразно использовать численные методы.

Закон изменения фазы принимаемого сигнала

$$\varphi(t) = 2\pi f_0 t_{izl}(t). \tag{7}$$

Зная $t_{izl}(t)$ и $\varphi(t)$, запишем принимаемый сигнал после переноса на видеочастоту и дискретизации в виде

$$\dot{S}(t_m, t_k) = rect\left[\frac{t_{izl}(t_m + t_k) - t_k}{T_0}\right] e^{j\pi\mu(t_{izl}(t_m + t_k) - t_k)^2} e^{j2\pi f_0 (t_{izl}(t_m + t_k) - t_k - t_m)}. \tag{8}$$

Выражение (8) представляет собой точную математическую модель ОС.

Сравнение (3) и (8) показывает их отличие по аргументу времени как для огибающей, так и для фазы на величину

$$\delta = t_m - t_z(t_k + t_m) - (t_{izl}(t_m + t_k) - t_k) = t_k + t_m - t_z(t_k + t_m) - t_{izl}(t_m + t_k)\,.$$

В табл. 1. для некоторых комбинаций параметров r_0, V_{0r}, a_r при $a_r^{/} = 0$ приведены результаты расчетов величины $\delta(t)$, $t = t_k + t_m$ для значений $t = 0$ и $t = T_{\text{кн}}$ =1 с.

Таблица 1. Различия по времени задержки для традиционной и точной модели

r_0, км	V_{0r}, м/с	a_r, м/с2	$\delta(0)$, нс	$\delta(T_{\text{кн}})$, нс	$\delta(T_{\text{кн}}) - \delta(0)$, нс	r_0, км	V_{0r}, м/с	a_r, м/с2	$\delta(0)$, нс	$\delta(T_{\text{кн}})$, нс	$\delta(T_{\text{кн}}) - \delta(0)$, нс
900	–500	0	10	9,994	–0,006	300	–500	0	3,333	3,328	–0,005
		–50	9,999	10,992	0,993			–50	3,333	3,660	0,327
		–100	9,997	11,99	1,993			–100	3,333	3,992	0,659
		–150	9,996	12,987	2,991			–150	3,333	4,325	0,992
	–1500	0	30	29,95	–0,05		–1500	0	10	9,95	–0,05
		–50	29,999	30,946	0,947			–50	10	10,281	0,281
		–100	29,997	31,942	1,945			–100	10	10,611	0,611
		–150	29,996	32,938	2,942			–150	10	10,942	0,942
	–3000	0	60,001	59,801	–0,2		–3000	0	20	19,8	–0,2
		–50	59,999	60,794	0,795			–50	20	20,128	0,128
		–100	59,998	61,788	1,79			–100	20	20,456	0,456
		–150	59,996	62,781	2,785			–150	20	20,784	0,784

Как следует из табл. 1., при начальной дальности до цели порядка сотен км, традиционная и точная модели практические совпадают за исключением смещения времени задержки для традиционной модели. Это смещение вызвано пренебрежением расстояния, проходимого целью при ненулевой радиальной скорости цели за время прохождения электромагнитных волн от РЛС до цели в традиционной модели.

Наиболее существенным является разность $\delta(T_{\text{кн}}) - \delta(0)$, которая будет определять набег фазы $\delta\varphi = 2\pi f_0[\delta(T_{\text{кн}}) - \delta(0)]$ отраженного сигнала в сравнении с опорным (определяемым временем задержки для традиционной модели) на интервале радиолокационного контакта с целью. Так, например, при r_0=900 км, V_{0r}= –500 м/с; $a_r = a_r^{/}$=0 и несущей частоте f_0=10 ГГц получим $\delta\varphi = 2\pi f_0[\delta(T_{\text{кн}}) - \delta(0)]$= –21,6°. Полученная величина малосущественна с позиций КН. В то же время при V_{0r}= –3000 м/с получим $\delta\varphi = 2\pi f_0[\delta(T_{\text{кн}}) - \delta(0)]$= –720°, то есть начиная с четверти интервала когерентного накопления (в данном случае 0,25 с) фазы отраженного и опорного сигнала окажутся противоположными.

Для повышения точности введем поправочный сдвиг по времени δt, так что скорректированная временная задержка в (3)

$$t_{\text{zc}} = \frac{2r(t - \delta t)}{c} = \frac{2r(t - r(t)/c)}{c}\,, \tag{9}$$

где $\delta t \approx r(t)/c$ - величина поправки в первом приближении.

Получим выражение для t_{zc}, пренебрегая во временной поправке третьей производной по дальности $\delta t \approx \frac{r_0}{c} + \frac{V_{0r}}{c}t + \frac{1}{2}\frac{a_r}{c}t^2$:

$$\begin{aligned} t_{\text{zc}}(t) \approx \frac{2}{c}\Bigg(& r_0 + V_{0r}\left(t - \left(\frac{r_0}{c} + \frac{V_{0r}}{c}t + \frac{1}{2}\frac{a_r}{c}t^2\right)\right) + \frac{1}{2}a_r\left(t - \left(\frac{r_0}{c} + \frac{V_{0r}}{c}t + \frac{1}{2}\frac{a_r}{c}t^2\right)\right)^2 + \\ & + \frac{1}{6}a_r^{/}\left(t - \left(\frac{r_0}{c} + \frac{V_{0r}}{c}t + \frac{1}{2}\frac{a_r}{c}t^2\right)\right)^3\Bigg) = \frac{2r_{\text{c}}(t)}{c}. \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$r_{\text{c}}(t) = r_{0\text{c}} + V_{0r\text{c}}t + \frac{1}{2}a_{r\text{c}}t^2 + \frac{1}{6}a_{r\text{c}}^{/}t^3 \tag{11}$$

- скорректированный закон изменения дальности;

$$
\begin{aligned}
&r_{0\text{c}} = r_0 - V_{0r}\frac{r_0}{c} + a_r\frac{r_0^2}{2c^2} - a_r^{/}\frac{r_0^3}{6c^3};\\
&V_{0r\text{c}} = V_{0r} - \frac{1}{c}(V_{0r}^2 + a_r r_0) + \frac{1}{c^2}\left(a_r^{/}\frac{r_0^2}{2} + a_r V_{0r} r_0\right) - \frac{V_{0r}a_r^{/}r_0^2}{2c^3};\\
&a_{r\text{c}} = a_r - \frac{1}{c}(3V_{0r}a_r + a_r^{/}r_0) + \frac{1}{c^2}(V_{0r}^2 a_r + a_r^2 r_0 + 2V_{0r}a_r^{/}r_0) - \frac{1}{c^3}(V_{0r}^2 a_r^{/} r_0 - a_r a_r^{/} r_0^2);\\
&a_{r\text{c}}^{/} = a_r^{/} - \frac{1}{c}(3a_r^2 + 3V_{0r}a_r^{/}) + \frac{1}{c^2}(3V_{0r}a_r^2 + 3a_r a_r^{/} r_0 + 3V_{0r}^2 a_r^{/}) - \frac{1}{c^3}(V_{0r}^3 a_r^{/} - 3V_{0r}a_r a_r^{/} r_0),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

- скорректированные начальные дальность, радиальная скорость, радиальное ускорение и производная радиального ускорения закона (10). При этом в (10) отброшены члены, содержащие степени времени больше трех.

Модуль ошибки $|\delta(t)|$ для традиционной модели (3) с поправленным значением временной задержки (10), (11) при $t \le 1$ с, $|V_{0r}|$<30М, $|a_r|$<15g не превышает 5 пикосекунд, при этом модуль разности $|\delta(T_{\text{кн}}) - \delta(0)|$ не превышает 0,3 пикосекунд. При экстремально больших значениях ускорения цели $|a_r| \approx 150$g получим $|\delta(t)|$<10 пс, $|\delta(T_{\text{кн}}) - \delta(0)|$<2 пс.

Эти временные различия практически несущественны для используемых в радиолокации метрового, дециметрового и сантиметрового диапазонов длин волн.

Таким образом, временная структура сигнала, отраженного от цели с законом движения (2), полностью эквивалентна временной структуре (3) с учетом (10) сигнала, отраженного от цели с начальными дальностью $r_{0\text{c}}$, радиальной скоростью $V_{0r\text{c}}$, радиальным ускорением $a_{r\text{c}}$ и его производной $a_{r\text{c}}^{/}$, которые определяются (11).

Величина поправок является относительно небольшой, но существенной с позиций длительного когерентного накопления. Так, например, для r_0=900 км, V_{0r} = –3000 м/с; a_r = –150 м/с^2, $a_r^{/}$=0 получим $r_{0\text{c}}$=900,009 км; $V_{0r\text{c}}$ = –2999,58 м/с, $a_{r\text{c}}$ = –150,004 м/с^2, $a_{r\text{c}}^{/}$ = –0,0002 м/с^3, то есть наиболее существенно изменились два первых параметра движения цели. Отметим, что, например, при f_0=10 ГГц и $T_{\text{кн}}$=1 с разрешающая способность по скорости составит $\Delta V = c/(2 f_0 T_{\text{кн}})$=0,015 м/с, что существенно превышает величину $V_{0r\text{c}} - V_{0r}$=0,42 м/с.

Очевидно, что получив оценки $\hat{r}_{0\text{c}}, \hat{V}_{0r\text{c}}, \hat{a}_{r\text{c}}, \hat{a}_{r\text{c}}^{/}$ из системы уравнений (12) могут быть вычислены истинные параметры движения цели.

Рассмотрим далее трансформацию формы одиночного отраженного сигнала: изменение его длительности и закона модуляции. Временные задержки ОС по переднему и заднему фронту k-го импульса составят

$$t_{1k} = \frac{2r_{\text{c}}(kT_r)}{c};\; t_{2k} = \frac{2r_{\text{c}}(kT_r + T_0)}{c},$$

а длительность k-го импульса пачки

$$
\begin{aligned}
T_k &= t_k + T_0 + t_{2k} - (t_k + t_{1k}) = T_0 + t_{2k} - t_{1k} = T_0 + \frac{2}{c}(r_{\text{к}}(kT_r + T_0) - r_{\text{к}}(kT_r)) =\\
&= T_0 + \frac{2}{c}\left[V_{0r\text{c}}T_0 + \frac{1}{2}a_{r\text{c}}\left((kT_r)^2 - (kT_r + T_0)^2\right) + \frac{1}{6}a_{r\text{c}}^{/}\left((kT_r)^3 - (kT_r + T_0)^3\right)\right].
\end{aligned}
$$

Для всех характерных случаев можно принять $T_k = T_0$, то есть не учитывать изменение длительности одиночного сигнала.

Изменение закона модуляции может иметь место, если за время T_0 цель перемещается на расстояние, большее, чем разрешающая способность по дальности $\left|V_{0r}T_0 + \frac{1}{2}a_r T_0^2 + \frac{1}{6}a_r^{/}T_0^3\right| > \frac{c}{2\Delta f_0}$.

Примем, что $|V_{0r}| \gg |a_r|T_0$, то есть будем учитывать только начальную радиальную скорость. Запишем временное представление отраженного от одной блестящей точки сигнала при нулевом времени задержки:

$$\dot{S}(t) = \mathrm{e}^{j\pi\mu(t - t_{zc}(t))^2} = \mathrm{e}^{j\pi\mu(t - V_\tau t)^2} = \mathrm{e}^{j\pi\mu(1 - V_\tau)^2 t^2} = \mathrm{e}^{j\pi\mu_{\text{c}} t^2}, \tag{13}$$

где $V_\tau = \dfrac{2V_{0rc}}{c}$ - скорость изменения времени задержки; $\tau_z(t) = V_\tau t$ - закон изменения времени задержки при нулевом временном сдвиге; $\mu_c = \mu(1-V_\tau)^2$ - корректированная скорость изменения частоты ЛЧМ-сигнала.

Фаза ОС (с учетом приближений $(t_k + t_m)^2 \approx t_k^2 + 2t_k t_m$; $(t_k + t_m)^3 \approx t_k^3 + 3t_k^2 t_m$) составит

$$\varphi(m,k) = -4\pi \frac{f_0}{c} r_c(t_k + t_m) = -4\pi \frac{f_0}{c}(r_{0c} + V_{0rc}(t_k + t_m) + \frac{1}{2}a_{rc}(t_k + t_m)^2 + \frac{1}{6}a_{rc}^{/}(t_k + t_m)^3) \approx$$

$$= -4\pi \frac{f_0}{c}\left(r_{0c} + V_{0rc}t_k + \frac{1}{2}a_{rc}t_k^2 + \frac{1}{6}a_{rc}^{/}t_k^3\right) - 4\pi \frac{f_0}{c}(V_{0rc} + a_{rc}t_k + \frac{1}{2}a_{rc}^{/}t_k^2)t_m = -\psi_k - 4\pi \frac{f_0}{c}V_{d_k} t_m,$$

где

$$\psi_k = 4\pi \frac{f_0}{c}\left(r_{0\text{к}} + V_{0r\text{к}}t_k + \frac{1}{2}a_{rc}t_k^2 + \frac{1}{6}a_{rc}^{/}t_k^3\right); \tag{14}$$

$$V_{d_k} = V_{0rc} + a_{rc}t_k + \frac{1}{2}a_{rc}^{/}t_k^2 \tag{15}$$

- начальная фаза и доплеровская скорость цели для k-го импульса пачки.

Использованные приближения основаны на том, что даже при достаточно длинных импульсах (единицы мс) и физически реализуемых радиальных ускорения (десятки g), перемещение цели за время длительности импульса, обусловленное ускорением, не превысит долей миллиметра. Например, при a_r=10g=100 м/с^2, T_0=1 мс получим $a_r T_0^2 / 2$=0,05 мм.

Таким образом, временное представление (модель) ОС может быть записано в виде

$$\dot{S}(t_m, t_k) = S_0 \text{rect}\left[\frac{1}{T_0}(t_m - \tau_k)\right] e^{j\pi\mu_c(t_m - \tau_k)} e^{-j\psi_k} e^{-j4\pi \frac{f_0}{c} V_{d_k} t_m}, \tag{16}$$

где $\tau_k = t_{zc}(t_k)$ - время задержки k-го импульса пачки.

Заключение

Предлагаемые точная и приближенная модели позволяют воспроизвести и с требуемой точностью описать структуру отраженного сигнала при длительном когерентном накоплении и наличии миграции по дальности и ее производным.

Список использованных источников

1. Чепкасов А. В. Определение интервалов когерентного накопления пачки длинных им пульсов при обнаружении высокоскоростной цели радиолокационной станцией с АФАР на твердотельных приборах // Радиопромышленность, 2016. № 1, с. 14–17.
2. Ильчук А. Р., Синицын И. А. Алгоритмы обработки сигналов, отраженных от высокоскоростных летательных аппаратов, в бортовых радиолокационных системах // Радиотехника, 2014, № 7, с. 16–23.
3. Николаев А. П., Собкина Н. Ю., Кривоножко И. С. Компенсация перемещения цели при длительном накоплении радиолокационных сигналов // Вестник Концерна ВКО «Алмаз – Антей» | № 3, 2018, с. 12–19.
4. Perry R. P., Dipietro R. C., Fante R. L. Conherent integration with ranger migration using keystone formating // Published in 2007 IEEE Radar Conference 2007, с. 37–42.
5. Архипов М. Ю., Николаев А. П. Алгоритмы накопления радиолокационных сигналов, отраженных от высокоскоростной цели // Антенны, 2013, № 1, с. 57–61.
6. Охрименко А. Е. Основы радиолокации и радиоэлектронная борьба. Часть 1. Основы радиолокации // военное издательство министерства обороны СССР, Москова 1983, 456 с.