Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

УДК 514.765.12

Эквиаффинные связности нулевой кривизны на однородных пространствах с разрешимой группой преобразований

Н.П. Можей

В работе изучаются трехмерные однородные пространства, допускающие связности только нулевой кривизны. Определены основные понятия: изотропно-точная пара, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, тензор Риччи, эквиаффинная (локально эквиаффинная) связность. Рассмотрены пространства, на которых действует разрешимая группа преобразований. Приведено описание эквиаффинных (локально эквиаффинных) связностей на указанных пространствах. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и структур на них.
Ключевые слова: эквиаффинная связность, группа преобразований, однородное пространство, тензор кривизны, тензор кручения.

In this article we study three-dimensional homogeneous spaces allowing connections of zero curvature only. The basic notions, such as isotropically-faithful pair, affine connection, curvature and torsion tensors, Ricci tensor, equiaffine (locally equiaffine) connection are defined. We have concerned the case of the solvable Lie group of transformations. We describe the equiaffine (locally equiaffine) connections on those spaces. The features of the methods presented in the work are the application of a purely algebraic approach to the description of manifolds and structures on them.
Keywords: equiaffine connection, transformation group, homogeneous space, curvature tensor, torsion tensor.

Введение. Важнейшими структурами в дифференциальной геометрии многообразий являются структуры связностей, имеющие широкое применение в математике и физике. Еще Феликс Клейн [1] утверждал, что наиболее полезным способом изучения геометрических структур является изучение симметрий, т. е. групп преобразований, сохраняющих особенности структуры. Большой вклад в развитие теории связностей внесли работы Э. Картана, А.П. Нордена, П.К. Рашевского, М. Куриты, А.П. Широкова, Э.Б. Винберга, Ш. Кобаяси, К. Номидзу [2] и др. Понятие эквиаффинной кривизны первоначально встречается у В. Бляшке [3], альтернативный подход приведен в [4]. Вопрос о существовании связности нулевой кривизны является одной из нерешенных проблем, такие связности позволяют дать геометрическую интерпретацию некоторым понятиям математики и физики, например, понятие связности, определяющей представление нулевой кривизны, играет важную роль в теории солитонов. Трехмерные однородные пространства с разрешимой группой преобразований изучались в [5], причем внимание сосредоточено на пространствах, допускающих аффинные связности только нулевой кривизны. В данной работе приведено описание эквиаффинных (локально эквиаффинных) связностей на таких пространствах; при изложении сохранены обозначения, введенные в работе [5], в которой приведен более подробный тематический обзор, а также обоснование применяемых методов.

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$, $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$. Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Тензоры кручения и кривизны имеют вид: $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$,

$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$, $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Будем говорить, что Λ имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если $T = 0$. Определим тензор Риччи $Ric \in Inv\mathrm{T}_2(\mathfrak{m})$: $Ric(y, z) = \mathrm{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}$. Будем говорить, что аффинная связность Λ является *локально эквиаффинной*, если $\mathrm{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ (то есть $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}]) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$). Аффинная связность Λ с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиаффинна. Под *эквиаффинной* связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\mathrm{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. В этом случае очевидно, что $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}) \in \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Описание эквиаффинных связностей на однородных пространствах разрешимых групп Ли. Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, ..., e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ $(n = \dim \bar{\mathfrak{g}})$, $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, ..., e_{n-3}$, $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, для нумерации пар – $d.n.m$, здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$; нумерация соответствует приведенной в [5]. Будем описывать связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *тривиальной*, если существует коммутативный идеал $\mathfrak{a}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, такой, что $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$. Тривиальная пара типа $d.n$ обозначается $d.n.1$.

Теорема 1. А) Все трехмерные *тривиальные* однородные пространства, допускающие аффинные связности только нулевой кривизны, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима, локально имеют вид $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$, где $\mathfrak{a}$ – коммутативный идеал в $\bar{\mathfrak{g}}$, а $\mathfrak{g}$ сопряжена одной из следующих подалгебр в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$:

$\underline{\dim \mathfrak{g} = 1}$

$$2.\begin{bmatrix} x & & \\ & \lambda x & \\ & & \mu x \end{bmatrix} \begin{matrix} \lambda \le \mu \le 1, \lambda\mu > 0, \\ (\lambda, \mu) \ne (-2, -1), \\ (\lambda, \mu) \ne (1/4, 1/2); \end{matrix}\ 4.\begin{bmatrix} \lambda x & x & \\ -x & \lambda x & \\ & & \mu x \end{bmatrix} \mu > 0;\ 7.\begin{bmatrix} x & & x \\ & \lambda x & \\ & & x \end{bmatrix} \lambda \ne 0;\ 9.\begin{bmatrix} x & x & \\ & x & x \\ & & x \end{bmatrix}.$$

$\underline{\dim \mathfrak{g} = 2}$

$$1.\begin{bmatrix} x & & \\ & \lambda x & \\ & & y \end{bmatrix} \begin{matrix} |\lambda| \le 1, \\ \lambda \ne 0; \end{matrix}\ 2.\begin{bmatrix} x+y & & \\ & \lambda x & \\ & & \mu y \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 \le \mu \le \lambda, \\ \lambda\mu > 0; \end{matrix}\ 3.\begin{bmatrix} \lambda x & x & \\ -x & \lambda x & \\ & & y \end{bmatrix} \lambda \ge 0;\ 4.\begin{bmatrix} y & x & \\ -x & y & \\ & & \lambda x + \mu y \end{bmatrix} \begin{matrix} \lambda \ge 0, \\ (\lambda, \mu) \ne (0, 0); \end{matrix}\ 5.\begin{bmatrix} y & & x + \lambda y \\ & x & \\ & & y \end{bmatrix};$$

$$6.\begin{bmatrix} y & & y \\ & x & \\ & & y \end{bmatrix};\ 8.\begin{bmatrix} & & x \\ & y & \\ & & \lambda y \end{bmatrix} \lambda \ne 0;\ 9.\begin{bmatrix} y & & x \\ & \lambda y & \\ & & \mu y \end{bmatrix} \begin{matrix} (\lambda, \mu) \ne (1/2, -1/2), \\ (\lambda, \mu) \ne (1/2, 1/4), \\ \lambda \ne 0, \mu \ne 0; \end{matrix}\ 10.\begin{bmatrix} x & y & x \\ & x & y \\ & & x \end{bmatrix};\ 11.\begin{bmatrix} x & y & -x \\ & x & y \\ & & x \end{bmatrix};\ 12.\begin{bmatrix} x & y & \\ & x & y \\ & & x \end{bmatrix};$$

$$14.\begin{bmatrix} y & y & x \\ & y & y \\ & & y \end{bmatrix};\ 15.\begin{bmatrix} & & x \\ & y & y \\ & & y \end{bmatrix};\ 16.\begin{bmatrix} y & & x \\ & \lambda y & \\ & & \lambda y \end{bmatrix} \lambda \ne 0;\ 19.\begin{bmatrix} y & y & x \\ & y & \\ & & \lambda y \end{bmatrix} \lambda \ne 0;\ 21.\begin{bmatrix} x & y & \\ & \lambda x & y \\ & & (2\lambda - 1)x \end{bmatrix} \lambda \ne 1, 0, 1/2;\ 22.\begin{bmatrix} & y & \\ & x & y \\ & & 2x \end{bmatrix}.$$

$\underline{\dim \mathfrak{g} = 3}$

$$1.\begin{bmatrix} x & & \\ & y & \\ & & z \end{bmatrix};\ 2.\begin{bmatrix} y & x & \\ -x & y & \\ & & z \end{bmatrix};\ 6.\begin{bmatrix} & & x \\ & y & \\ & & z \end{bmatrix};\ 7.\begin{bmatrix} y & & x \\ & \lambda y & \\ & & z \end{bmatrix} \lambda \ne 0;\ 8.\begin{bmatrix} y & & x \\ & z & \\ & & \lambda y + \mu z \end{bmatrix} (\lambda, \mu) \ne (0, 0),$$

$$9.\begin{bmatrix} x & y & z \\ & x & y \\ & & x \end{bmatrix};\ 10.\begin{bmatrix} x & & z \\ & y & \lambda x + y \\ & & y \end{bmatrix};\ 11.\begin{bmatrix} x & & z \\ & y & x \\ & & y \end{bmatrix};\ 12.\begin{bmatrix} & & z \\ & & y \\ & & x \end{bmatrix};\ 13.\begin{bmatrix} x & & z \\ & \lambda x & y \\ & & \mu x \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 < \lambda \le 1, \\ \mu \ne 0; \end{matrix}\ 14.\begin{bmatrix} x & & z \\ & -x & y \\ & & \mu x \end{bmatrix} \mu > 0;$$

16.$\begin{array}{|ccc|}\hline \lambda x & x & z\\ -x & \lambda x & y\\ & & \mu x\\\hline\end{array}\mu>0$; 17.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & \lambda x+y & z\\ & x & \\ & & y\\\hline\end{array}$; 18.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & x & z\\ & x & \\ & & y\\\hline\end{array}$; 19.$\begin{array}{|ccc|}\hline & y & z\\ & x & \\ & & \lambda x\\\hline\end{array}\begin{array}{l}|\lambda|\le 1,\\ \lambda\ne 0;\end{array}$ 20.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & y & z\\ & \lambda x & \\ & & \mu x\\\hline\end{array}\begin{array}{l}\lambda\le\mu,\\ \lambda\ne 0,\\ \mu\ne 0;\end{array}$

21.$\begin{array}{|ccc|}\hline & y & z\\ & \lambda x & x\\ & -x & \lambda x\\\hline\end{array}\lambda\le 0$; 22.$\begin{array}{|ccc|}\hline \lambda x & y & z\\ & \mu x & x\\ & -x & \mu x\\\hline\end{array}\lambda>0$; 23.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & y & z\\ & \lambda x & y\\ & & (2\lambda-1)x\\\hline\end{array}\lambda\ne 1, \tfrac{1}{2}$; 24.$\begin{array}{|ccc|}\hline & y & z\\ & x & y\\ & & 2x\\\hline\end{array}$; 26.$\begin{array}{|ccc|}\hline & x & z\\ & y & y\\ & & y\\\hline\end{array}$;

27.$\begin{array}{|ccc|}\hline y & x & z\\ & \lambda y & y\\ & & \lambda y\\\hline\end{array}\lambda\ne 0$; 28.$\begin{array}{|ccc|}\hline & x & z\\ & & y\\ & & x\\\hline\end{array}$; 29.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & x & z\\ & x & y\\ & & \mu x\\\hline\end{array}\mu\ne 0$; 30.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & x & z\\ & x & x+y\\ & & x\\\hline\end{array}$; 31.$\begin{array}{|ccc|}\hline x+y & z & \\ & x & z\\ & & x-y\\\hline\end{array}$

$\underline{\dim\mathfrak{g}=4}$

4.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & & u\\ & y & \\ & & z\\\hline\end{array}$; 6.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & & u\\ & \lambda x & z\\ & & y\\\hline\end{array}-1\le\lambda\le 1$; 7.$\begin{array}{|ccc|}\hline \lambda x & x & u\\ -x & \lambda x & z\\ & & y\\\hline\end{array}\lambda\ge 0$; 8.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & & u\\ & y & z\\ & & \lambda x+\mu y\\\hline\end{array}\begin{array}{c}\lambda\le\mu,\\ (\lambda,\mu)\ne(0,0);\end{array}$ 9.$\begin{array}{|ccc|}\hline y & x & u\\ -x & y & z\\ & & \lambda x+\mu y\\\hline\end{array}\begin{array}{c}\lambda\ge 0,\\ (\lambda,\mu)\ne(0,0);\end{array}$

10.$\begin{array}{|ccc|}\hline & z & u\\ & x & \\ & & y\\\hline\end{array}$; 11.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & z & u\\ & y & \\ & & \lambda x+\mu y\\\hline\end{array}\begin{array}{c}-1\le\mu<1,\\ (\lambda,\mu)\ne(0,0);\end{array}$ 12.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & z & u\\ & y & \\ & & \lambda x+y\\\hline\end{array}\lambda\ge 0$; 13.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & z & u\\ & \lambda y & y\\ & -y & \lambda y\\\hline\end{array}\lambda\ge 0$;

14.$\begin{array}{|ccc|}\hline \lambda x+\mu y & z & u\\ & y & x\\ & -x & y\\\hline\end{array}\lambda\ge 0$; 15.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & z & u\\ & y & \lambda x+y\\ & & y\\\hline\end{array}\lambda\ge 0$; 16.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & z & u\\ & y & x\\ & & y\\\hline\end{array}$; 17.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & \lambda x+y & u\\ & x & z\\ & & y\\\hline\end{array}$;

18.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & x & u\\ & x & z\\ & & y\\\hline\end{array}$; 19.$\begin{array}{|ccc|}\hline & y & u\\ & & z\\ & & x\\\hline\end{array}$; 20.$\begin{array}{|ccc|}\hline & y & u\\ & x & z\\ & & \lambda x\\\hline\end{array}\lambda\ne 0$; 21.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & y & u\\ & \lambda x & z\\ & & \mu x\\\hline\end{array}\mu\ne 0$; 22.$\begin{array}{|ccc|}\hline x+y & z & u\\ & x & z\\ & & x-y\\\hline\end{array}$.

$\underline{\dim\mathfrak{g}=5}$

4.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & & v\\ & y & u\\ & & z\\\hline\end{array}$; 5.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & y & v\\ -y & x & u\\ & & z\\\hline\end{array}$; 6.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & u & v\\ & y & \\ & & z\\\hline\end{array}$; 7.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & u & v\\ & y & z\\ & -z & y\\\hline\end{array}$;

8.$\begin{array}{|ccc|}\hline & z & v\\ & x & u\\ & & y\\\hline\end{array}$; 9.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & z & v\\ & \lambda x & u\\ & & y\\\hline\end{array}$; 10.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & z & v\\ & y & u\\ & & \lambda x+\mu y\\\hline\end{array}(\lambda,\mu)\ne(0,0)$.

$\underline{\dim\mathfrak{g}=6}$

5.$\begin{array}{|ccc|}\hline x & u & w\\ & y & v\\ & & z\\\hline\end{array}$.

Параметры обозначены греческими буквами, подалгебры с одинаковыми номерами, но разными значениями параметров, не сопряжены друг другу; переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$, базис подалгебры выбираем, придав одной из переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов по алфавиту.

Б) [5]. Все трехмерные *нетривиальные* однородные пространства, допускающие аффинные связности только нулевой кривизны, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима, локально имеют вид 1.2.2, 1.2.3, 1.4.2, 1.7.3, 2.2.2, 2.4.2, 2.8.5, 2.9.2 ($\mu\ne 0,-1,-1/2$), 2.15.2, 2.16.3, 2.19.5, 3.8.7, 3.13.3 ($\mu\ne 0$), 3.13.5, 3.14.3, 3.19.17, 3.20.25 ($\mu\ne 0$), 3.20.26 ($\lambda\ne 1/4$), 4.8.9, 4.11.5, где

1.2.2, $\mu=\lambda+1$, $\lambda<-1$	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	λu_2	$(\lambda+1)u_3$
u_1	$-u_1$	0	u_3	0
u_2	$-\lambda u_2$	$-u_3$	0	0
u_3	$-(\lambda+1)u_3$	0	0	0

,

1.2.3, $\mu=1-\lambda$, $0<\lambda\le 1/2$	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	λu_2	$(1-\lambda)u_3$
u_1	$-u_1$	0	0	0
u_2	$-\lambda u_2$	0	0	u_1
u_3	$(\lambda-1)u_3$	0	$-u_1$	0

,

1.4.2, $\mu=2\lambda$	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	λu_1-u_2	$u_1+\lambda u_2$	$2\lambda u_3$
u_1	$-\lambda u_1+u_2$	0	u_3	0
u_2	$-\lambda u_2-u_1$	$-u_3$	0	0
u_3	$-2\lambda u_3$	0	0	0

, $\lambda>0$,

1.7.3, $\lambda = 2$	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$2u_2$	u_1+u_3
u_1	$-u_1$	0	0	u_2
u_2	$-2u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1-u_3$	$-u_2$	0	0

,

2.2.2, $\lambda = \mu = 1$	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2	0
e_2	0	0	u_1	0	u_3
u_1	$-u_1$	$-u_1$	0	0	0
u_2	$-u_2$	0	0	0	u_1
u_3	0	$-u_3$	0	$-u_1$	0

,

2.4.2, $\lambda = 0, \mu = 2$	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2	$2u_3$
e_2	0	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	$-u_1$	u_2	0	u_3	0
u_2	$-u_2$	$-u_1$	$-u_3$	0	0
u_3	$-2u_3$	0	0	0	0

,

2.9.2, $\lambda = \mu + 1$	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-\mu)e_2$	u_1	$(\mu+1)u_2$	μu_3
e_2	$(\mu-1)e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	u_2
u_2	$-(\mu+1)u_2$	0	0	0	0
u_3	$-\mu u_3$	$-u_1$	$-u_2$	0	0

,

2.8.5, $\lambda = 1$	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_1	0	0	u_1
e_2	$-e_1$	0	0	u_2	u_3
u_1	0	0	0	0	u_2
u_2	0	$-u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1$	$-u_3$	$-u_2$	0	0

,

2.15.2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_1	0	0	u_1
e_2	$-e_1$	0	0	u_2	u_2+u_3
u_1	0	0	0	0	u_2
u_2	0	$-u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1$	$-u_2-u_3$	$-u_2$	0	0

,

2.16.3, $\lambda = 1/2$	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-(1/2)e_1$	0	0	u_1
e_2	$(1/2)e_1$	0	u_1	$(1/2)u_2$	$u_2+(1/2)u_3$
u_1	0	$-u_1$	0	0	0
u_2	0	$-(1/2)u_2$	0	0	u_1
u_3	$-u_1$	$-u_2-(1/2)u_3$	0	$-u_1$	0

,

2.19.5, $\lambda = 1/2$	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-(1/2)e_1$	0	0	u_1
e_2	$(1/2)e_1$	0	u_1	u_1+u_2	$e_1+(1/2)u_3$
u_1	0	$-u_1$	0	0	0
u_2	0	$-u_1-u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1$	$-e_1-(1/2)u_3$	0	0	0

,

3.8.7, $\lambda = 1$, $\mu = -1$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$2e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	0	0	$-e_3$	0	u_2	u_3
e_3	$-2e_3$	e_3	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	u_2
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_3$	$-u_1$	$-u_2$	0	0

,

3.13.3, $\lambda = 1-\mu$, $0 \leq \mu < 2$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-2\mu)e_2$	$(1-\mu)e_3$	u_1	$(1-\mu)u_2$	μu_3
e_2	$(2\mu-1)e_2$	0	0	0	0	u_2
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$(\mu-1)u_2$	0	0	0	0	u_1
u_3	$-\mu u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-u_1$	0

,

3.13.5, $\lambda=1+\mu$, $-2 < \mu < 0$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$(1-\mu)e_3$	u_1	$(1+\mu)u_2$	μu_3
e_2	$-e_2$	0	0	0	0	u_2
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	u_2
u_2	$-(\mu+1)u_2$	0	0	0	0	0
u_3	$-\mu u_3$	$-u_2$	$-u_1$	$-u_2$	0	0

,

3.14.3, $\mu = 2$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-3e_2$	$-e_3$	u_1	$-u_2$	$2u_3$
e_2	$3e_2$	0	0	0	0	u_2
e_3	e_3	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	u_2	0	0	0	0	u_1
u_3	$-2u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-u_1$	0

,

3.19.17, $\lambda = 1/2$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-2e_2$	$-e_3$	0	$2u_2$	u_3
e_2	$2e_2$	0	0	0	u_1	e_3
e_3	e_3	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	0	0
u_2	$-2u_2$	$-u_1$	0	0	0	0
u_3	$-u_3$	$-e_3$	$-u_1$	0	0	0

,

3.20.25, $\lambda = 2\mu$, $\mu \leq 0$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-2\mu)e_2$	$(1-\mu)e_3$	u_1	$2\mu u_2$	μu_3
e_2	$(2\mu-1)e_2$	0	0	0	u_1	e_3
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-2\mu u_2$	$-u_1$	0	0	0	0
u_3	$-\mu u_3$	$-e_3$	$-u_1$	0	0	0

,

3.20.26, $\lambda > 0$, $\mu = 2\lambda$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-\lambda)e_2$	$(1-2\lambda)e_3$	u_1	λu_2	$2\lambda u_3$
e_2	$(\lambda-1)e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$(2\lambda-1)e_3$	0	0	0	e_2	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-\lambda u_2$	$-u_1$	$-e_2$	0	0	0
u_3	$-2\lambda u_3$	0	$-u_1$	0	0	0

,

4.8.9, λ=–1, μ=1	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$2e_3$	e_4	u_1	0	$-u_3$
e_2	0	0	$-e_3$	0	0	u_2	u_3
e_3	$-2e_3$	e_3	0	0	0	0	u_1
e_4	$-e_4$	0	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	u_2
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_3$	$-u_1$	$-u_2$	$-u_2$	0	0

,

4.11.5, λ=0, μ=1/2	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	e_4	u_1	0	0
e_2	0	0	$-e_3$	$-(1/2)e_4$	0	u_2	$(1/2)u_3$
e_3	$-e_3$	e_3	0	0	0	u_1	e_4
e_4	$-e_4$	$(1/2)e_4$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	0
u_2	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0
u_3	0	$-(1/2)u_3$	$-e_4$	$-u_1$	0	0	0

.

Теорема 2. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – трехмерное однородное пространство, допускающее аффинные связности только нулевой кривизны, такое, что $\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима, приведенное в теореме 1. А) Локально эквиаффинные связности имеют вид, указанный в следующей таблице:

Пара	Локально эквиаффинная связность (без кручения), тензор кручения произвольной аффинной связности всегда нулевой, ($p_{i,j}$, $q_{i,j}$, $r_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1,3}$)
4.11.1 $\lambda=1/2$, $\mu=0$, 2.21.1 $\lambda=3/4$	$\Lambda(u_1)=\Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
4.8.1 $\lambda=0, \mu=1/2$, 3.8.1 $\lambda=1/2, \mu=0$, 2.8.1 $\lambda=1/2$, 2.9.1 $\lambda=2\mu$ ($\mu\neq 0, 1/4, 1/3$, $1/2$), 1.2.1 $\mu=\lambda/2$ ($\lambda\neq -2$).	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&r_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix}$
4.11.5, 3.19.17, 3.20.25 $\mu\neq 0$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$
3.7.1 $\lambda=1/2$, 2.1.1 $\lambda=1/2$, 1.2.1 $\lambda=1/2$ ($\mu\neq 1/2, 1$), 1.7.1 $\lambda=1/2$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&q_{1,2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
3.14.1 $\mu\neq 0, 2$, 2.9.1 $\lambda=1$, $\mu=1/2$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&r_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.9.1 $\lambda=1/2$ ($\mu\neq 0, -1/2, 1/4, 1/2$)	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&q_{1,2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
3.20.26 $\lambda\neq 1/3, 1/4$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.19.5	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$
1.2.1 $\mu=2\lambda$ ($\lambda\neq 1/3, 1/4$)	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&q_{3,2}&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Продолжение таблицы

1.2.1 $\lambda=1/2$, $\mu=1$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,2}&0\\0&0&0\\0&q_{3,2}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
Пара	Локально эквиаффинная связность (без кручения), тензор кручения произвольной аффинной связности может быть ненулевым
3.13.3 $\mu\neq 0$, 3.14.3	$\Lambda(u_1)=0,\ \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}0&0&1/2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}0&-1/2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
4.8.9, 3.8.7, 3.13.5, 2.8.5, 2.9.2 $\lambda\neq 1/2$ ($\mu\neq 0,1,-1,-1/2$), 2.15.2	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1/2\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\-1/2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
4.11.1 $\mu=-1,\lambda=1$, 3.8.1 $\lambda=-1,\mu=1$, 3.19.1 $\lambda=-1$, 3.20.1 $\mu=1-\lambda$ ($\lambda\neq 0$), 2.2.1 $\lambda=\mu=1$, 2.8.1 $\lambda=-1$, 2.9.1 $\lambda=1-\mu$ ($\mu\neq 0,1,\ 1/3,1/2$), 1.2.1 $\mu=1-\lambda$ ($\lambda\neq 1/3,1/2$)	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,3}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.2.2, 1.2.3	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,3}-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
4.14.1 $\lambda=0,\mu=2$, 3.21.1 $\lambda=0$, 3.22.1 $\lambda=2\mu$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
4.21.1 $\mu=1-\lambda$ ($\lambda\neq 1$), 3.27.1 $\lambda=1/2$, 2.16.1 $\lambda=1/2$	совпадает со случаем 4.11.1 $\lambda=1/2$, $\mu=0$
2.16.3	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1/2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1/2&r_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.9.1 $\lambda=\mu=1/2$, 1.2.1 $\lambda=\mu=1/2$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,2}&q_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,3}&r_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
3.20.26 $\lambda=1/3$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,3}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
3.23.1 $\lambda=2/3$, 2.21.1 $\lambda=2/3$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,3}&0\\0&0&2q_{1,3}\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.4.1 $\lambda=0,\mu=2$, 1.4.1 $\mu=2\lambda$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\p_{3,1}&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&p_{3,1}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.4.2, 1.4.2	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\p_{3,1}&1/2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1/2&p_{3,1}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.9.1 $\lambda=2/3$, $\mu=1/3$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,3}&0\\0&0&r_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.9.1 $\lambda=2,\mu=1$, 1.7.1 $\lambda=2$	совпадает со случаем 4.8.1 $\lambda=0,\mu=1/2$

Окончание таблицы

2.9.2 $\mu=1$, 1.7.3	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1/2\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\-1/2&0&r_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.9.2 λ =1/2 ($\mu\neq 0,1,-1,-1/2$)	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1/2\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\-1/2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
1.2.1 $\mu=\lambda+1$ ($\lambda\neq -2$)	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&p_{3,2}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\p_{3,2}&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
1.2.2	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&p_{3,2}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\p_{3,2}-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
1.2.1 $\lambda=1/3$, $\mu=2/3$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&0\\0&q_{3,2}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,3}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Для остальных трехмерных однородных пространств, приведенных в теореме 1, локально эквиаффинная связность существует и тривиальна (т. е. $\Lambda(u_1)=\Lambda(u_2)=\Lambda(u_3)=0$).

Б) Эквиаффинные связности в случаях 3.20.25 ($\mu=-1/3$) и 3.13.5 ($\mu=-1$) совпадают с локально эквиаффинными. В случаях 1.2.1 (μ + λ = –1), 1.4.1 (μ = –2λ), 1.7.1 (λ = –2), 2.2.1 (λ, μ) = (–1,–1), 2.4.1 (λ, μ) = (0,–2), 2.8.1 (λ = –1), 2.9.1 (λ + μ = –1), 2.16.1 (λ = –1/2), 2.19.1 (λ = –2), 3.8.1 (λ, μ) = (–1,–1), 3.13.1 (μ + λ = –1), 3.16.1 (μ = –2λ), 3.19.1 (λ = –1), 3.20.1 (μ + λ = –1), 3.21.1 (λ = 0), 3.22.1 (λ = –2μ), 3.23.1 (λ = 0), 3.27.1 (λ = –1/2), 3.29.1 (μ = –2), 4.8.1 (λ, μ) = (–1,–1), 4.9.1 (λ, μ) = (0,–2), 4.11.1 (λ, μ) = (–1,–1), 4.14.1 (λ, μ) = (0,–2), 4.20.1 (λ = –1), 4.21.1 (μ + λ = –1), 5.10.1 (λ, μ) = (–1,–1) эквиаффинная связность тривиальна. В других случаях пара не допускает эквиаффинных связностей.

Для доказательства заметим, что у пространств, указанных в теореме 1, связность имеет нулевую кривизну, тензор Риччи также нулевой (т. е. симметрический), следовательно при равенстве нулю тензора кручения аффинная связность является локально эквиафинной. Находим афинные связности и тензоры кручения. Проверяя, при каких условиях связность является эквиаффинной (локально эквиаффинной), получаем искомый результат.

Заключение. Таким образом, найдено и приведено в явном виде полное описание эквиаффинных (локально эквиаффинных) связностей на трехмерных однородных пространствах с разрешимой группой преобразований (допускающих аффинные связности только нулевой кривизны). Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и структур на них.

Литература

1. Klein, F. A comparative review of recent researches in geometry / F. Klein // Bull. Amer. Math. Soc. – 1893. – V. 2, № 10. – P. 215–249.

2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2-х т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – 2 т. – 428 с.

3. Blaschke, W. Vorlesungen ¨uber Differentialgeometrie / W. Blaschke. – Berlin, 1923. – V. 2. – 272 s.

4. Olver, P. Recursive moving frames / P. Olver // Results Math. – 2011. – V. 60. – P. 423–452.

5. Можей, Н. П. Связности нулевой кривизны на однородных пространствах разрешимых групп Ли / Н. П. Можей // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2017. – № 6 (105). – С. 104–111.

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Поступила в редакцию 02.10.2020