ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2
ИЗУЧЕНИЕ ПРЕЦЕССИОННОГО ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА

Твердое тело, совершающее быстрое вращение вокруг своей оси (гироскоп), обладает высокой устойчивостью положения оси вращения в пространстве. Физическая основа такой устойчивости – закон сохранения момента импульса.

Свойствами гироскопа обладают вращающиеся небесные тела, артиллерийские снаряды, роторные турбины, детский волчок и т. д.

В современной технике гироскопы широко используются в системах навигации в судоходстве, авиации, космонавтике (гирокомпасы), для автоматического управления самолетов, ракет, торпед, в системах стабилизации (для успокоения качки судов, системы стабилизации пушки и башни танков) и др.

Цель лабораторной работы

1. Изучить элементарную теорию гироскопа и исследовать прецессионное движение гироскопа.
2. Получить экспериментально зависимость угловой скорости прецессии от величины момента внешней силы.
3. Определить собственную частоту вращения гироскопа.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определения угловой скорости и углового ускорения. Как направлены вектора угловой скорости и углового ускоренияв случае ускоренного и замедленного вращения?
2. Сформулируйтеопределения основных динамических характеристик вращательного движения: момента силы, момента импульса, момента инерции.

3. Сформулируйтеи запишите основной закон динамики вращательного движения в дифференциальной форме; в интегральнойформе. Проведите аналогию этого закона с основным законом динамики поступательного движения (II законом Ньютона). Каков физический смысл указанных законов?

4. Сформулируйте закон сохранения момента импульса. Каким образом проявляется действие этого закона?

5. Что такое гироскоп? Какой гироскоп называетсяуравновешенным(астатическим)?

6. Что такое прецессия гироскопа и как она возникает? Почему не прецессирует свободный гироскоп?В каких движениях участвует прецессирующий гироскоп?

7. Выведите формулу для угловой скорости прецессии гироскопа.

8. Как зависит угловая скорость прецессии гироскопа в данной лабораторной установкеот массы груза и его положения относительно оси гироскопа?

9. Получите формулу, используемую в лабораторной работе для определения собственной частоты вращения гироскопа.

Краткие сведения из теории

Вращательным движением твердого тела вокруг оси называется такое его движение, при котором все точки тела (кроме неподвижных точек на оси) движутся по концентрическим окружностям, лежащим в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Наиболее простым видом вращательного движения является вращение тела вокруг неподвижной (закрепленной) оси вращения.

Гироскоп – это массивноесимметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг оси, котораяможет изменять своюориентацию в пространстве.

Основные кинематические характеристики вращательного движения: угловая скорость – характеризуетбыстроту вращения; угловое ускорение – характеризуетбыстроту изменения угловой скорости.

Угловая скорость $\vec{\omega}$ – векторная величина, равная первой производной по времени от углового перемещения $\vec{\varphi}$:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Модуль вектора угловой скорости равен углу поворота тела в единицу времени.

Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения в сторону, определяемую правилом правого винта.

При вращательном движении твердого тела все его точки имеют одинаковую угловую скорость.

При равномерном вращении величина угловой скорости определяется формулой:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

где $\Delta\varphi$ – угол поворота радиус-вектора любой точки тела за время Δt.

Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ – векторная величина, равная первой производной по времени от угловой скорости $\vec{\omega}$ или второй производной от углового перемещения $\vec{\varphi}$:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}.$$

Модуль вектора углового ускоренияравен изменению угловой скорости тела в единицу времени.

Векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ сонаправлены $(\vec{\omega} \uparrow\uparrow \vec{\varepsilon})$, если вращение ускоренное, и направлены противоположно друг другу $(\vec{\omega} \uparrow\downarrow \vec{\varepsilon})$ при замедленном вращении.

Сила, приложенная к твердому телу в любой точке таким образом, что линия ее действия не проходит через центр масс, создает момент силы $\vec{M}$ и может вызвать вращение тела. На рис. 1 отражено замедленное вращение точки тела m_i под действием тормозящего момента $\vec{M}$.

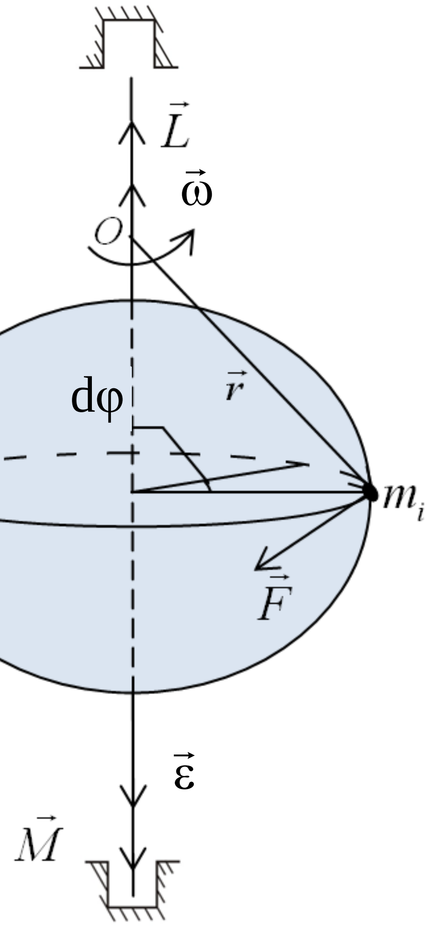

Рис. 1. Кинематические ($d\vec{\varphi}, \vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$) и динамические ($\vec{F}, \vec{M}, \vec{L}$) характеристики вращательного движения твердого тела

Момент силы относительно некоторой точки есть векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из этой точкив точку приложения силы, и вектора сил $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]; M = rF\sin\alpha,$$

где$r\sin\alpha = l$– плечо силы, то есть кратчайшее расстояние от линии действия силы до центра (оси) вращения.

В случае, когда тело закреплено на некоторой оси X, вращающее действие оказывает проекция вектора $\vec{M}$на эту ось, причем$\vec{M}_x = \left[\vec{r}_\perp, \vec{F}_\perp\right]$, здесь $\vec{r}_\perp$, $\vec{F}_\perp$ – составляющие векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$, перпендикулярные оси вращения,причем $\vec{r}_\perp$и$\vec{F}_\perp$ также взаимно перпендикулярны. Очевидно, что $\vec{r}_\perp$является радиусом окружности, по которой происходит вращение (в дальнейшем просто $\vec{r}$); $\vec{F}_\perp$– касательная сила (в дальнейшем просто $\vec{F}$). Величина проекции момента силы на ось вращения $M = rF$ (индекспри M, соответствующий оси вращения, опущен).

В случае действия нескольких (n) сил, приложенных к различным элементам m_i тела, величина результирующего момента силы относительно оси вращения:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i = F_1 r_1 + F_2 r_2 + \ldots + F_n r_n = \sum_{i=1}^{n} F_i r_i .$$

Здесь F_i– сила, действующая на элемент массойm_i; r_i – расстояние от оси вращения до точки приложения силы (радиус окружности, по которой движется данный элемент).

Используя следующие выражения

$$F_i r_i = m_i a_i r_i = m_i \frac{\mathrm{d}\upsilon_i}{\mathrm{d}t} r_i = m_i \frac{\mathrm{d}(\omega r_i)}{\mathrm{d}t} r_i = m_i r_i^2 \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = m_i r_i^2 \varepsilon,$$

для величины результирующего момента сил получим:

$$M = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 .$$

Выражение$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$, называемое*моментом инерциитела*I относительно данной оси (аналог массы в поступательном движении), зависит от того, каким образом относительно оси вращения распределены элементарные массы, составляющие тело.

Момент инерции является мерой инертности тела по отношению к вращательному движению; он играет в этом смысле ту же роль, что и масса в поступательном движении.

Для вычисления моментов инерции симметричных тел с непрерывным распределением массы следует воспользоваться интегральным представлением для величины момента инерции

$$I = \int_V \rho r^2 \mathrm{d}V ,$$

где ρ – плотность тела; $\rho \mathrm{d}V = \mathrm{d}m$ – элемент массы.

Для цилиндрического по форме ротора гироскопа, изучаемого в данной лабораторной работе, момент инерции определяется формулой:

$$I = \frac{mR^2}{2},$$

где m – масса цилиндра, R– его радиус.

Очевидно, что моменты инерции одного и того же тела относительно различных осей вращения будут разными вследствие неодинакового распределения одной и той же массы относительно этих различных осей. Значения моментов инерции для различных симметричных тел представлены в табл. 2 лабораторной работы 1 (с. 11–13).

С использованием выражения $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ величину момента сил, действующего на тело и сообщающего ему угловое ускорение ε, можно записать в виде:

$$M = I\varepsilon,$$

или в векторном виде:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}.$$

Вектор момента силы $\vec{M}$ – аксиальный вектор; он направлен по оси вращения и совпадает по направлению с вектором углового ускорения $\vec{\varepsilon}$.

Данное уравнение является *основным законом динамики вращательного движения тел*в интегральной форме(аналогом второго закона Ньютона для поступательного движения $\vec{F} = m\vec{a}$).

Отметим, что физический смысл для указанных законов имеют записи их в виде $\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}$ и $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$. Наличие момента силы – причина ускоренного вращения; сила – причина ускоренного поступательного движения.

Получим основной закон динамики вращательного движения в *дифференциальнойформе*, используя выражения для углового ускорения $\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ и *момента инерции* *материальной точки* $I_i = m_i r_i^2$, а также связь между линейной и угловой скоростью $\upsilon_i = \omega r_i$:

$$M = I\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \frac{d\omega}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i \frac{d\upsilon_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(r_i m_i \upsilon_i)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum r_i m_i \upsilon_i = \frac{dL}{dt}.$$

Здесь $L = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i \upsilon_i$ – *момент импульсатела* относительно оси вращения; $p_i = m_i \upsilon_i$ –импульс точки.

Итак, основной закон динамики вращательного движения тела в *дифференциальнойформе* имеет вид:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Можно показать, что момент импульса тела равен

$$\vec{L} = I\vec{\omega},$$

где I – момент инерции тела относительно оси вращения.

Действительно, при движении точки по окружности

$$L_i = r_i p_i = r_i m_i \upsilon_i = r_i m_i \omega r_i = m_i r_i^2 \omega = I_i \omega$$

Для момента импульса тела относительно оси вращения в векторном видезапишем:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} I_i \vec{\omega} = \vec{\omega} \sum_{i=1}^{n} I_i = I\vec{\omega}.$$

Помним, что вектор угловой скорости одинаков для каждой из точек и для тела в целом.

Направление вектора момента импульса в случае симметричных и однородных телсовпадает с направлением вектора угловой скорости: $\vec{L} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$.

Итак, *основнойзакон динамики вращательного движения*:скорость изменения момента импульса (илиизменение момента импульса твердого тела в единицу времени) равна моменту внешних сил, действующих на тело:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Закон сохранения момента импульса:если суммарный момент действующих на системувнешних сил равен нулю, то ее полный момент импульса остается постоянным по величине и направлению:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \mathrm{const}.$$

Очевидно, что изменение момента импульса при неизменном моменте инерции может произойти только в случае изменения угловой скорости вращения, и всегда обусловлено действием момента силы.

*Основнойзакон динамики вращательного движения*можно переписать в виде:

$$\mathrm{d}\vec{L} = \vec{M}\,\mathrm{d}t.$$

Из этого выражениеследует, что момент импульса вращающегося тела не будет изменяться ($\mathrm{d}\vec{L} = 0$) не только при отсутствии моментов внешних сил, но и в случае их очень кратковременного действия ($\mathrm{d}t \approx 0$). Так, даже сильные удары по быстровращающемуся волчку (гироскопу) не нарушают его установившегося состояния вращения. Гироскопкак бы «сопротивляется» всяким попыткам изменить его момент импульса. При наличии постоянно действующего момента сил $\vec{M}$ вектор изменения момента импульса $\mathrm{d}\vec{L}$ совпадает по направлению с вектором $\vec{M}$.

Чтобы ось фигуры гироскопа могла свободно поворачиваться в пространстве, гироскоп помещают в кардановом подвесе(рис. 2).*Карданов подвес*– универсальная шарнирная опора, позволяющая закреплённому в ней объекту вращаться одновременно в нескольких плоскостях. Если в кардановом подвесезакрепить вращающееся тело, то, согласно закону сохранения момента импульса, оно будет сохранять направление оси вращения независимо от ориентации самого подвеса. Это свойство нашло применение в гироскопах, применяющихся, в частности, в авиации и космонавтике. Держатели судовых компасов или просто сосудов с питьем в транспортных средствах также используют карданов подвес, который позволяет предмету находиться в вертикальном положении несмотря на толчки и тряску.

В данной лабораторной работе исследуется гироскоп, в котором используется вращающееся тело в виде цилиндра (ротор), установленное в кардановом подвесе, который в свою очередь укреплен в специальном корпусе. Все три оси подвеса, включая ось собственного вращения гироскопа, пересекаются в одной неподвижной точке (центр подвеса). Вращение ротора гироскопа обеспечивается специальным генератором высокой частоты.

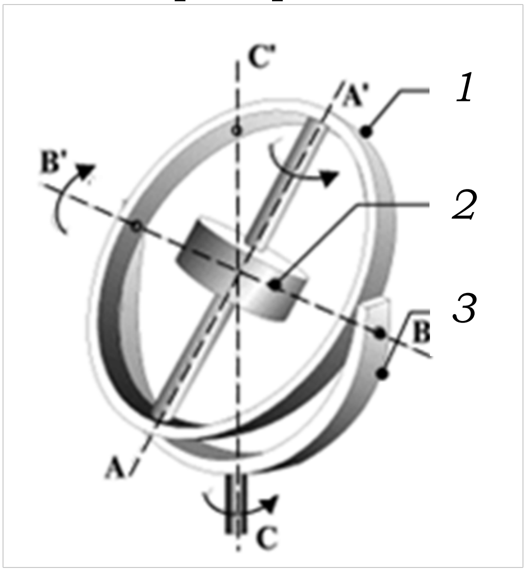

Рис. 2. Гироскоп с тремя степенями свободы:
1 – внутренняя рамка, 2 – ротор, 3 – внешняя рамка

Если центр тяжести гироскопа совпадает с центром карданова подвеса (с центром симметрии на рис. 2), т. е. неподвижен, то гироскоп называется *уравновешенным* или *астатическим,* а его вращение является устойчивым: ось вращения не изменяет своей ориентации в пространстве.

Момент силы тяжести уравновешенногогироскопа равен нулю, вследствие равенства нулю плеча силы тяжести (линия действия силы $m\vec{g}$ проходит через центр подвеса).Следовательно, дляуравновешенногогироскопа выполняется закон сохранения момента импульса:

$$\overrightarrow{M} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{L} = \text{const}.$$

Поэтому, так как $\vec{L} = I\vec{\omega}$, вектор угловой скорости собственного вращения $\vec{\omega}$, направленный вдоль оси вращения, остается неизменным, и ось вращения гироскопа будет сохранять неизменным свое направление в пространстве при любом повороте или передвижении прибора.

Для изменения направления оси вращающегося гироскопа относительно неподвижной системы координат необходимо, чтобы на него действовал постоянный отличный от нуля момент внешних сил. В таком случае наблюдается *гироскопический эффект*: под действием силы, которая, казалось бы, должна была вызвать поворот оси гироскопа в направлении своего действия, ось гироскопа поворачивается в плоскости, перпендикулярной ожидаемой плоскости поворота, в сторону вектора момента внешней силы. Если сила не кратковременна, а действует постоянно, то возникает *вынужденнаяпрецессия*гироскопа– вращение оси гироскопа с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}'$вокруг некоторой оси, не являющейся осью его собственного вращения.

Действие момента силы может, очевидно, привести к изменению вектора момента импульса $\vec{L}$только по направлению, так как его величина $L = I\omega$, при неизменных величинах момента инерции I и угловой скорости собственного вращения ω,измениться не может.

На рис.3 отражена прецессия гироскопа, возникающая как вращение оси гироскопа в горизонтальной плоскости, с угловой скоростью $\vec{\omega}'$, направленной вдоль оси Z. Прецессия возникает вследствие действия на ось гироскопа некоторой силы $\vec{F}$. Роль силы $\vec{F}$в данной лабораторной работе выполняет сила тяжести грузиков, располагаемых на определенном расстоянии l от центра подвеса на специальной площадке, закрепленной на оси гироскопа. Собственное вращение ротора гироскопа происходит с угловой скоростью ωвокруг оси цилиндра, расположенной вдоль оси X.

Получим формулу для угловой скорости прецессии, исходя из основного уравнения динамики вращательного движения. Если на вращающийся вокруг оси X ротор гироскопа (рис. 3) действует момент $\vec{M}$внешней силы$\vec{F}$

($\vec{M}=\left[\vec{r},m\vec{g}\right]$), то согласно основному закону динамики вращательного движения за время $\mathrm{d}t$ момент импульса $\vec{L}$ получит приращение $\mathrm{d}\vec{L}$, направленное в ту же сторону, что и вектор момента силы $\vec{M}$.

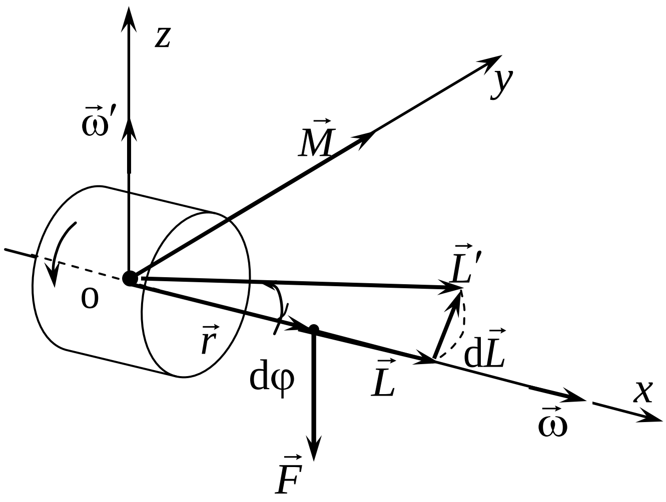

Рис. 3.Прецессия гироскопа под действием силы $\vec{F}$

Это означает поворот вектора момента импульса $\vec{L}$ на угол $\mathrm{d}\varphi$(новое положение вектора $\vec{L}$ обозначено как $\vec{L}'$; $\left|\vec{L}'\right|=\left|\vec{L}\right|$).

Под действием постоянного момента внешних сил M ось гироскопа начнет прецессировать, то есть ротор будет медленно поворачиваться вокруг оси Z. Как видно из рис. 3, приращение момента импульса $\mathrm{d}\vec{L}$ по модулю можно записать:

$$\mathrm{d}L = L\,\mathrm{tg}(\mathrm{d}\varphi) \cong L\mathrm{d}\varphi$$

(так как при малых углах $\mathrm{tg}\varphi \cong \varphi$, а $\mathrm{d}\varphi$ мал по определению).

Подставляя это значение $\mathrm{d}L$ в закон динамики вращательного движения, получим:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t} = L\vec{\omega}' = \vec{M} \Rightarrow \vec{\omega}' = \frac{\vec{M}}{\vec{L}} = \frac{\vec{M}}{I\vec{\omega}},$$

где $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}'$ – *угловая скорость прецессии*; вектор $\vec{\omega}'$ направлен вдоль оси Z.

Итак, величина *угловой скорости прецессии* определяется выражением:

$$\omega' = \frac{M}{L} = \frac{M}{I\omega},$$

где M – момент внешней силы;

I – момент инерции гироскопа относительно оси собственного вращения (ось X);

ω – угловая скорость собственного вращения гироскопа.

Поскольку $\vec{L} = I\vec{\omega}$, то

$$\vec{M} = \vec{L}\vec{\omega}' = I[\vec{\omega}, \vec{\omega}'].$$

Здесь $\vec{M}$ – *гироскопический момент* (момент силы выражен через момент инерции гироскопа, угловую скорость прецессии и угловую скорость собственного вращения). *Данное соотношение действительно в предположении, что* $\omega' << \omega$.

Величина гироскопического момента определяет скорость вращения оси гироскопа ω', а не ее ускорение. Этим объясняется отсутствие «инерции» прецессии: вращение оси гироскопа прекращается сразу же, как только перестает действовать момент внешних сил.

Основной закон динамики вращательного движения $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$ и соотношение для гироскопического момента $\vec{M} = \vec{L}\vec{\omega}' = I[\vec{\omega}, \vec{\omega}']$ представляют собой *математическую модель прецессии гироскопа.*

Описание лабораторной установки. Методика эксперимента

Для выполнения лабораторной работы используется экспериментальная установка, представленная на рис. 4, включающая:

гироскоп *1*;

набор разновесов различной массы *2*;

источник питания для вращения гироскопа *3*;

секундомер.

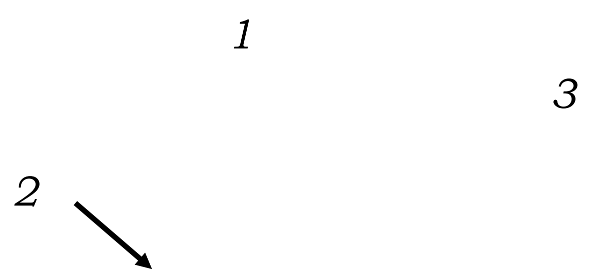

Рис. 4.Лабораторная установка для изучения прецессионногодвижения гироскопа

*Методика*выполненияработызаключается в следующем.

Значения моментов сил M, вызывающих прецессию, задается с помощью грузов (разновесов), располагаемых на специальной площадке,прикрепленной к оси гироскопа, и определяются формулой:

$$M = Fl = mgl\,.$$

где l– плечо силы тяжести грузов mgотносительно центра гироскопа (значение lуказано на панели гироскопа).Занести значение lв таблицу бланка отчета.

При установившейся прецессии ее угловая скорость ω'может быть вычислена в эксперименте следующим образом:

$$\omega' = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

где $\Delta\varphi$– угол поворота оси гироскопа в горизонтальной плоскостиза промежуток времени Δt.

Значения ω'вычисляются для различных значений момента силы тяжести M.

По данным этих измерений строится график зависимости угловой скорости прецессии от величины моментов силы тяжести $\omega' = f(M)$.

Из графика определяется величина ΔM и соответствующее ему значение $\Delta\omega'$. По этим данным вычисляется момент импульса гироскопа по формуле:

$$L = \frac{\Delta M}{\Delta\omega'}.$$

Угловая скорость вращения гироскопа ω связана с частотой вращения ν соотношением

$$\omega = 2\pi\nu .$$

Из выражения $L = I\omega$ следует, что $\omega = \dfrac{L}{I}$.

Следовательно,

$$2\pi\nu = \frac{L}{I} \Rightarrow \nu = \frac{L}{2\pi I}.$$

Ротором гироскопа является цилиндр, его момент инерции определяется соотношением:

$$I = \frac{1}{2} m_{\text{т}} R^2 ,$$

где $m_{\text{т}}$ – масса ротора (указана на панели гироскопа).Занести значение $m_{\text{ã}}$в таблицу бланка отчета.

R– радиус ротора (указан на панели гироскопа).Занести значение Rв таблицу бланка отчета.

Окончательно получаем *рабочую формулу* для нахождения собственной частоты вращения гироскопа:

$$\nu = \frac{L}{\pi m_{\text{т}} R^2}.$$

Порядок выполнения лабораторной работы и обработка результатов измерений

1. Включить источник питания.
2. Включить гироскоп. Выждать 3 – 5 мин; за это время гироскоп достигнет своей предельной угловой скорости собственного вращения.
3. Установить ось ротора гироскопа горизонтально, при этом указатель расположить произвольно, например, на отметку 90°.

4. Установить одну из разновесок на площадку, укрепленную на оси гироскопа.

5. Измерить с помощью секундомера время поворота стрелкина некоторый угол, например, на $\Delta\varphi = \frac{\pi}{6}$.

6. Снять разновеску.

7. Записать в таблицу массу разновески m, угол поворота $\Delta\varphi$ и время прецессии гироскопа Δt.

Таблица 1

№	m, кг	$\Delta\varphi$, рад	Δt, с	ω', рад/с	M , Н·м
1					
2					
3					
4					
5					

8. Выполнить п. п. 3–7 еще для четырехдругих масс разновесов, в каждом опыте увеличивая массу грузика, устанавливаемого на площадку.При необходимости ставить на площадку по два разновеса. Угол $\Delta\varphi$ не изменять.

9. Выключить источник питания.

10. По полученным данным (табл. 1) рассчитать угловые скорости прецессии $\omega' = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ и соответствующие им моменты внешних сил $M = mgl$ для всех грузиков. Результаты расчетов записать в таблицу.

11. По данным табл.1построить график зависимости угловой скорости прецессии ω'от величины Mмомента силы тяжести.

12. Используя график $\omega' = f(M)$ определить момент импульса L гироскопа по формуле $L = \frac{\Delta M}{\Delta\omega'}$, для чего:

а) отметить произвольно на графике точкиA и B.

б) изменение вращающего момента$\Delta M = M_B - M_A$ и соответствующее ему изменение угловой скорости прецессии гироскопа$\Delta\omega' = \omega'_B - \omega'_A$определить из графика (см. рис. 5).

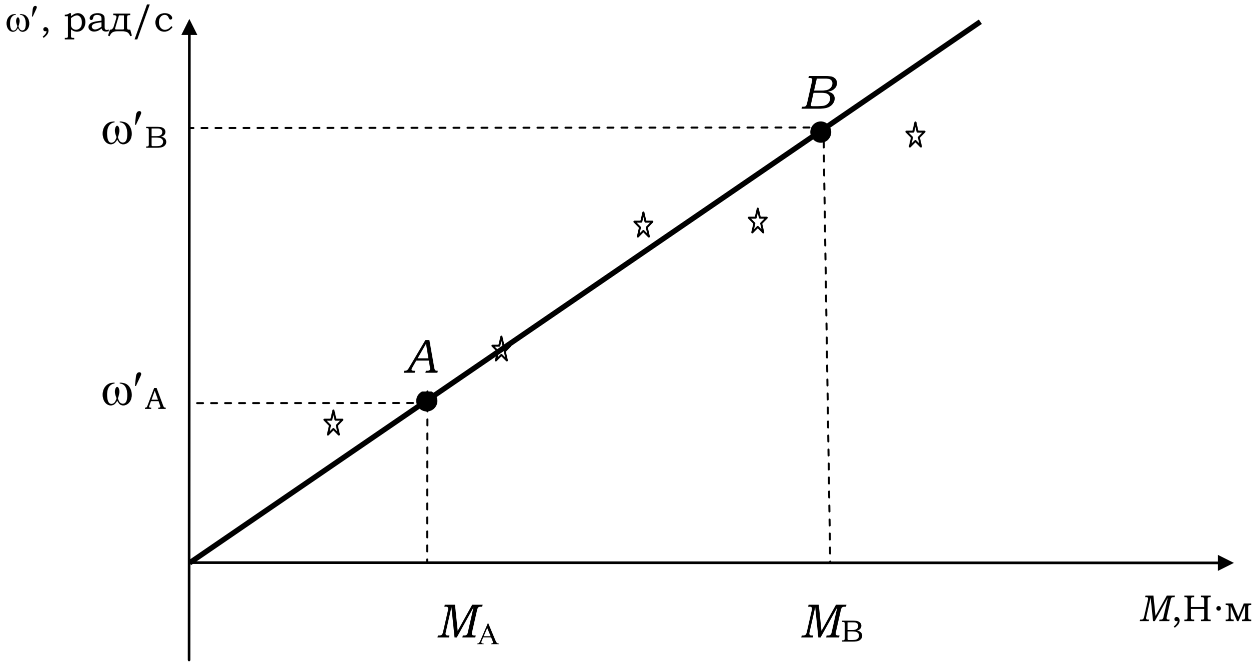

Рис.5. График зависимости $\omega' = f(M)$

13. По формуле $\nu = \dfrac{L}{\pi m_{\text{т}} R^2}$ вычислить собственную частоту вращения гироскопа.

14. Вычислитьугловую скорость вращения гироскопа:

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Сформулировать выводы по работе

Вопросы для анализа результатов лабораторной работы и формулировки выводов:

1. На основе каких законов выводится формула, используемая в лабораторной работе для нахождения собственной частоты вращения гироскопа?
2. Какова причина прецессионного движения гироскопа в проведенном эксперименте?
3. Назовите силу, которая создает вращающий момент в лабораторной установке. Чем определяется плечо этой силы?
4. Выполняется ли неравенство: $\omega' << \omega$?