

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра радиотехнических систем

С. А. Ганкевич

РАДИОАВТОМАТИКА

Практикум
для студентов специальностей I-39 01 01 «Радиотехника»,
I-39 01 02 «Радиоэлектронные системы»,
I-39 01 04 «Радиоэлектронная защита информации»
дневной формы обучения

В 2-х частях

Часть 1

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ РАДИОАВТОМАТИКИ

Минск 2007

УДК 681.5 (075.8)
ББК 32.84 я 73
Р 15

Р е ц е н з е н т
доктор технических наук, профессор
В. А. Чердынцев

Ганкевич, С. А.

Р 15 Радиоавтоматика : практикум для студ. спец. I-39 01 01 «Радиотехника», I-39 01 02 «Радиоэлектронные системы», I-39 01 04 «Радиоэлектронная защита информации» днев. формы обуч. В 2 ч. Ч. 1 : Линейные системы радиоавтоматики / С. А. Ганкевич. – Минск : БГУИР, 2007. – 59 с.

ISBN 978-985-488-208-6 (ч. 1)

Первая часть практикума содержит справочный материал, примеры решения задач и задачи по основным разделам теории линейных систем радиоавтоматики.

УДК 681.5 (075.8)
ББК 32.84 я 73

ISBN 978-985-488-208-6 (ч. 1)
ISBN 978-985-488-209-3

© Ганкевич С. А., 2007
© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2007

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

1.1. Краткие теоретические сведения

Задачей анализа следящей системы является оценка ее реакции на входное воздействие. С целью анализа следящей системы по основным показателям качества составляют математическую модель системы.

Для математического описания линейных следящих систем используют временные и частотные методы.

При временных методах анализа используют дифференциальные уравнения и динамические характеристики: передаточную, переходную и весовую функции, а при частотных – частотную передаточную функцию (комплексный коэффициент передачи) и логарифмические частотные характеристики.

Дифференциальное уравнение, связывающее выходные и входные воздействия, составляется на основе анализа функциональной схемы следящей системы. Функциональная схема состоит из функциональных элементов и связей между ними (рис. 1.1).

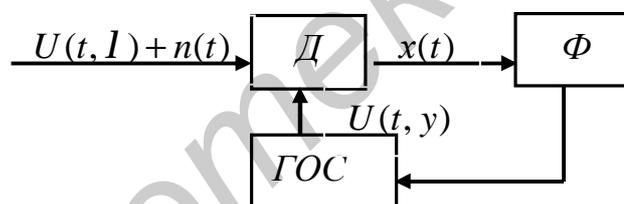


Рис. 1.1. Обобщенная функциональная схема радиоэлектронной следящей системы (РЭСС): D – дискриминатор; F – фильтр; ГОС – генератор опорного сигнала

На вход РЭСС поступает в общем случае аддитивная смесь полезного сигнала $U(t, I)$, содержащего отслеживаемый параметр $I(t)$, и шума $n(t)$. Основным элементом системы является измеритель рассогласования (дискриминатор) D , измеряющий рассогласование (ошибку слежения) $x(t)$ и формирующий напряжение, пропорциональное измеренной величине ошибки:

$$x(t) = I(t) - y(t),$$

где $y(t)$ – оценка отслеживаемого параметра $I(t)$.

В состав РЭСС также входят фильтр F , сглаживающий флуктуации на выходе дискриминатора, и генератор опорного сигнала (ГОС), вырабатывающий опорную копию принимаемого сигнала $U(t, y)$.

Чтобы составить дифференциальное уравнение, описывающее работу системы, необходимо составить дифференциальные уравнения, связывающие входные и выходные воздействия для каждого из звеньев, входящих в состав системы. Затем, принимая в качестве основных входное и выходное воздействия системы, путем последовательной подстановки одного уравнения во второе необходимо избавиться от промежуточных величин. Чтобы упростить процесс подстановки, дифференциальные уравнения записывают в сокращенной (символической) форме.

Дифференциальное уравнение, устанавливающее связь между входом и выходом динамического элемента, имеет следующий вид:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{dy}{dt} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{dx}{dt}, \quad (1.1)$$

где a_i, b_j – постоянные коэффициенты.

Переход к операторной форме записи дифференциального уравнения (1.1)

производится заменой оператора дифференцирования $\frac{d}{dt}$ на символ p :

$$A(p)y(t) = B(p)x(t), \quad (1.2)$$

где $p = \frac{d}{dt}$, $A(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i$, $B(p) = \sum_{j=0}^m b_j p^j$ – линейные дифференциальные

операторы.

В операторной форме записи

$$y(t) = W(p)x(t), \quad (1.3)$$

где $W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$ – линейный оператор.

$W(p)$ называют операторным коэффициентом передачи, или передаточной функцией. Однако такое понятие передаточной функции не является строгим.

На основе дифференциальных уравнений функциональных узлов составляется структурная схема, являющаяся математической моделью системы. Структурная схема представляет собой совокупность динамических звеньев и связей между ними, причем каждой математической операции соответствует определенное звено (рис. 1.2).

Математический эквивалент дискриминатора включает элемент сравнения, нелинейное безынерционное звено $F(x)$ и сумматор.

Звено $W(p)$ определяется передаточными функциями опорного генератора и фильтра. $\xi(t, x)$ – флюктуационная составляющая, представляющая результат нелинейного преобразования сигнала и шума в дискриминаторе.

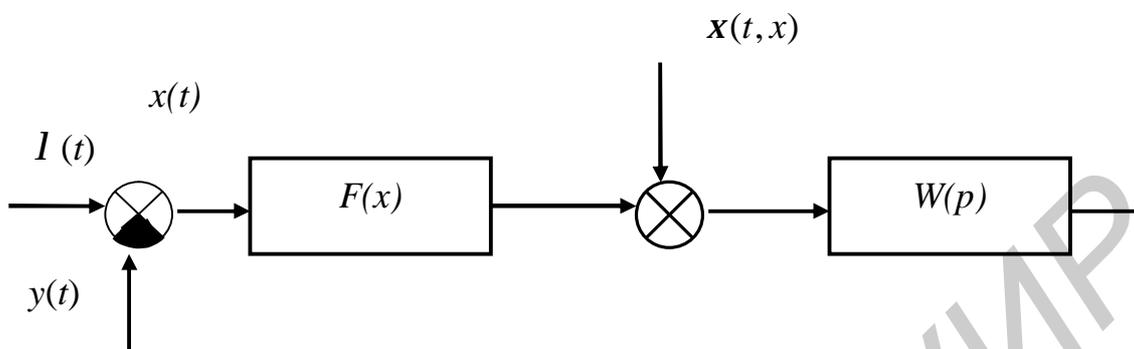


Рис. 1.2. Обобщенная структурная схема

Чтобы перейти от символической (алгебраизированной) формы записи дифференциального уравнения к алгебраической, используют преобразования Лапласа.

Входная и выходная величины в области изображений Лапласа связаны передаточной функцией. Передаточная функция определяется как отношение изображений по Лапласу выходной и входной величин при нулевых начальных условиях. Таким образом, передаточная функция в области изображений определяет реакцию системы на входное воздействие. Переход от операторного коэффициента передачи к передаточной функции производится заменой оператора p на комплексную переменную $s = c + j\omega$.

Определим операторные коэффициенты передачи (передаточные функции), связывающие входные и выходные переменные в замкнутой следящей системе, представленной математической моделью (см. рис. 1.2).

Исходное соотношение

$$x(t) = I(t) - y(t), \quad (1.4)$$

где $x(t)$ – ошибка слежения.

В свою очередь

$$y(t) = [x(t) \cdot S_\delta + x(t)] \cdot W(p). \quad (1.5)$$

Подставим (1.5) в (1.4) и сгруппируем слагаемые. В результате получим

$$x(t) = \frac{1 \cdot I(t)}{1 + S_\delta \cdot W(p)} - \frac{W(p) \cdot x(t)}{1 + S_\delta \cdot W(p)};$$

$$x(t) = H_{Ix}(p) \cdot I(t) + H_{xx}(p) \cdot x(t),$$

где $H_{I_x}(p) = \frac{1}{1 + S_\partial \cdot W(p)}$ и $H_{x_x}(p) = -\frac{W(p)}{1 + S_\partial \cdot W(p)}$ – соответственно

операторные коэффициенты передачи от воздействия к ошибке и от возмущения к ошибке.

Теперь подставим (1.4) в (1.5) и сгруппируем:

$$y(t) = \frac{S_\partial \cdot W(p)}{1 + S_\partial \cdot W(p)} \cdot I(t) + \frac{W(p)}{1 + S_\partial \cdot W(p)} \cdot x(t); \quad x(t) = H_{I_y}(p) \cdot I(t) + H_{x_y}(p) \cdot x(t);$$

$$H_{I_y}(p) = \frac{S_\partial \cdot W(p)}{1 + S_\partial \cdot W(p)}; \quad H_{x_y}(p) = -\frac{W(p)}{1 + S_\partial \cdot W(p)}.$$

Здесь $H_{I_y}(p)$ и $H_{x_y}(p)$ – соответственно операторные коэффициенты передачи от воздействия и возмущения к управляемой величине.

Можно значительно упростить процесс определения передаточной функции, если использовать следующую формулу:

$$H_{UV}(s) = \frac{W_{np}(s)}{1 + W_p(s)}, \quad (1.6)$$

где U – входное воздействие, V – выходная величина; $W_{np}(s)$ – передаточная функция прямой цепи, связывающей входное воздействие и выходную величину; $W_p(s)$ – передаточная функция разомкнутой системы (система размыкается в точке подачи обратной связи, после чего определяется передаточная функция от ошибки $x(t)$ к управляемой величине $y(t)$).

Таким образом, в обобщенной структурной схеме можно определить следующие передаточные функции, определяющие в области изображений по Лапласу связь входных и выходных величин.

Основная передаточная функция – передаточная функция замкнутой системы. Определяется отношением изображений по Лапласу управляемой величины и задающего воздействия:

$$H_{I_y}(s) = \frac{Y(s)}{\Lambda(s)},$$

где $Y(s) = L[y(s)]; \quad \Lambda(s) = L[I(s)]; \quad H_{I_y}(s) = \frac{S_\partial \cdot W(s)}{1 + S_\partial \cdot W(s)}.$

Передаточная функция разомкнутой системы – отношение изображений по Лапласу управляемой величины и ошибки слежения:

$$W_p(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}; \quad W_p(s) = S_\partial \cdot W(s); \quad H_{Iy}(s) = \frac{W_p(s)}{1+W_p(s)}; \quad W_p(s) = \frac{H_{Iy}}{1-H_{xy}}.$$

Передаточная функция от воздействия к ошибке – отношение изображений ошибки и задающего воздействия:

$$H_{Ix}(s) = \frac{1}{1+W_p(s)}.$$

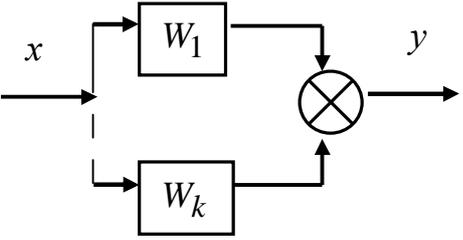
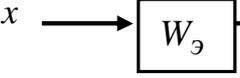
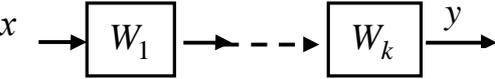
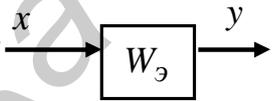
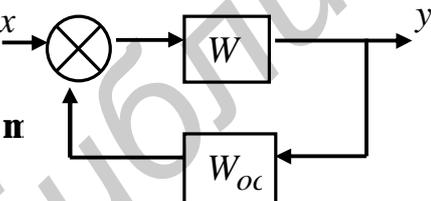
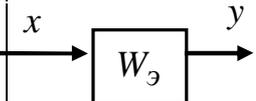
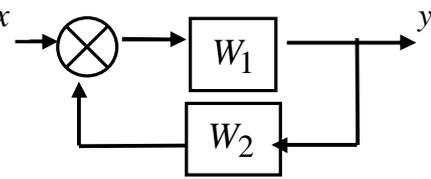
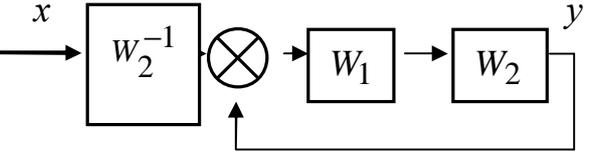
Передаточная функция от возмущения к управляемой величине:

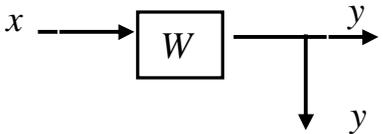
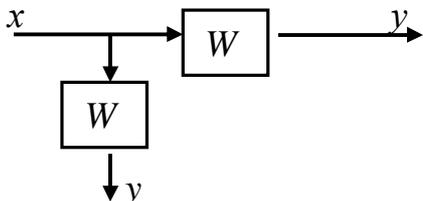
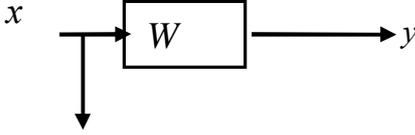
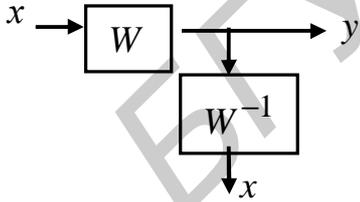
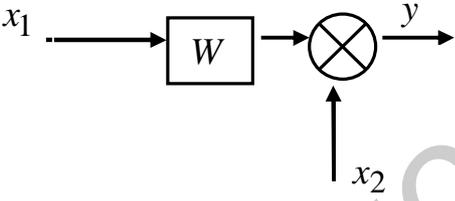
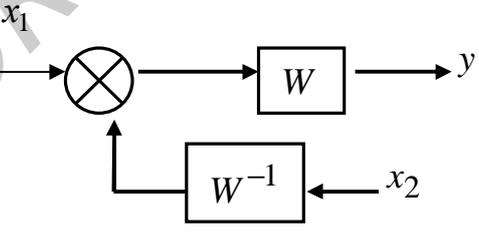
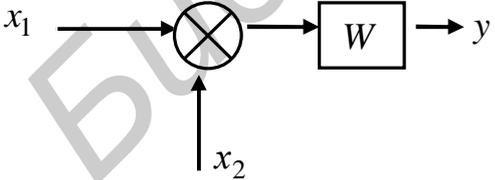
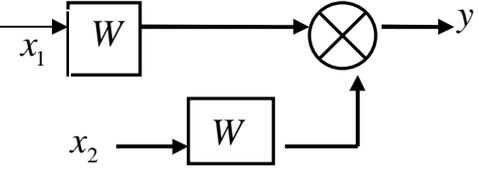
$$H_{xy}(s) = \frac{W(s)}{1+W_p(s)}.$$

Сложная структурная схема следящей системы, имеющая перекрестные связи, путем структурных преобразований сводится к трем простейшим соединениям звеньев: последовательному, параллельному и встречно-параллельному. Основные правила структурных преобразований приведены в табл. 1.1.

Динамические звенья следящих систем, описываемые дифференциальными уравнениями высоких порядков, разделяют таким образом, чтобы дифференциальное уравнение звена не превышало второго порядка. При этом динамические звенья классифицируются по виду дифференциального уравнения или передаточной функции. Вне зависимости от назначения, конструктивных и схемотехнических особенностей динамические звенья относят к одному и тому же типу, если их работа описывается одним и тем же дифференциальным уравнением. По этому признаку классификации различают три типа звеньев: позиционные (апериодическое первого порядка, безынерционное, колебательное, апериодическое второго порядка), дифференцирующие (идеальное, инерционное, форсирующее) и интегрирующие (идеальное, инерционное, изодромное). Дифференциальные уравнения, описывающие работу типовых звеньев и соответствующие им передаточные функции, приведены в табл. 1.2.

Правила структурных преобразований схем

Исходная схема, операция	Эквивалентная схема
1	2
<p>Параллельное соединение звеньев</p> 	 $W_3 = \sum_{i=1}^k W_i$
<p>Последовательное соединение звеньев</p> 	 $W_3 = \prod_{i=1}^K W_i$
<p>Встречно-параллельное соединение</p> 	 $W_3 = \frac{W}{1 \pm WW_{oc}}$
<p>Переход к единичной обратной связи</p> 	

1	2
<p>Перенос узла с выхода на вход звена</p> 	
<p>Перенос узла со входа на выход звена</p> 	
<p>Перенос сумматора с выхода на вход звена</p> 	
<p>Перенос сумматора со входа на выход звена</p> 	

Типовые динамические звенья следящих систем

1	2
Тип звена	Дифференциальное уравнение, передаточная функция
Безынерционное	$y(t) = kx(t), W(s) = k$
Апериодическое 1-го порядка	$Ty'(t) + y(t) = kx(t),$ $W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$
Колебательное	$T^2 y''(t) + 2\alpha T y'(t) + y(t) = kx(t),$ $W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\alpha T s + 1}$
Апериодическое 2-го порядка	$T_2 T_1 y''(t) + (T_2 + T_1) y'(t) + y(t) = kx(t),$ $W(s) = \frac{k}{(T_2 s + 1)(T_1 s + 1)}$
Идеальное интегрирующее	$y'(t) = kx(t); W(s) = \frac{k}{s}$
Инерционное интегрирующее	$T y''(t) + y'(t) = kx(t), W(s) = \frac{k}{s(1 + sT)}$
Идеальное дифференцирующее	$y(t) = kx'(t), W(s) = ks$
Инерционное дифференцирующее	$T y'(t) + y(t) = kx'(t), W(s) = \frac{ks}{1 + sT}$

1	2
Форсирующее	$y(t) = k[Tx'(t) + x(t)],$ $W(s) = k(Ts + 1)$
Изодромное	$y'(t) = k[Tx'(t) + x(t)],$ $W(s) = \frac{k(Ts + 1)}{s}$

Частотная передаточная функция в области изображений Фурье определяет реакцию системы на гармоническое входное воздействие и определяется как отношение комплексных амплитуд входного и выходного сигналов при гармоническом входном сигнале и нулевых начальных условиях.

При произвольном входном воздействии частотная передаточная функция определяется отношением изображений Фурье выходного и входного сигналов. Графическое изображение частотной передаточной функции в логарифмическом масштабе называется логарифмической частотной характеристикой (ЛЧХ).

1.2. Примеры

1. Составить дифференциальные уравнения и структурную схему системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП).

Р е ш е н и е. В качестве функциональной используем схему, изображенную на рис. 1.1.

Система предназначена для синхронизации по частоте и фазе эталонного (входного) и опорного сигналов. Пусть эталонный сигнал $U(t, j)$ является гармоническим с переменной частотой, равной

$$\omega = \omega_0 + \omega_c(t),$$

где ω_0 – номинальное значение частоты, а ω_c – переменная составляющая.

Тогда

$$U(t, j) = A_c \sin \left[\omega_0 t + \int_0^t \omega_c(t) dt \right] = A_c \sin[\omega_0 t + j_c(t)],$$

где A_0 – амплитуда эталонного сигнала, $j_c(t) = \int_0^t \omega_c(t) dt$ – фаза эталонного сигнала, являющаяся задающим воздействием.

Выходной сигнал ГОС будет иметь такой же вид:

$$U(t, j_z) = A_0 \cos \left[\omega_0 t + \int_0^t \omega_z(t) dt \right] = A_0 \cos[\omega_0 t + j_z(t)].$$

Фаза этого сигнала $j_z(t) = \int_0^t \omega_z(t) dt$ является управляемой величиной и

близка к $j_c(t)$. В дискриминаторе происходит перемножение сигнала $U(t, j_c)$ и сигнала $U(t, j_z)$, сдвинутого на 90° . В результате перемножения получим: $A_c \sin[\omega_0 + j_c(t)] A_0 \cos[\omega_0 t + j_z(t)] = 0,5 A_c A_0 [\sin(j_c(t) - j_z(t)) + \sin[2\omega_0 t + j_c(t) + j_z(t)]]$. Фильтр нижних частот выделяет низкочастотную составляющую произведения

$$U_{\text{ф.н.ч}}(t) = K_{\text{ф.н.ч}} \frac{A_c A_0}{2} \sin j(t),$$

где $j(t) = j_c(t) - j_z(t)$, $K_{\text{ф.н.ч}} \frac{A_0 A_c}{2} = K_{\text{ф.д}}$ – коэффициент преобразования дискриминатора и ФНЧ.

Полагаем, что ГОС безынерционен, а переменная составляющая частоты выходного сигнала $\omega_z(t)$ пропорциональна $U_{\text{ф.н.ч}}(t)$:

$$\Delta \omega_z(t) = K_z U_{\text{ф.н.ч}}(t) = K_z K_{\text{ф.д}}(t) \sin j(t),$$

где K_z – крутизна регулировочной характеристики ГОС.

Частота и фаза сигнала связаны между собой соотношением

$$\omega_z(t) = \frac{dj_z(t)}{dt}.$$

Уравнение ФАП принимает вид

$$\frac{dj_z}{dt} = K_z K_{\text{ф.д}} \sin j(t).$$

При малых рассогласованиях имеем

$$\sin j(t) \approx j(t) = j_c(t) - j_z(t).$$

Линеаризованное уравнение ФАП в операторной форме имеет вид

$$(p + K_z K_{\text{ф.д}}) j_z(t) = K_z K_{\text{ф.д}} j_c(t).$$

Откуда
$$H_{j_c j_e}(p) = \frac{K_2 K_{\phi, \partial}}{p + K_2 K_{\phi, \partial}}.$$

Структурная схема ФАП показана на рис. 1.3.

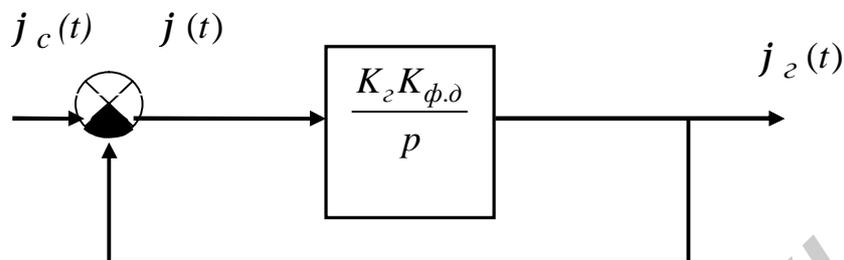


Рис. 1.3

2. На рис. 1.4 изображена структурная схема комплексированной системы. Найти передаточную функцию системы по задающему воздействию.

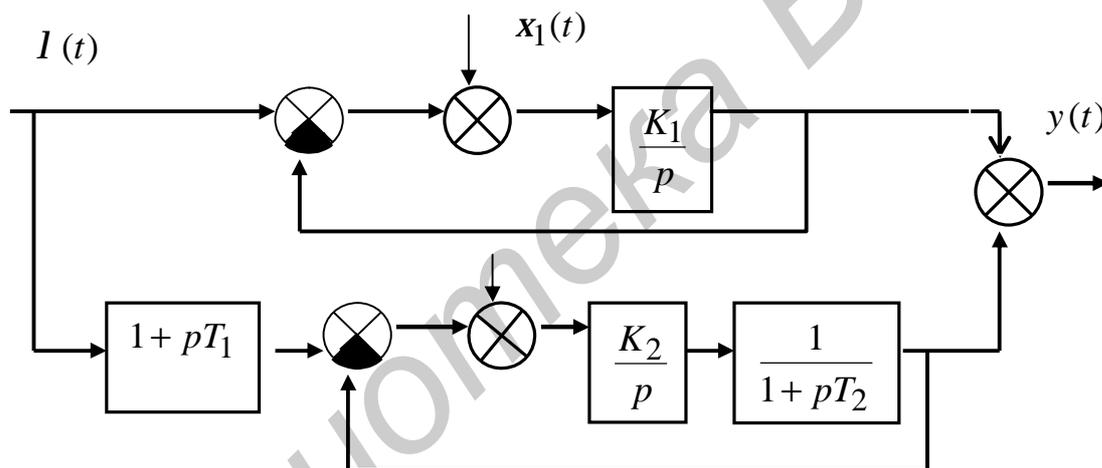


Рис. 1.4

Решение. Передаточная функция по задающему воздействию $H_{I y}(s)$ равна сумме передаточных функций параллельно включенных контуров, составляющих комплексированную систему:

$$H_{I y}(s) = H_1(s) + H_2(s).$$

Используя (1.6), найдем $H_1(s)$ и $H_2(s)$:

$$H_1(s) = \frac{K_1}{K_1 + s}, \quad H_2(s) = \frac{K_2(1 + sT_1)}{s(1 + sT_2) + K_2}.$$

1.3. Задачи и упражнения

1. Как изменится постоянная времени и коэффициент передачи апериодического звена первого порядка, если его охватить отрицательной обратной связью с передаточной функцией цепи обратной связи, равной b ?

2. Найти передаточные функции для звена, описываемого уравнением

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_0 \frac{dU}{dt} + b_1 U + c_0 f.$$

3. Построить функциональную схему и составить уравнение системы автоматической подстройки частоты (АПЧ).

4. Найти дифференциальное уравнение системы слежения, структурная схема которой изображена на рис. 1.5, относительно управляемой величины $y(t)$ по задающему воздействию $I(t)$ при

$$W_1(p) = \frac{K_1}{T_1 p + 1}; W_2(p) = \frac{K_2}{p}; W_3(p) = \frac{p T_2}{T_3 p + 1}.$$

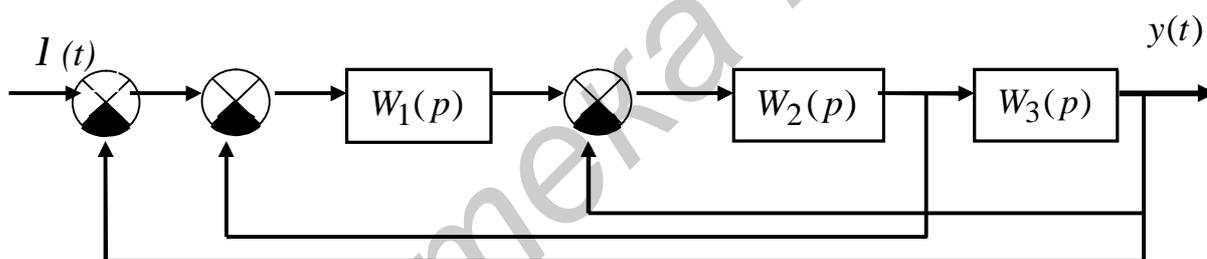


Рис. 1.5

5. Найти дифференциальное уравнение системы, схема которой изображена на рис. 1.6, относительно управляемой величины $y(t)$ по возмущающему воздействию $f(t)$, если

$$W_1(p) = K_1; W_2(p) = t p; W_3(p) = K_3; W_4(p) = \frac{K_4}{T_1 p + 1};$$

$$W_5(p) = \frac{K_5}{(T_2^2 p^2 + T_3 p + 1)}.$$

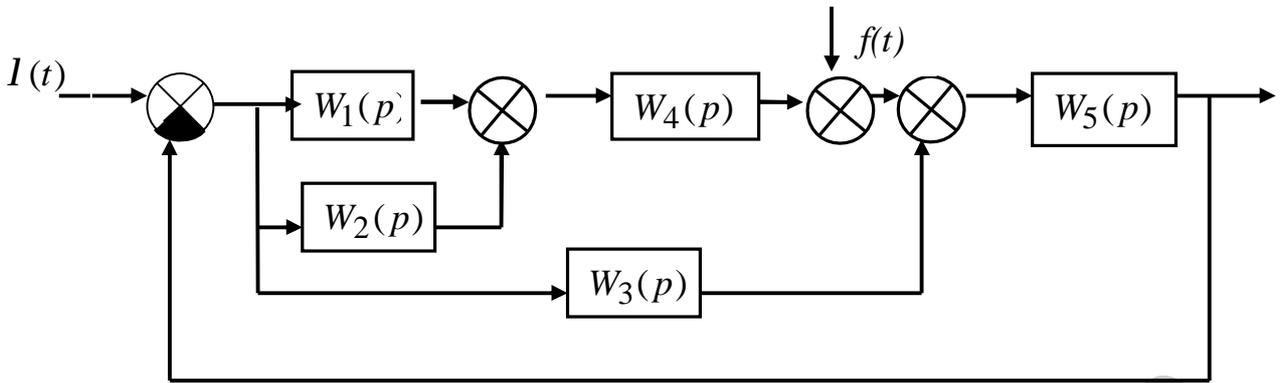


Рис. 1.6

6. Найти следующие передаточные функции автоматической системы, структурная схема которой изображена на рис. 1.7: разомкнутой системы по задающему воздействию $W_p(s)$; замкнутой системы по задающему воздействию $H_{Iy}(s)$; замкнутой системы по возмущению $f(t) - H_{fy}(s)$; относительно ошибки по задающему воздействию $H_{Ix}(s)$. Операторные коэффициенты передачи звеньев:

$$W_1(p) = K_1; W_2(p) = \frac{K_2}{T_1 p + 1}; W_3(p) = K_3; W_4(p) = \frac{K_4}{p}; W_5(p) = \frac{K_5}{p(T_2 p + 1)}.$$

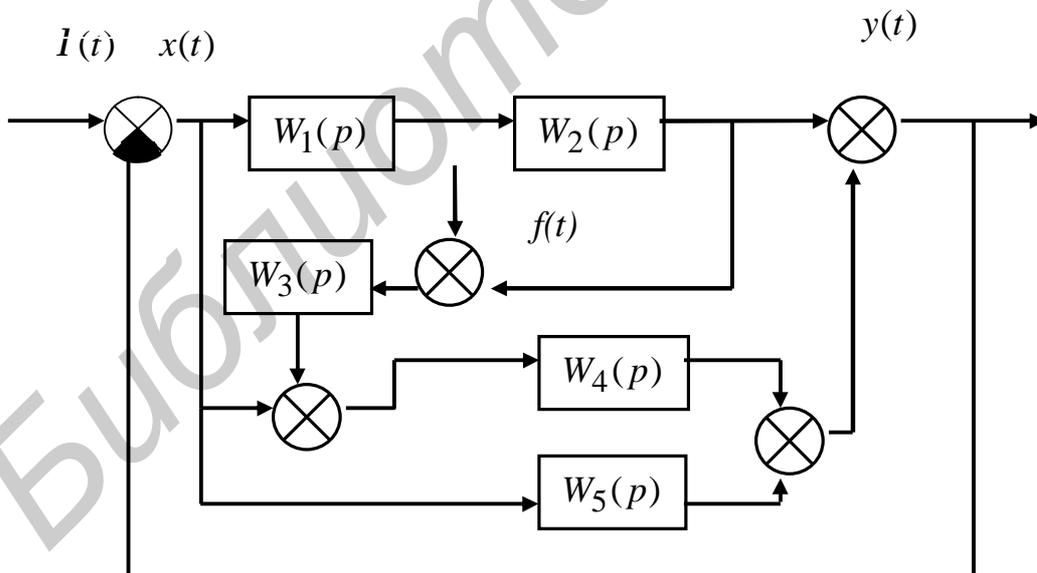


Рис. 1.7

7. Найти дифференциальные уравнения системы, структурная схема которой изображена на рис. 1.7, относительно управляемой величины $y(t)$ по задающему воздействию $x(t)$ и по возмущающему воздействию $f(t)$.

8. Найти дифференциальные уравнения системы, структурная схема которой изображена на рис. 1.7, относительно ошибки $x(t)$ по задающему воздействию $I(t)$ и по возмущению $f(t)$.

9. Найти передаточные функции многоконтурной системы, структурная схема которой изображена на рис 1.8.

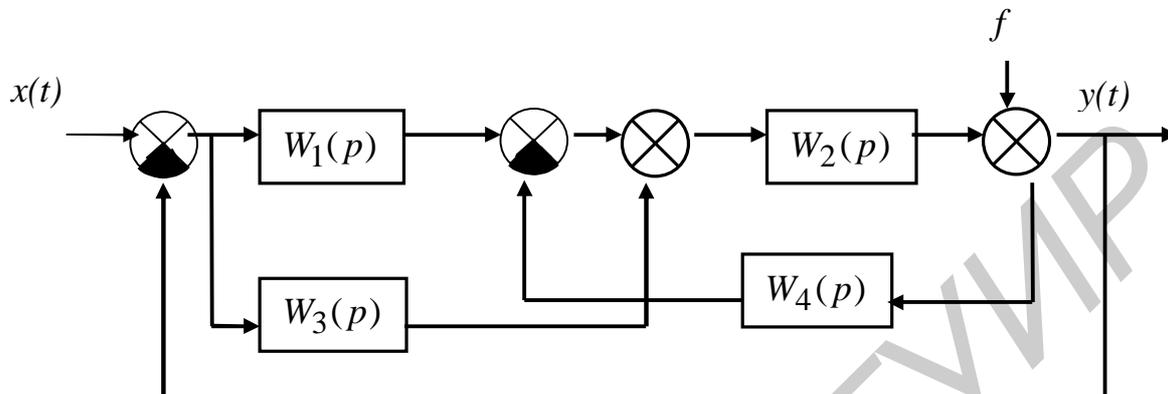


Рис. 1.8

10. По функциональной схеме частотно-фазовой автоподстройки, изображенной на рис. 1.9, где ЧД – частотный детектор, ФД – фазовый детектор, ФНЧ – фильтр низких частот, Σ – сумматор, УЭ – управляющий элемент, ПГ – перестраиваемый генератор, записать систему уравнений, описывающих ее поведение.

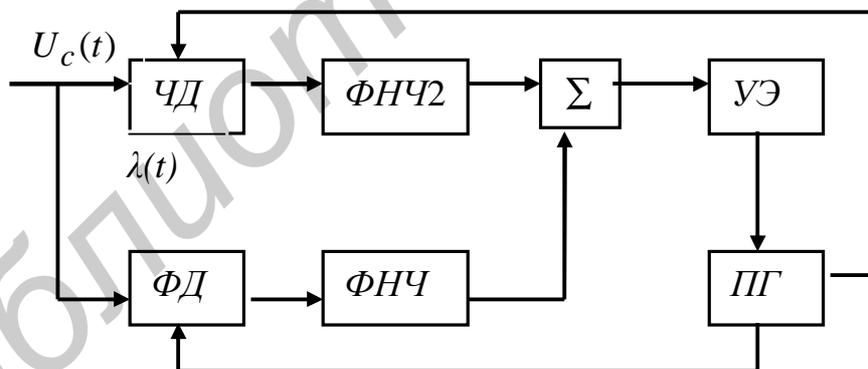


Рис.1.9

11. Составить структурную схему системы частотно-фазовой автоподстройки (см. рис. 1.9).

12. Для системы фазовой автоподстройки (ФАП), структурная схема которой изображена на рис. 1.10, найти дифференциальный оператор, связывающий нестабильность собственной частоты подстраиваемого генератора $h(t)$ и ошибку слежения $j(t)$, полагая, что $F(j) = S_{\Delta} j$.

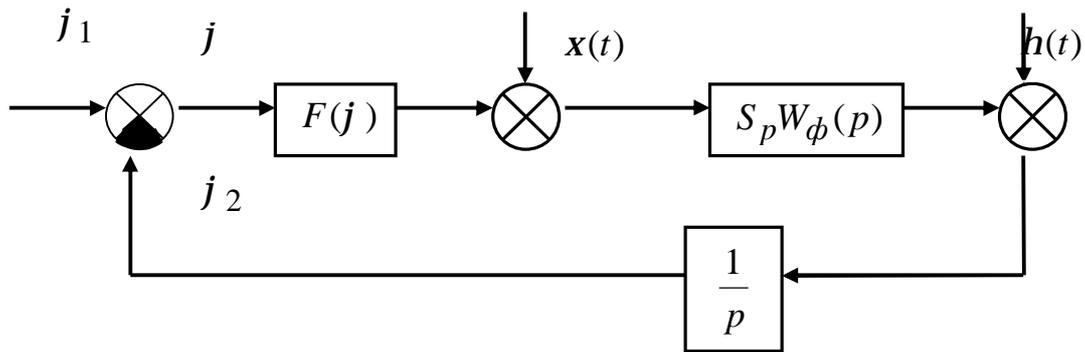


Рис. 1.10

13. Для системы ФАП с дополнительным фазовым модулятором, структурная схема которой изображена на рис. 1.11, найти при $F(j) = S_\Delta j$ дифференциальные операторы, устанавливающие связь между:

- воздействием $j_c(t)$ и процессами $j(t)$ и $j_{n.2}(t)$;
- возмущением $x(t)$ и теми же процессами $j(t)$ и $j_{n.2}(t)$.

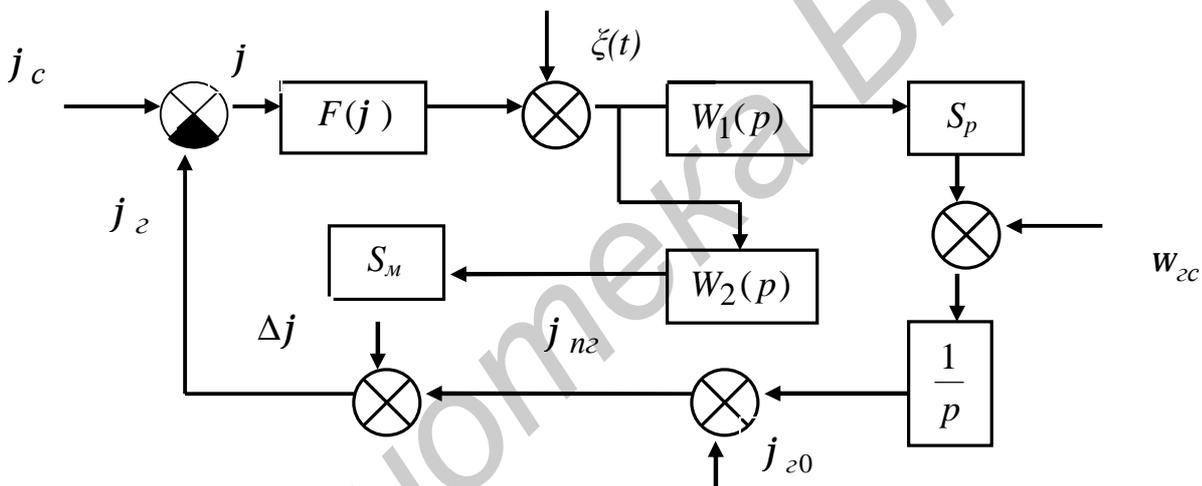


Рис. 1.11

14. Найти передаточные функции относительно управляемой величины $y(t)$ и ошибки $x(t)$ по задающим $I(t)$, $g(t)$ и возмущающему $x(t)$ воздействиям следящей системы, структурная схема которой изображена на рис. 1.12.

15. Для системы, структурная схема которой изображена на рис. 1.13, определить операторные коэффициенты передачи: 1) разомкнутой системы $W_p(p)$, 2) замкнутой системы $H_{1y}(p)$, $H_{1_{1y}}(p)$, 3) ошибки $H_{1x}(p)$, $H_{1_{1x}}(p)$.

16. Для системы (рис. 1.14) определить операторные коэффициенты передачи $W_p(p)$, $H_{1y}(p)$, $H_{1_{1y}}(p)$, $H_{1x}(p)$, $H_{fy}(p)$.

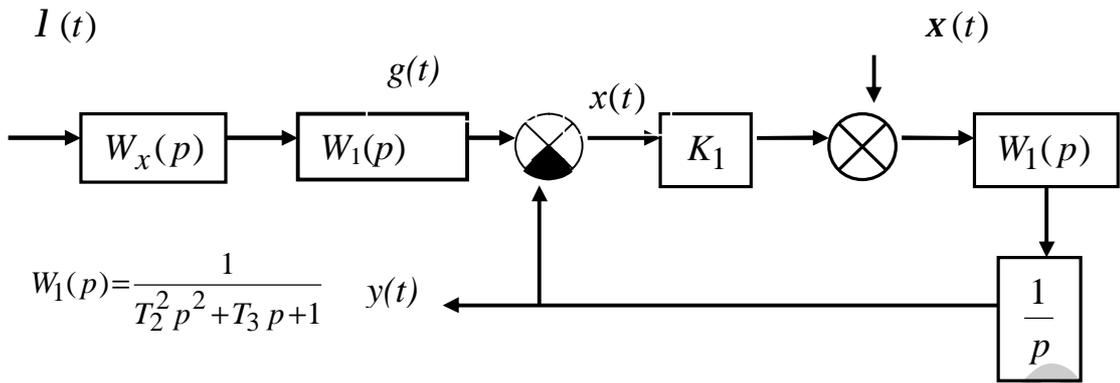


Рис. 1.12

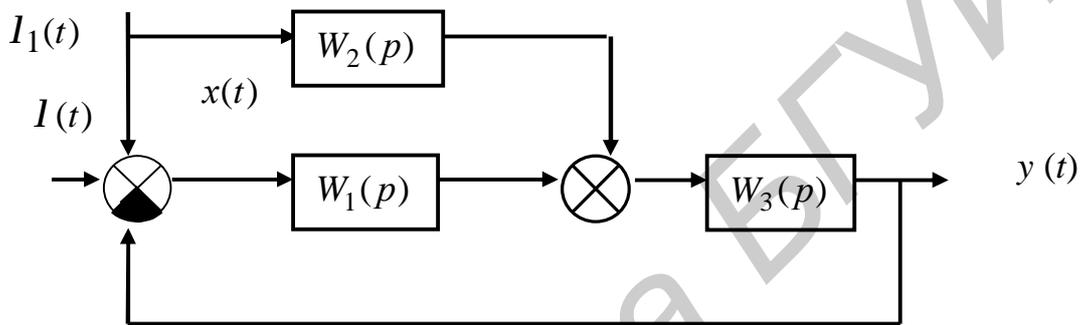


Рис.1.13

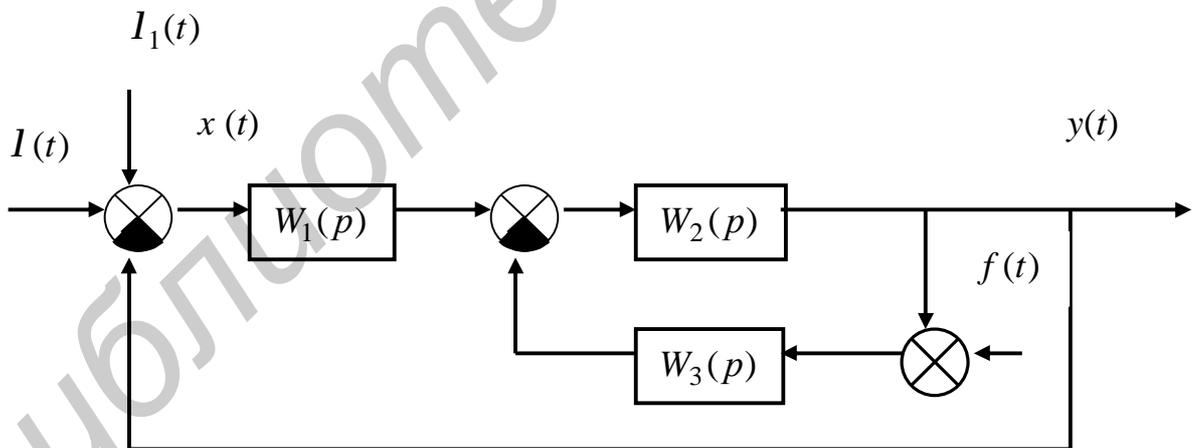


Рис.1.14

17. Операторный коэффициент передачи определяется выражением

$$H_{Iy}(p) = \frac{b_1 p + b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

Найти уравнение для системы в установившемся режиме при постоянном входном сигнале.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ

2.1. Краткие теоретические сведения

Устойчивость – способность системы возвращаться в состояние равновесия при отсутствии внешнего воздействия, которым система была выведена из этого состояния. Устойчивость связана с характером собственных колебаний в системе, определяемым общим решением однородного дифференциального уравнения, описывающего ее поведение.

Линейное дифференциальное уравнение замкнутой автоматической системы может быть записано в виде

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) y(t) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0) I(t)$$

или в операторной форме: $y(t) = H(p)I(t)$,

где

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_{m-i} p^{m-i}}{\sum_{k=0}^n a_{n-k} p^{n-k}}.$$

Здесь $H(p)$ – операторный коэффициент передачи замкнутой системы; $y(t)$ – управляемая величина; $I(t)$ – задающее воздействие; $p = \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования.

Характер собственных колебаний определяется общим решением однородного уравнения

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0) y(t) = 0,$$

которое при некратных корнях характеристического уравнения

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (2.1)$$

имеет следующий вид:

$$y_c(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{s_i t}, \quad (2.2)$$

где $s_i (i=1, n)$ – корни характеристического уравнения (2.1); $s = c + jw$; C_i – постоянные, определяемые начальными условиями.

Таким образом, как следует из (2.2), система устойчива, если корни характеристического уравнения отрицательны или имеют отрицательную вещественную часть; следовательно, они расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Устойчивость определяется с помощью алгебраических и частотных критериев устойчивости.

К алгебраическим критериям относится критерий Рауса–Гурвица, позволяющий определить устойчивость системы непосредственно по коэффициентам a_i характеристического уравнения (2.1), не вычисляя корней.

Сущность критерия состоит в следующем. Из коэффициентов характеристического уравнения (2.1) составляется квадратная матрица

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Из элементов матрицы, расположенных симметрично относительно главной диагонали, составляются и вычисляются определители Гурвица.

Необходимым и достаточным условием устойчивости системы является положительность значений всех n определителей при $a_n > 0$:

$$\Delta_1 = a_{n-1} > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{и т. д.}$$

К частотным критериям устойчивости относятся критерии Михайлова и Найквиста.

Критерий Михайлова позволяет определить устойчивость системы по величине полного приращения аргумента характеристического комплекса. Характеристический комплекс образуется из левой части характеристического уравнения (2.1) заменой комплексной переменной s на переменную jw :

$$D(jw) = a_n (jw)^n + a_{n-1} (jw)^{n-1} + \dots + a_0 = |D(jw)| e^{j\varphi(jw)},$$

где $|D(jw)|$ – модуль; $\varphi(jw)$ – аргумент характеристического комплекса.

Система устойчива, если полное приращение аргумента $\varphi(jw)$ при изменении w от $-\infty$ до $+\infty$ равно $n\pi$, где n – степень полинома $|D(jw)|$.

Если система устойчива, годограф характеристического комплекса при изменении частоты w от $-\infty$ до $+\infty$ будет поочередно пересекать мнимую и действительную оси, последовательно проходя все квадранты, а корни действительной и мнимой частей – перемежаться.

Критерий Найквиста основан на использовании годографа частотной передаточной функции разомкнутой системы. Годографом называется кривая, описываемая концом вектора $W(jw) = A(w)e^{jY(w)}$ на комплексной плоскости при изменении частоты от 0 до ∞ .

Для построения годографа разомкнутую систему представляют в виде последовательно соединенных элементарных звеньев.

При этом модуль $A(w)$ и аргумент $Y(w)$ частотной передаточной функции разомкнутой системы равны

$$A(w) = \prod_{i=1}^n A_i(w); Y(w) = \sum_{i=1}^n Y_i(w),$$

где $A_i(w), Y_i(w)$ – соответственно модуль и аргумент i -го звена; n – число элементарных звеньев.

В соответствии с критерием Найквиста замкнутая система устойчива, если годограф частотной передаточной функции разомкнутой системы при изменении частоты от 0 до ∞ не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$.

С помощью годографа определяются также запасы устойчивости по фазе j_3 и амплитуде A (рис. 2.1):

$$j_3 = j(w_{cp}) + 180; (|W(jw_{cp})| = 1); A = \frac{1}{|W(w_{kp})|}; (Y(w_{kp}) = -p).$$

Устойчивость может быть определена также по амплитудно-частотным и фазочастотным характеристикам. У системы, устойчивой в разомкнутом и замкнутом состояниях, на частоте среза w_{cp} $Y(w_{cp}) > -p$.

Для систем, устойчивых в разомкнутом состоянии, аналогичен анализ устойчивости систем по логарифмическим характеристикам. В частности, если $w_{cp} < w_{kp}$, то система устойчива; если $w_{cp} = w_{kp}$, то система находится на границе устойчивости; если $w_{cp} > w_{kp}$, то система неустойчива. Для минимально-фазовых систем условием устойчивости является наклон логарифмической амплитудно-частотной характеристики на частоте среза w_{cp} ,

равный 20 дБ/дек . Система обладает достаточным запасом устойчивости, если протяженность участка с наклоном, равным 20 дБ/дек , – не менее одной декады.

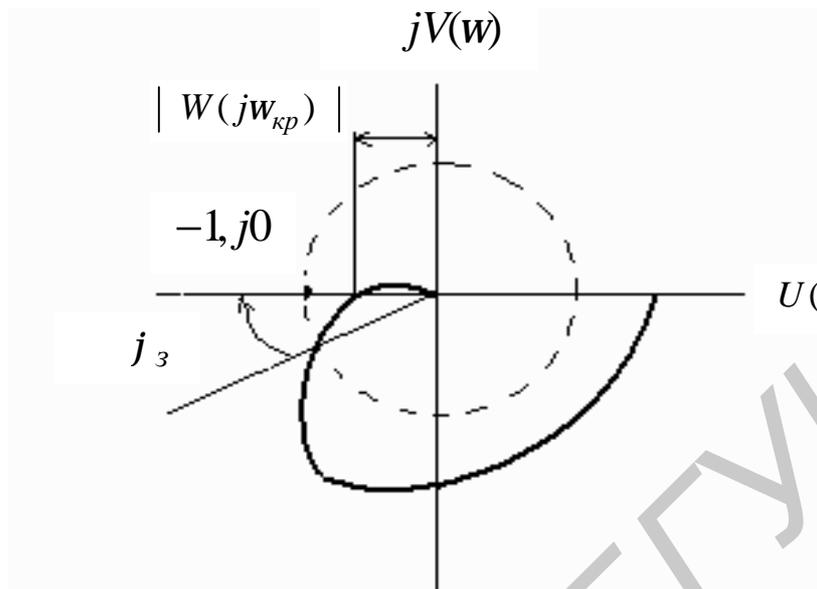


Рис. 2.1

2.2. Примеры

1. С помощью критерия Рауса–Гурвица определить устойчивость замкнутой системы, если операторный коэффициент передачи разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(p) = \frac{k}{p^2(1+Tp)},$$

где $k = 20 \text{ с}^{-2}$; $T = 0,01 \text{ с}$.

Решение. Используя выражение, определяющее связь между операторными коэффициентами передачи разомкнутой и замкнутой системами

$$H(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)},$$

определим операторный коэффициент передачи замкнутой системы

$$H(p) = \frac{k}{Tp^3 + p^2 + k}.$$

Составим характеристическое уравнение

$$Ts^3 + s^2 + k = 0.$$

Составим матрицу коэффициентов, вычислим определители Гурвица и проверим выполнение условия устойчивости:

$$\begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ k & 0 & T \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\Delta_1 = 1 > 0$; $\Delta_2 = -kT < 0$; $\Delta_3 = -k^2T < 0$, то система неустойчива.

О т в е т: замкнутая система неустойчива.

2. Операторный коэффициент передачи замкнутой автоматической системы имеет вид

$$H(p) = \frac{k}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + k},$$

где $k = 100 \text{ с}^{-1}$, $a_1 = 1$; $a_2 = 1 \text{ с}$; $a_3 = 0,02 \text{ с}^2$, $a_4 = 0,001 \text{ с}^3$.

Определить устойчивость системы с помощью критерия Михайлова.

Р е ш е н и е . Характеристический комплекс замкнутой системы имеет вид

$$D(jw) = a_4(jw)^4 + a_3(jw)^3 + a_2(jw)^2 + a_1(jw) + k.$$

Для построения кривой Михайлова определим вещественную и мнимую части функции $D(jw)$:

$$U(w) = \text{Re } D(jw) = k + a_4 w^4 - a_2 w^2 = 100 + 0,001 w^4 - w^2;$$

$$V(w) = \text{Im } D(jw) = w - a_3 w^3 = w - 0,02 w^3.$$

Вычислим $U(w)$ и $V(w)$ для ряда значений частоты. Результаты вычислений сведем в таблицу.

$w, \text{с}^{-1}$	0	5	7	10	11	40	100
$U(w)$	100	75,6	53,4	10	-6,4	$2,4 \cdot 10^4$	$9,9 \cdot 10^5$
$V(w)$	0	2,5	-0,14	-10	-15,6	$-1,2 \cdot 10^3$	$-2 \cdot 10^4$

По данным таблицы построим кривую Михайлова (рис. 2.2).

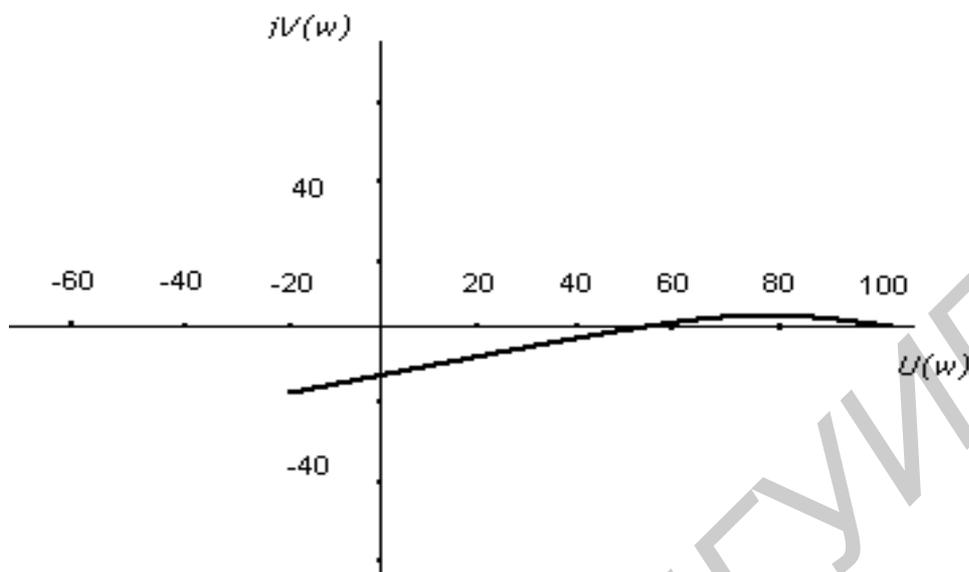


Рис. 2.2

О т в е т: система неустойчива, так как нарушается последовательность прохождения квадрантов.

Оценить устойчивость системы можно также по значениям корней действительной и мнимой частей характеристического комплекса.

Определим неотрицательные корни уравнения $V(w) = 0$:

$$w_1 = 0; \quad w_2 = 7,07.$$

Положительные корни уравнения $U(w) = 0$:

$$w_3 = 10,7; \quad w_4 = 29,7.$$

Таким образом, неотрицательные корни уравнений $U(w) = 0$ и $V(w) = 0$ не перемежаются. Это свидетельствует о нарушении последовательности прохождения квадрантов, а следовательно, о неустойчивости системы.

3. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{k}{s(1 + sT_1)(1 + sT_2)},$$

где $k = 200 \text{ с}^{-1}$; $T_1 = 0,02 \text{ с}$; $T_2 = 0,002 \text{ с}$.

Определить устойчивость системы, используя критерий Найквиста.

Р е ш е н и е. Определим $A(w)$ и $y(w)$:

$$A(w) = \frac{k}{w\sqrt{(1+(wT_1)^2)}\sqrt{(1+(wT_2)^2)}} = \frac{200}{w\sqrt{(1+(0,02w)^2)}\sqrt{(1+(0,002w)^2)}};$$

$$y(w) = -90^0 + y_1(w) + y_2(w); y_1(w) = -\arctg 0,02w; y_2(w) = -\arctg 0,002w.$$

Вычислим $A(w), y_1(w), y_2(w), y(w)$ и результаты сведем в таблицу.

w, c^{-1}	0	5	10	15	25	50	100	200
$y_1, град$	0	-5,7	-11,3	-16,8	-26,6	-45	-63,5	-76
$y_2, град$	0	-0,8	-1,2	-1,7	-2,8	-5,7	-11,3	-21,8
$y_3, град$	90	-96,5	-102,5	-108,5	-119,4	-140,7	-164,8	-187,8
$A(w)$		39,8	19,6	12,8	7,1	2,8	0,9	0,5

По данным таблицы построим годограф (рис. 2.3).

Система имеет один интегратор, поэтому знаменатель передаточной функции имеет один нулевой корень. Ветвь годографа дополним дугой бесконечно большого радиуса. Как видно из рисунка, годограф, дополненный дугой, не охватывает точку с координатами $(-1,0)$. Следовательно, замкнутая система устойчива.

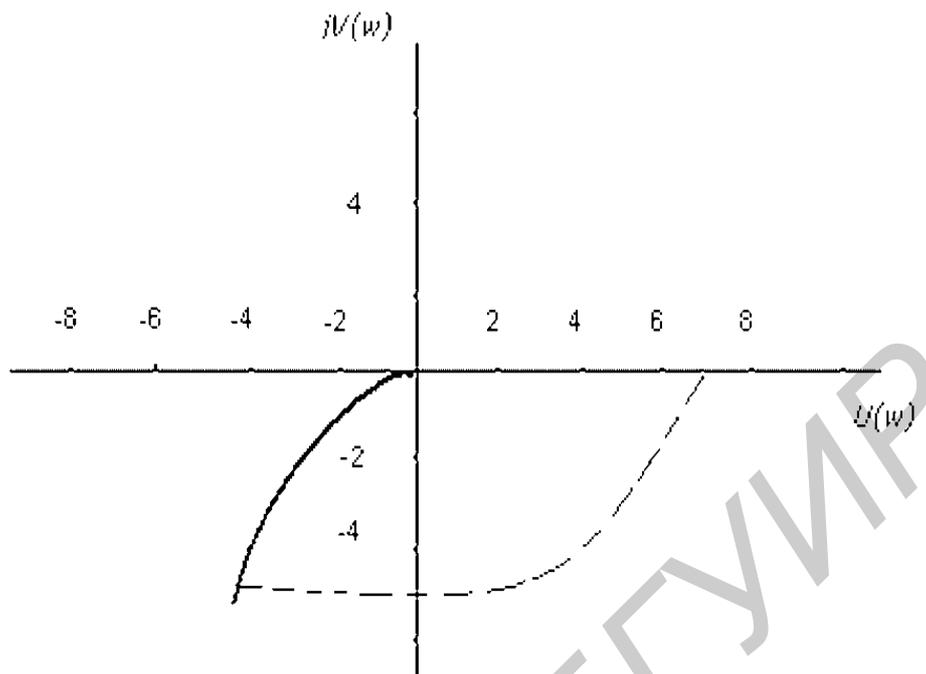


Рис. 2.3

2.3. Задачи и упражнения

2.3.1. Алгебраические критерии устойчивости

1. Характеристические уравнения систем имеют вид

$$a) s^3 + s^2 + 2s + 1 = 0;$$

$$б) 5s^3 + 2s^2 - 3s + 1 = 0.$$

Определить устойчивость систем.

2. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{K}{s(1+Ts)}.$$

Определить условия устойчивости замкнутой системы.

3. Определить устойчивость замкнутой системы, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{k}{s^2(1+Ts)}, \text{ причем } k = 20 \text{ с}^{-2}, T = 0,01 \text{ с}.$$

4. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$(k_1 - k_2)s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 = 0,$$

где $k_1 = k_2 = 25\text{с}^2, a_2 = 10\text{с}^2, a_3 = 5\text{с}, a_4 = 25$.

Определить устойчивость.

5. Передаточная функция замкнутой системы автоматического управления имеет вид

$$H(s) = \frac{k}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s + k},$$

где: а) $k = 50 \text{ с}^{-1}; T_1 = 0,2 \text{ с}; T_2 = 0,2 \text{ с};$ б) $k = 50 \text{ с}^{-1}; T_1 = 0,1 \text{ с}; T_2 = 0,02 \text{ с}.$

Определить устойчивость.

6. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{k}{(1 + Ts)^3},$$

где $k = 5; T = 0,5 \text{ с}.$

Определить устойчивость замкнутой системы.

7. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{k(1 + T_1 s)}{s^2(1 + T_2 s)}.$$

Определить условие устойчивости замкнутой системы.

8. Структурная схема системы приведена на рис. 2.4. Постоянные времени $T_1 = 0,01 \text{ с}; T_2 = 0,5 \text{ с}; T_3 = 0,05 \text{ с}.$ Определить критическое значение общего коэффициента усиления разомкнутой системы $k = k_1 k_2 k_3 k_4,$ при котором система находится на границе устойчивости.

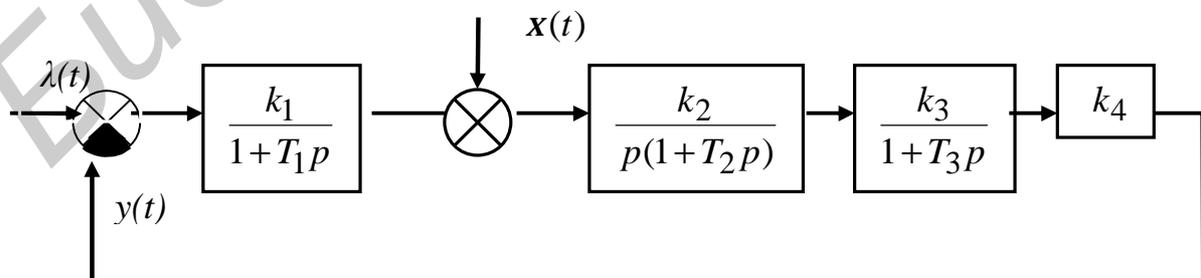


Рис. 2.4

9. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{k(1 + T_3s)}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s)},$$

где $T_1 = 0,2$ с; $T_2 = 0,02$ с.

Определить значения T_3 , при которых замкнутая система устойчива при любых $k > 0$.

10. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{k}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s)},$$

где $k = 500\text{с}^{-1}$; $T_1 = 0,02$ с.

Определить T_2 , при которой замкнутая система оказывается на границе устойчивости.

11. Структурная схема разомкнутой системы приведена на рис. 2.5. Определить устойчивость разомкнутой системы и условие устойчивости замкнутой системы при $k > 0$; $T > 0$.

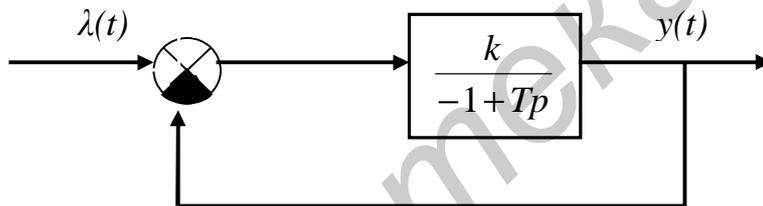


Рис. 2.5

12. Структурная схема системы приведена на рис. 2.6:

$k_1 = 1$; $k_2 = 5$; $T_1 = 0,5$ с; $T_2 = 2$ с.

Определить:

- устойчивость системы без корректирующего звена;
- величину t корректирующего звена из условия устойчивости.

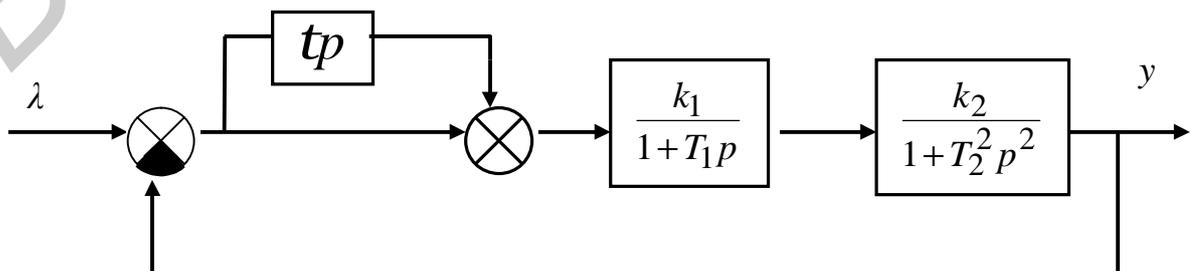


Рис. 2.6

13. Определить устойчивость системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\left[T_1 T_2 T_3 p^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) p^2 + (T_1 + T_2 + T_3) p + 1 + k \right] y(t) = \left[T_2 T_3 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1 \right] l(t),$$

где $T_1 = 0,02$ с, $T_2 = 0,01$ с, $T_3 = 0,05$ с, $k = 4$.

14. Определите устойчивость систем, свободные движения которых характеризуются следующими уравнениями:

а) $(0,01p^4 + 0,03p^3 + 0,2p^2 + p + 50) y(t) = 0$;

б) $(0,001p^5 + 0,02p^4 + 0,2p^3 + p^2 + 8p + 80) y(t) = 0$;

в) $[(1 + 0,5p)(1 + 0,3p)(1 + 0,2p) + 40] y(t) = 0$.

15. Определите критическое значение k в системе, свободное движение которой характеризуется следующими уравнениями:

а) $(0,01p^3 + 0,05p^2 + p + k) y(t) = 0$;

б) $[(1 + 0,3p)(1 + 0,02p)(1 + p + 0,01p^2) + k] y(t) = 0$.

16. Определите устойчивость системы, структурная схема которой приведена на рис. 2.7.

17. Оценить устойчивость системы, передаточная функция которой имеет вид

$$H_{1y}(s) = \frac{2 \cdot 10^4}{s^3 + 130s^2 + 3,2s + 2 \cdot 10^4}.$$

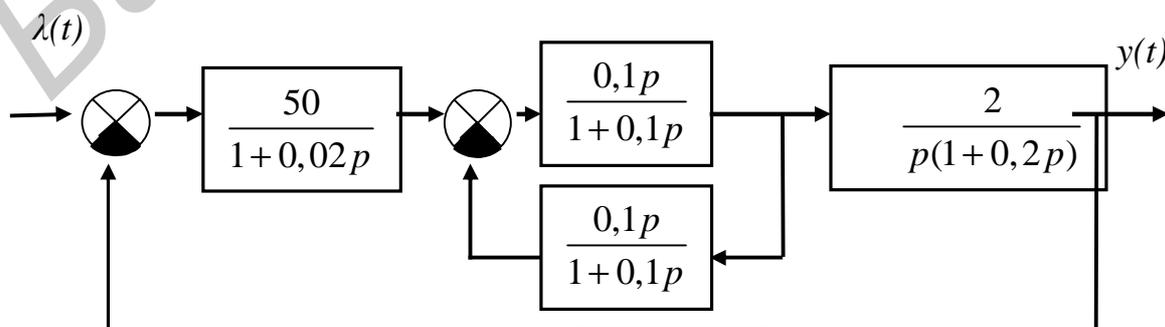


Рис. 2.7

2.3.2. Критерий устойчивости Михайлова

18. Система автоматического управления имеет характеристическое уравнение четвертого порядка. Кривая Михайлова приведена на рис. 2.8.

Определить устойчивость системы.

19. Система имеет характеристический полином шестой степени.

На рис. 2.9 приведены кривые Михайлова (1, 2, 3) для различных значений параметров. Определить устойчивость системы.

20. Автоматическая система имеет характеристическое уравнение четвертого порядка. Кривая Михайлова приведена на рис. 2.10.

Определить число корней характеристического уравнения с отрицательной вещественной частью.

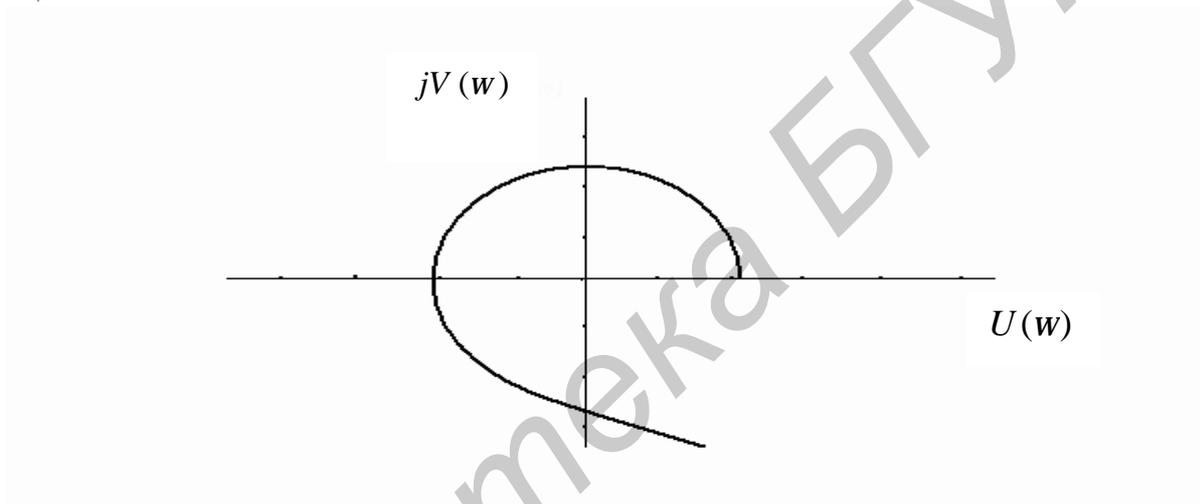


Рис. 2.8

21. Передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$H(s) = \frac{k}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + k},$$

где $k = 100\text{с}^{-1}$, $a_1 = 1\text{с}$, $a_2 = 1\text{с}$, $a_3 = 0,02\text{с}^2$, $a_4 = 0,001\text{с}^3$.

Определить устойчивость.

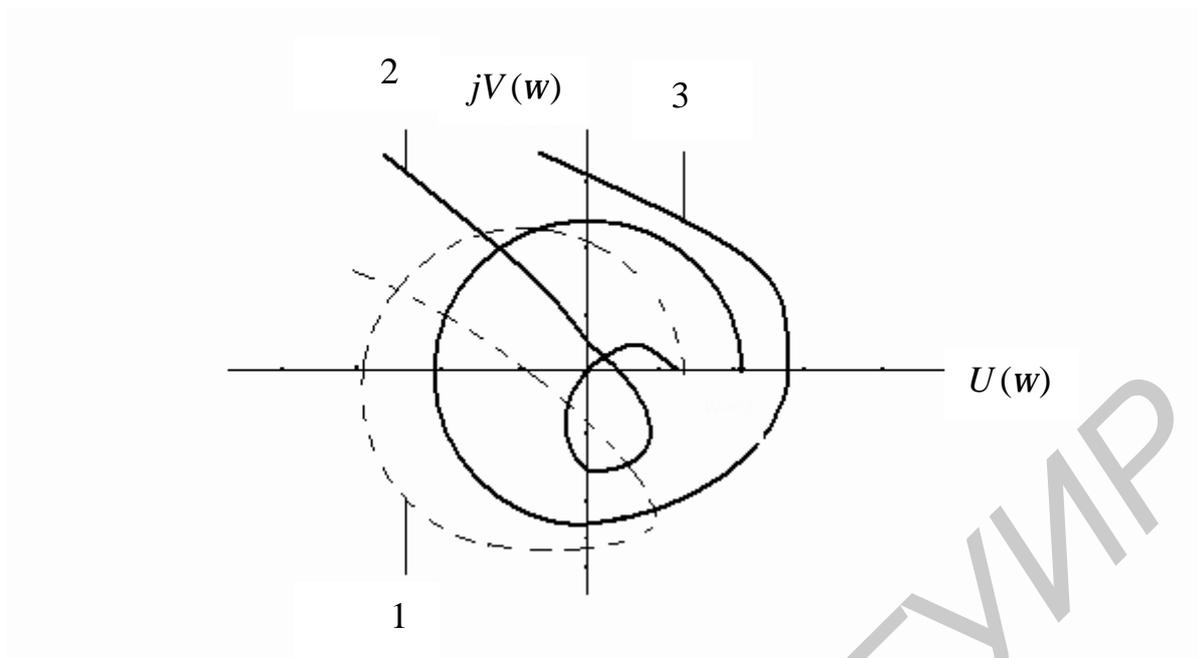


Рис. 2.9

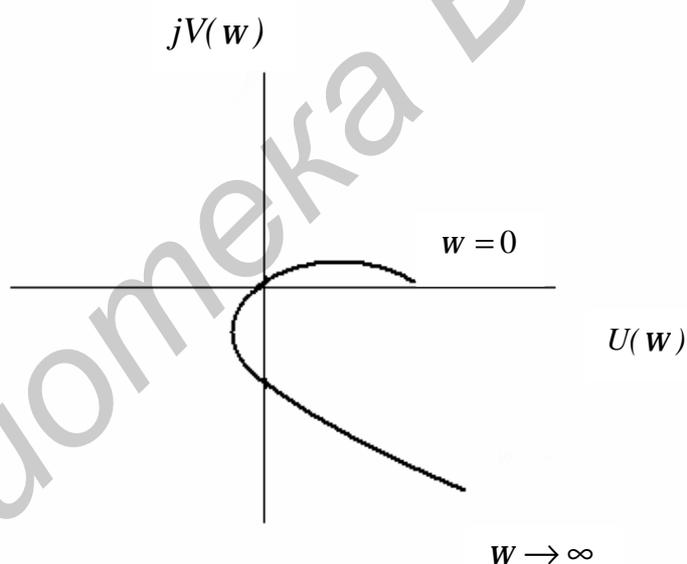


Рис. 2.10

22. Передаточная функция разомкнутой системы автоматического управления имеет вид

$$W_p(s) = \frac{k}{(1 + 2xT_1s + T_1^2s^2)(1 + T_2s)(1 + T_3s)},$$

где $T_1 = 0,05$ с, $T_2 = 0,2$ с, $T_3 = 0,01$ с; $x = 0,5$ – коэффициент демпфирования.

Определить значение k , при котором замкнутая система находится на границе устойчивости.

23. Структурная схема автоматической системы приведена на рис. 2.11, где $k = k_1 k_2 k_3 k_4 = 10$, $T = 0.2c$, $T_0 = 0.8$. Определить величину постоянной времени корректирующего устройства t , при которой система находится на границе устойчивости.

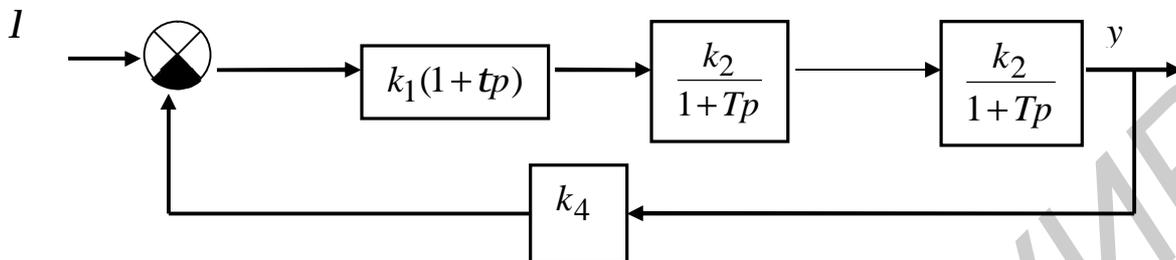


Рис. 2.11

24. Определить устойчивость системы, если ее характеристическое уравнение имеет вид

$$a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0,$$

где

$$a_5 = 0,15 \cdot 10^{-2} c^5; a_4 = 5 \cdot 10^{-2} c^4; a_3 = 0,6 c^3;$$

$$a_2 = 4 c^2; a_1 = 20 c, a_0 = 500.$$

25. Характеристический комплекс автоматической системы равен

$$D(j\omega) = 2 \cdot 10^{-4} (j\omega)^6 + 80 \cdot 10^{-4} (j\omega)^5 + 0,3 (j\omega)^4 + 1,24 (j\omega)^3 + 10 (j\omega)^2 + 40 (j\omega) + 34.$$

Определить устойчивость системы.

26. Определить устойчивость систем, свободные движения которых характеризуются уравнениями:

$$а) (0,001s^3 + 0,05s^2 + s + 20)Y(s) = 0;$$

$$б) (0,001s^4 + 0,03s^3 + 0,2s^2 + s + 50)Y(s) = 0.$$

27. Определить критическое значение коэффициента усиления k в системе, свободное движение которой характеризуется уравнением

$$0,002s^3 + 0,04s^2 + s + k = 0.$$

28. Определить устойчивость системы, структурная схема которой приведена на рис. 2.7.

2.3.3. Критерий устойчивости Найквиста

29. Амплитудно-фазовые характеристики устойчивых в разомкнутом состоянии систем приведены на рис. 2.12. Определить устойчивость замкнутых систем.

30. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W_p(s) = \frac{k(1 + t p)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_0^2 s^2)},$$

где $k = 1$, $t = 0,4$ с, $T_1 = 0,2$ с, $T_2 = 0,1$ с, $T_0 = 0,5$ с. Определить устойчивость замкнутой системы.

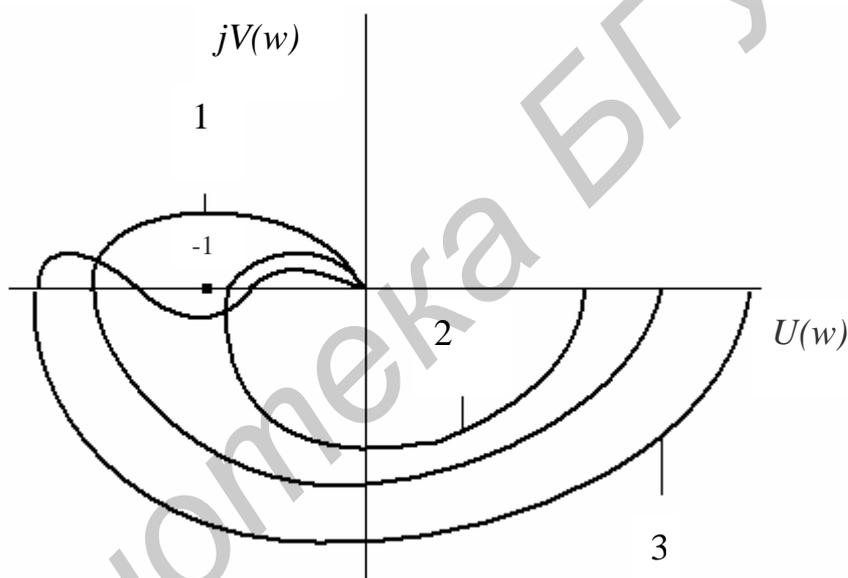


Рис. 2.12

31. Постройте годограф разомкнутой системы с частотной передаточной функцией

$$W_p(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)},$$

где $k = 100 \text{ с}^{-1}$, $T_1 = 0,25$ с, $T_2 = 1$ с, $T_3 = 0,01$ с. Определите устойчивость замкнутой системы.

32. Постройте годограф разомкнутой системы с частотной передаточной функцией

$$W_p(j\omega) = \frac{ke^{-j\omega t_3}}{(1 + j\omega T)},$$

где $k = 10$, $t = 0,1$ с, $T = 0,1$ с.

Определите устойчивость системы.

33. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{k}{s(1 + T_1s)s(1 + T_2s)},$$

где $k = 50$ с, $T_1 = 0,1$ с, $T_2 = 0,05$ с.

Определите устойчивость замкнутой системы.

34. Определить запас устойчивости по амплитуде для системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии равна

$$W_p(s) = \frac{10}{s(1 + 0,1s)(1 + 0,01s)}.$$

35. Для системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии равна

$$W_p(s) = \frac{20(1+sT)}{s^2(1 + 0,1s)}.$$

найти постоянную времени T , при которой запас устойчивости по амплитуде равен двум.

36. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W_p(s) = \frac{K}{s(1 + Ts^2)}.$$

Найти зависимость критического коэффициента усиления от постоянной времени T .

37. Оценить устойчивость системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии равна

$$W_p(s) = \frac{100}{s(1 + 0,05s)(1 + 0,02s)}.$$

38. Рассчитать критический коэффициент усиления в системе, передаточная функция которой в замкнутом состоянии равна

$$H(s) = \frac{100(1 + 0,25s)}{s(1 + s)(1 + 0,01s)}.$$

2.3.4. *Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы*

39. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{k(1 + t_p)}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s)},$$

где $k = 300 \text{ с}^{-1}$, $T_1 = 0,02 \text{ с}$, $T_2 = 0,005 \text{ с}$, $t = 0,0045 \text{ с}$.

Определить устойчивость системы.

40. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{k}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s)(1 + T_3s)},$$

где $k = 300 \text{ с}^{-1}$, $T_1 = 0,2 \text{ с}$, $T_2 = 0,05 \text{ с}$, $T_3 = 0,02 \text{ с}$.

Определить устойчивость замкнутой системы.

41. Структурная схема системы приведена на рис. 2.6. Определить устойчивость системы, если $k = k_1k_2 = 10$, $T_1 = 2 \text{ с}$, $T_2 = 0,05 \text{ с}$, $t = 0,1 \text{ с}$.

42. Определить устойчивость систем, имеющих передаточные функции в разомкнутом виде:

а)
$$W_p(s) = \frac{20(1 + 0,01s)}{s(1 + 0,2s)(1 + 0,02s)^2};$$

б)
$$W_p(s) = \frac{40(1 + 0,05s)}{(1 + 0,1s)(1 + 0,01s)(1 + 0,02s)^2}.$$

43. Оценить запасы устойчивости в системе, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии равна

$$W_p(s) = \frac{50(1 + 0,2s)}{s^2(1 + 0,02s)}.$$

44. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W_p(s) = \frac{k(1 + 0,5s)}{s(1 + 2s)(1 + 0,2s)^2}.$$

Определить коэффициент усиления, при котором запас устойчивости по амплитуде равен десяти.

3. АНАЛИЗ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

3.1. Краткие теоретические сведения

При анализе качества работы линейной системы исходят из того, что структурная схема и параметры динамических звеньев известны. Системы радиоавтоматики оценивают рядом качественных показателей, основными из которых являются точность работы, быстродействие и устойчивость.

3.1.1. Показатели качества переходного процесса

Переходный процесс в системе слежения обусловлен скачкообразным изменением задающего воздействия. Характеристики переходного процесса определяются по переходной функции. Переходной функцией называют реакцию системы на единичную ступенчатую функцию. Графическое изображение переходной функции называют переходной характеристикой.

Единичная ступенчатая функция $1(t)$ равна

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Переходная функция равна

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{H_{1y}(s)}{s} \right] = L^{-1} [Y(s)], \quad (3.1)$$

где $L[\cdot]$ – обратное преобразование Лапласа; $Y(s) = \frac{H_{1y}(s)}{s}$ – изображение выходного сигнала при нулевых начальных условиях.

Переходная функция может быть вычислена по формуле обращения:

$$q(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{H_{1y}(s)}{s} e^{st} ds = \sum_{i=0}^n \operatorname{Res} \frac{H_{1y}(s)}{s} e^{st} \Big|_{s=s_i}, \quad (3.2)$$

где s_i – полюсы подынтегрального выражения; n – число полюсов;

$\operatorname{Res} \Phi(s) \Big|_{s=s_i}$ – вычет функции $\Phi(s)$.

Для простого полюса вычет функции определяется по формуле

$$\operatorname{Res} H_{I_y}(s) \frac{e^{st}}{s} \Big|_{s=s_i} = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) H_{I_y}(s) \frac{e^{st}}{s}.$$

Реакция системы на воздействие в виде дельта-функции называется весовой, или импульсной переходной функцией:

$$h(t) = L^{-1} \left[H_{I_y}(s) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Res} H_{I_y}(s) e^{st} \Big|_{s=s_i} \right].$$

К основным показателям качества переходного процесса относятся следующие параметры (рис. 3.1):

– длительность переходного процесса t_p ;

– перерегулирование $H_m = \frac{(y_{\max} - y_{уст})}{y_{уст}} \cdot 100\%$;

– время установления первого максимума выходного сигнала t_y ;

– частота колебаний в переходном процессе $w = \frac{2p}{T}$, где T – период

колебаний.

Длительность переходного процесса определяют интервалом времени от момента подачи на вход сигнала в виде единичной функции до момента, после которого выполняется неравенство

$$|y(t) - y_{уст}| \leq d, \quad \text{где } d = (0,01 \dots 0,05) y_{уст}.$$

Ошибкой переходного процесса называется разность $e_n(t) = x(t) - x_{уст}$ ошибки $x(t) = H_{I_x}(p) I(t)$ переходного режима и установившейся (статической) ошибки $x_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$.

Величина

$$Q = \int_0^{\infty} e_n^2(t) dt = J_n[e_n(s)]$$

называется интегральной квадратичной оценкой качества переходного процесса.

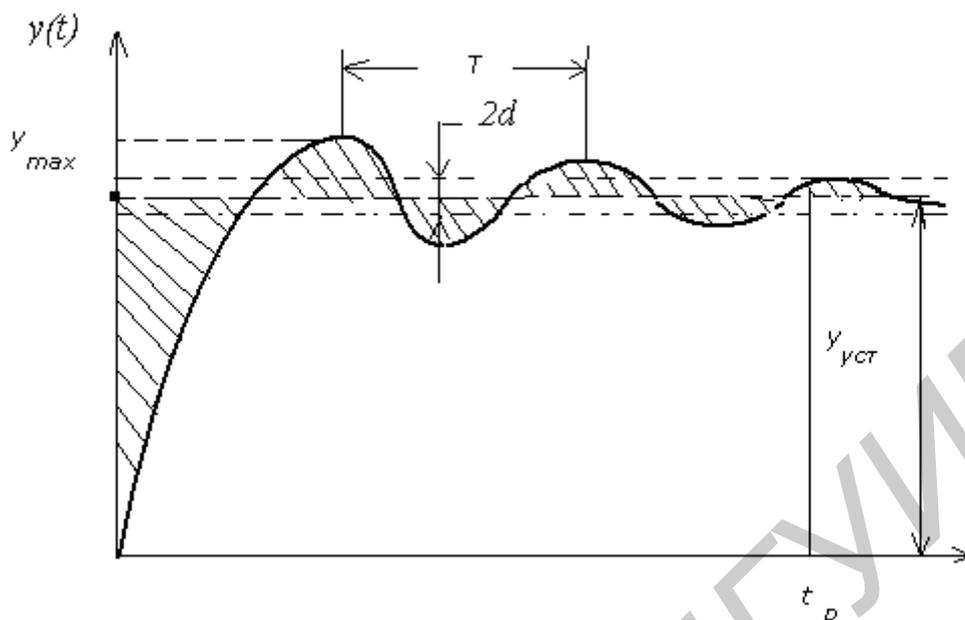


Рис. 3.1

Нахождение Q сводится к вычислению интеграла Парсеваля изображения ошибки $e(s)$, представленной в виде отношения полиномов

$$e(s) = \frac{l_0 + l_1 s + \dots + l_m s^m}{b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n}, \quad e(s) = \frac{H l x(s) - x_{уст}}{s}.$$

Некоторые значения $J_n[f(s)]$ даны в (4.5). Более полная таблица интеграла приведена в [3].

3.1.2. Анализ точности при регулярных воздействиях

Точность работы следящих систем характеризуется динамической ошибкой $x(t) = I(t) - y(t)$, т.е. ошибкой в установившемся режиме работы системы при действии на нее нестационарного сигнала. Задающее воздействие при этом часто описывают полиномом, являющемся аппроксимацией реальных воздействий на ограниченном интервале времени:

$$I(t) = \sum_{l=0}^n b_l t^l,$$

где b_l – постоянные величины.

В зависимости от вида передаточной функции фильтра системы эта ошибка может иметь конечное значение или изменяться с течением времени.

Если ошибка имеет конечное установившееся значение, для ее оценки используют теорию преобразований Лапласа, в частности, теорему о предельном значении оригинала:

$$x_{уст} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot H_{I_x}(s) \cdot \Lambda(s),$$

где $\Lambda(s) = L[I(t)]$; $H_{I_x}(s)$ – передаточная функция от воздействия к ошибке.

Если ошибка изменяется с течением времени, для ее расчета используется метод разложения ошибки по производным входного воздействия:

$$x(t) = C_0 I(t) + C_1 I'(t) + \frac{1}{2} C_2 I''(t) + \dots + C_l \frac{1}{l!} I^{(l)}(t), \quad (3.3)$$

где C_k – коэффициенты ошибки:

$$C_0 = -\int_0^{\infty} h(t) dt; \quad C_1 = -\int_0^{\infty} t h(t) dt; \quad C_2 = \int_0^{\infty} t^2 h(t) dt; \quad C_l = (-1)^l \int_0^{\infty} t^l h(t) dt.$$

Здесь C_0 – коэффициент ошибки по положению; C_1 – коэффициент ошибки по скорости; C_2 – коэффициент ошибки по ускорению; C_l – коэффициент ошибки по l -й производной входного воздействия.

Основные составляющие ошибки (3.3):

$C_0 I(t)$ – ошибка по положению; $C_1 I'(t)$ – ошибка по скорости;

$\frac{1}{2} C_2 I''(t)$ – ошибка по ускорению.

Нетрудно видеть, что

$$C_k = \left. \frac{dH_{I_x}^{(k)}(s)}{ds^k} \right|_{s=0}. \quad (3.4)$$

Для расчета коэффициентов ошибки можно воспользоваться рекуррентным выражением

$$C_k = \frac{k!}{a_0} \left(b_k - \sum_{i=1}^k a_i \frac{C_{k-i}}{(k-i)!} \right), \quad (3.5)$$

где a, b – коэффициенты полиномов числителя и знаменателя передаточной функции $H_{I_x}(s)$:

$$H_{I_x}(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}.$$

Коэффициенты ошибки могут быть также вычислены по формулам, составленным из коэффициентов полиномов числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы:

$$W_p(s) = \frac{k}{s^v} \left(\frac{d_m s^m + d_{m-1} s^{m-1} + \dots + d_1 s + d_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \right),$$

где k – добротность системы ; v – порядок астатизма.

Заметим, что если система имеет v - й порядок астатизма, то первые v коэффициентов ошибки равны нулю.

3.2. Примеры

1. Найти переходный процесс в системе ФАПЧ, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии определяется выражением

$$W_p(s) = \frac{K(1 + T_2 s)}{s(1 + T_1 s)},$$

где $T_2 = 0,04$ с, $T_1 = 0,1$ с, $K = 200$.

Р е ш е н и е. Передаточная функция замкнутой системы равна

$$H_{I_y}(s) = \frac{W_p(s)}{1 + W_p(s)} = \frac{200(1 + 0,04s)}{(1 + 0,1s)s + 200(1 + 0,04s)}.$$

Изображение величины изменения фазы сигнала генератора $Y(s)$ при скачкообразном изменении фазы входного сигнала $I(t) = \Delta j$ равно

$$Y(s) = H_{I_y}(s)X(s) = H_{I_y}(s) \cdot \frac{\Delta j}{s} = \frac{200(1 + 0,04s)}{0,1s^2 + 9s + 200} \cdot \frac{\Delta j}{s}$$

Полином знаменателя можно представить в виде

$$s(0,1 s^2 + 9 s + 200) = 0,1 (s + 40) (s + 50) s.$$

Полюсы системы $s_1 = -40$, $s_2 = -50$, $s_3 = 0$.

Тогда, применив теорему о вычетах, получим

$$q(t) = \Delta j [1 + 3e^{-40t} - 4e^{-50t}].$$

Ответ: $q(t) = \Delta j [1 + 3e^{-40t} - 4e^{-50t}]$.

2. Найти коэффициенты ошибки C_0, C_1, C_2 следящей системы с обратной связью и передаточной функцией разомкнутой цепи:

$$W_p(s) = \frac{K_1(1 + T_2s)}{s(1 + T_1s)(1 + T_3s)}.$$

Р е ш е н и е. Так как в составе передаточной функции имеется интегрирующее звено, $C_0 = 0$.

Передаточная функция от воздействия к ошибке равна

$$H_{1x}(s) = \frac{1}{1 + W_p(s)} = \frac{T_1T_3s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s}{T_1T_3s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + (1 + K_1T_2)s + K_1},$$

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = T_1 + T_3, \quad b_3 = T_1T_3;$$

$$a_0 = K_1, \quad a_1 = (1 + K_1K_2), \quad a_2 = (T_1 + T_3), \quad a_3 = T_1T_3.$$

По формуле (3.5) вычисляем коэффициенты ошибки:

$$C_0 = 0, \quad C_1 = \frac{1}{K_1}, \quad C_2 = \frac{(T_1 + T_3)}{K_1} - \frac{(1 - K_1T_2)}{K_1^2}.$$

Ответ: $C_0 = 0, C_1 = \frac{1}{K_1}, C_2 = \frac{(T_1 + T_3)}{K_1} - \frac{(1 - K_1T_2)}{K_1^2}$.

3. Найти интегральный квадратичный критерий качества переходного режима следящей системы с обратной связью. Передаточная функция разомкнутой цепи

$$W_p(s) = \frac{K(1 + Ts)}{s^2}.$$

На вход системы поступает задающее воздействие $I(t) = at$.

Решение. Передаточная функция ошибки по задающему воздействию равна

$$H_{1x}(s) = \frac{1}{1 + W_p(s)} = \frac{s^2}{s^2 + K(1 + Ts)}$$

Изображения задающего воздействия и ошибки равны

$$\Lambda(s) = L[at] = \frac{a}{s^2}; X(s) = \Lambda(s)H_{1x}(s) = \frac{a}{s^2 + K(1 + Ts)}$$

Установившееся значение ошибки равно

$$x_{уст} = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = 0.$$

Изображение ошибки переходного режима равно

$$e_n(s) = X(s) - x_{уст} = \frac{a}{s^2 + K(1 + Ts)}$$

Интегральный квадратичный критерий равен

$$Q = J_n[e_n(s)] = J_2 \left[\frac{a}{s^2 + KTs + K} \right].$$

Представляя $e_n(s)$ в виде отношения полиномов с коэффициентами для $n = 2$, находим

$$Q = \frac{a^2}{2K^2T}$$

3.3. Задачи и упражнения

3.3.1. Показатели качества переходного процесса

1. Найти изменение ошибки и показатели качества выходного процесса в системе ЧАП, представленной обобщенной структурной схемой (см. рис. 1.2), с

фильтром $W_\phi(p) = \frac{K}{1 + Tp}$ при $F(x) = S_\partial x$ и подаче на вход:

а) воздействия в виде дельта-функции; б) воздействия $x(t) = a$. Начальные условия в системе нулевые; $K = 300$, $T = 0,02$ с.

2. Решить задачу 1, приняв, что в системе используется фильтр с передаточной функцией

$$W_{\phi}(s) = \frac{K(1 + sT_1)}{[(1 + sT_2)(1 + sT_3)]}.$$

3. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W_p(s) = \frac{3}{(1 + 0,2s)(1 + 0,01s)}.$$

Определить переходную и импульсную переходную функции замкнутой системы.

4. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(s) = \frac{20}{s(1 + 0,1s)(1 + 0,01s)}.$$

Определить переходную и импульсную переходную функции замкнутой системы.

5. Передаточная функция разомкнутой следящей системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{K}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s)}.$$

При значениях постоянных времени $T_1 = 0,02$ с и $T_2 = 0,04$ с определить значение K , соответствующее минимуму квадратичной интегральной оценки при обработке ступенчатого воздействия $I(t) = a_0 1(t)$.

6. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{(K_1 + K_2s)}{s(1 + Ts)}.$$

При фиксированных значениях $T = 0,1$ с и $K_1 = 20c^{-1}$ определить значение коэффициента K_2 , соответствующее минимуму квадратичной интегральной оценки при подаче на вход задающего воздействия в виде единичной импульсной функции

$$I(t) = 1(t).$$

7. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{K}{s(1+Ts)}$$

При фиксированном $T = 0,02$ с определить оптимальное значение K , соответствующее минимуму квадратичной интегральной оценки.

8. Передаточная функция разомкнутой цепи имеет вид

$$W_p(s) = \frac{20}{s(1+0,1s)}$$

Найти переходную и импульсную переходную функции замкнутой цепи. Определить показатели качества переходного процесса.

3.3.2. Анализ точности при регулярных воздействиях

1. Передаточная функция замкнутой следящей системы имеет вид

$$H_{ly}(s) = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n}$$

Каковы условия получения: а) астатизма нулевого порядка; б) астатизма первого порядка; в) астатизма второго порядка?

2. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

Определить величину установившейся ошибки при скорости изменения задающего воздействия, равной v .

3. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{50(1+0,15s)}{s^2(1+0,02s)}$$

Определить первые три коэффициента ошибки, а также добротность по скорости и добротность по ускорению.

4. В статической системе регулирования (рис. 3.2) передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

Определить коэффициент передачи $Y(s) = m$ неединичной обратной связи, при котором система приобретает свойства системы с астатизмом первого порядка.

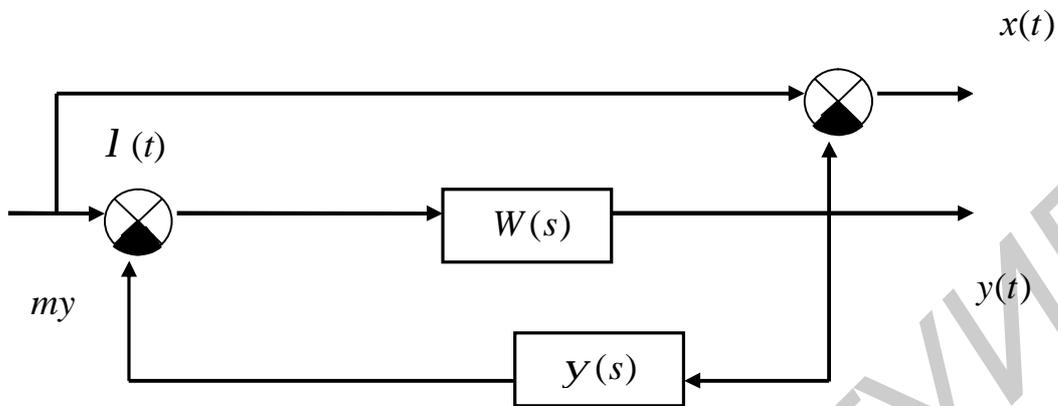


Рис. 3.2

5. Для предыдущей задачи определить первые два коэффициента ошибки.

6. В статической системе слежения (рис. 3.3) передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{K}{(1 + T_1s)(1 + T_2s)(1 + T_3s)}$$

Определить коэффициент передачи n масштабирующего устройства в выходной или входной цепи, при котором система приобретает свойства системы с астатизмом первого порядка относительно задающего воздействия.

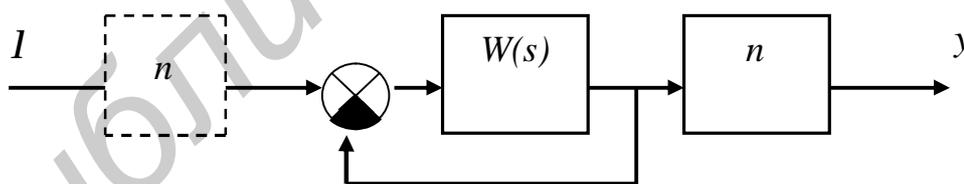


Рис. 3.3

7. Определить значение ошибки слежения при $t \rightarrow \infty$ в системе, показанной

на рис. 3.4, полагая $W_\phi(s) = \frac{K}{(1 + T s)}$, если: а) $x(t) = a$; б) $x(t) = at$.

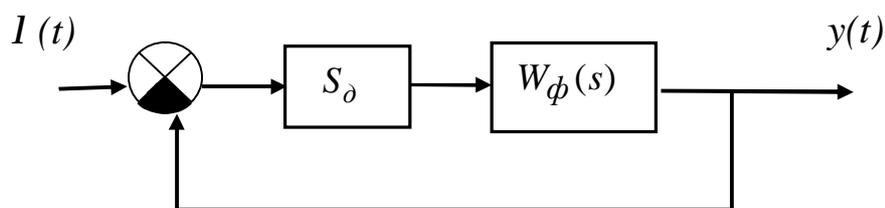


Рис. 3.4

8. Найти изменение ошибки в установившемся режиме в системе, изображенной на рис. 3.4, полагая: а) $W_\phi(p) = \frac{K}{p}$; б) $W_\phi(p) = \frac{K}{p^2(1+Tp)}$,

если $x(t) = a_2 t^2$.

9. Для системы ФАПЧ (рис. 3.5) найти в установившемся режиме разность фаз $j = j_1 - j_2$, обусловленную воздействием $h(t) = a$, $F(j) = S_\Delta j$, полагая, что

$$W_\phi(p) = \frac{1}{1+Tp}.$$

10. Определить установившееся значение ошибки $j(t)$ в системе, изображенной на рис. 3.5, если

$$x(t) = U; \quad W_\phi(p) = \frac{K(1+T_1p)}{p^2}; \quad j_1(t) = at; \quad h(t) = 0.$$

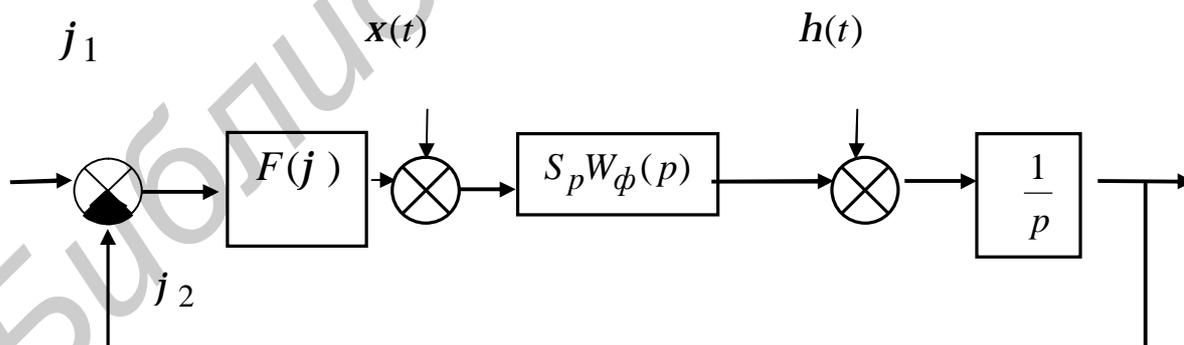


Рис. 3.5

11. Решить задачу 10, полагая $x(t) = Ut; j_1(t) = 0; h(t) = bt^2$.

12. В системе регулирования (рис. 3.6) для повышения порядка астатизма введены два изодромных звена $W_1(p)$ и $W_2(p)$. Определить первые пять коэффициентов ошибки.

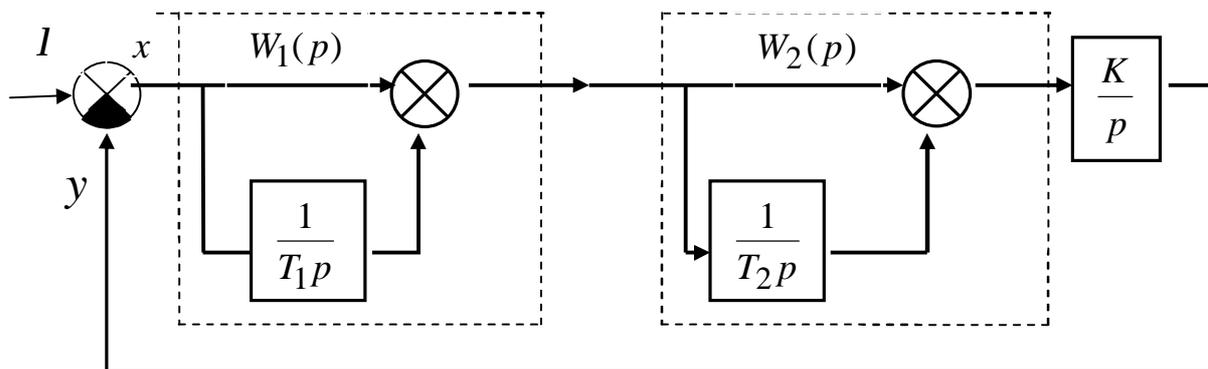


Рис. 3.6

13. Для системы частотно-фазовой автоподстройки (рис. 3.7) найти разность фаз j сигнала и подстраиваемого генератора в установившемся режиме, если передаточные функции фильтров одинаковы и равны

$$W_1(s) = W_2(s) = \frac{1}{1 + Ts}$$

Отличие частоты сигнала от собственной частоты подстраиваемого генератора равно Δf .

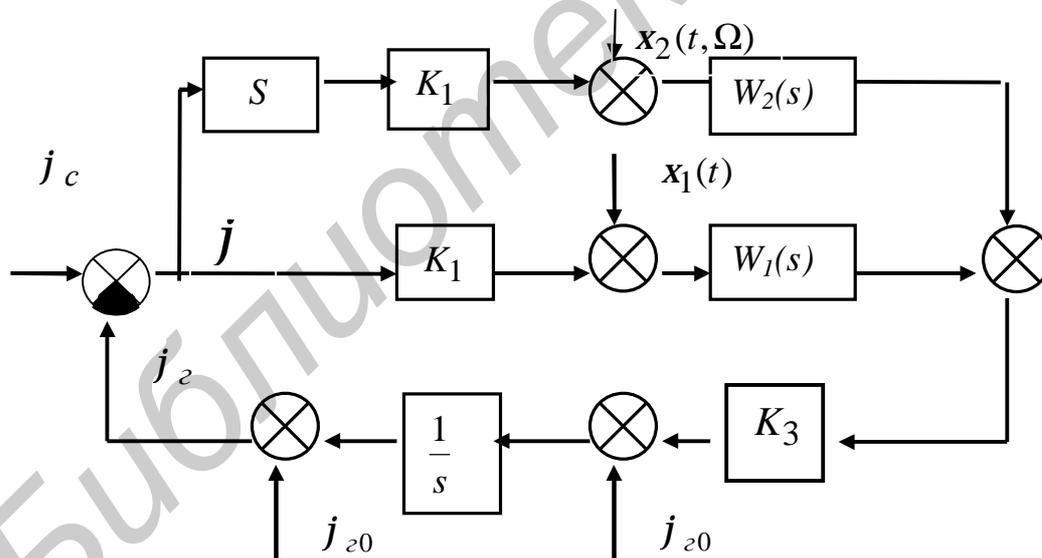


Рис. 3.7

14. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{K(1 + T_2s)}{s(1 + T_1s)(1 + T_3s)}$$

Найти ошибку в замкнутой системе при управляющем воздействии

$$I(t) = a_0 + a_1 t.$$

15. По передаточной функции разомкнутой системы

$$W_p(s) = \frac{K(1 + T_2 s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_3 s)}$$

определить первые три коэффициента ошибки.

16. Передаточная функция системы ФАП определяется выражением

$$H_{j_c j_e}(s) = \frac{2\chi w_n s + w_n^2}{s^2 + 2\chi w_n s + w_n^2}, \quad (3.6)$$

где w_n – собственная частота, а χ – затухание системы.

Найти установившуюся фазовую ошибку, если

$$\text{а) } j(t) = \Theta_0 + \Omega_0 t; \quad \text{б) } j(t) = \Theta_0 + \Omega_0 t + \Omega_1 t^2.$$

17. Определить передаточную функцию фильтра в контуре системы, передаточная функция которой определяется выражением (3.6).

18. Передаточная функция замкнутой системы равна

$$H_{Iy}(s) = \frac{20}{10^{-4} s^3 + 2 \cdot 10^{-2} s^2 + s + 20}.$$

Определить порядок астатизма системы и установившуюся ошибку при:

$$\text{а) } I(t) = 2t; \quad \text{б) } I(t) = 1(t); \quad \text{в) } I(t) = 2t^2.$$

4. АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

4.1. Краткие теоретические сведения

Задачей анализа является определение флюктуационной ошибки.

При анализе предполагается, что выходной процесс и ошибка слежения являются нормальными процессами в силу нормального характера случайной составляющей задающего воздействия и внутренних возмущений и нормализации процессов, обладающих широким спектром, узкополосным фильтром следящей системы.

Для вычисления дисперсии ошибки используется следующее выражение:

$$s^2 = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} S(w) |H(jw)|^2 dw, \quad (4.1)$$

где $S(w)$ – спектральная плотность процесса на входе системы; $|H(jw)|$ – модуль частотной передаточной функции от входного воздействия к исследуемому процессу.

Если интеграл (4.1) является дробно-рациональной функцией переменной w , его вычисление производится путем приведения к стандартному виду:

$$\frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} S(w) |H(jw)|^2 dw = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_n(jw)dw}{H_n(jw)H_n(-jw)} = J_n, \quad (4.2)$$

где $G_n(jw) = b_0(jw)^{2n-2} + b_1(jw)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}$ – полином, содержащий четные степени w ; $H_n(jw) = a_0(jw)^n + a_1(jw)^{n-1} + \dots + a_n$ – полином, корни которого лежат в верхней полуплоскости комплексной переменной; n – степень полинома.

Значения интеграла табулированы:

$$J_1 = \frac{b_0}{2a_0a_1}; \quad J_2 = \frac{-b_0 + \frac{a_0b_1}{a_2}}{2a_0a_1}; \quad J_3 = \frac{-a_2b_0 + a_0b_1 - \frac{a_0a_1b_2}{a_3}}{2a_0(a_0a_3 - a_1a_2)}. \quad (4.3)$$

Интеграл (4.1) может быть представлен в виде интеграла Парсеваля от произведения $\Phi(s)H(s)$. С этой целью спектральная плотность входного процесса представляется в виде произведения комплексно-сопряженных функций:

$$S(w) = \Phi(jw)\Phi(-jw).$$

Заменяя переменную jw на s , дифференциал dw на $\frac{ds}{j}$, получим

$$S^2 = \frac{1}{2pj} \int_{-j\infty}^{j\infty} \Phi(s)H(s)\Phi(-s)H(-s)ds = J_n[\Phi(s)H(s)]. \quad (4.4)$$

Произведение $\Phi(s)H(s)$ представляется в виде

$$\Phi(s)H(s) = \frac{a_0 + a_1s + \dots + a_ms^m}{b_0 + b_1s + \dots + b_ns^n}. \quad (4.5)$$

Табулированные значения интеграла Парсевала равны

$$J_1 = \frac{a_0^2}{2b_0b_1}; J_2 = \frac{a_1^2b_0 + a_0^2b_2}{2b_0b_1b_2}; J_3 = \frac{a_0^2b_2b_3(a_1^2 - 2a_0a_2)b_0b_3 + a_2^2b_0b_1}{2b_0b_3(b_1b_2 - b_0b_3)}. \quad (4.6)$$

Дисперсия может быть определена как произведение спектральной плотности и эквивалентной шумовой полосы системы. Эквивалентная шумовая полоса определяется как пропускания эквивалентной системы, имеющей прямоугольную амплитудно-частотную характеристику, одинаковое с исходной системой значение модуля частотной передаточной функции на нулевой частоте и одинаковую дисперсию на выходе при подаче на входы систем белого шума:

$$S^2 = S(0)2\Delta F_{\text{э}} |H(0)|^2.$$

Для астатических систем $H(0) = 1$, следовательно,

$$S^2 = S(0)2\Delta F_{\text{э}} = N_0\Delta F_{\text{э}},$$

где $N_0 = 2S(0)$ – односторонняя спектральная плотность; $\Delta F_{\text{э}}$ – эквивалентная шумовая полоса, равная

$$\Delta F_{\text{э}} = \frac{1}{2p|H(0)|^2} \int_0^{\infty} |H(jw)|^2 dw.$$

Спектральная плотность процесса на выходе дискриминатора зависит от характеристик дискриминатора и статистических характеристик шума на входе системы. Для системы ФАПЧ эта величина определяется выражением

$$S_x(0) = 2S_\delta^2 S_n(w_0)/U_c^2,$$

где U_c – амплитуда гармонического сигнала; $S_n(w_0)$ – спектральная плотность помехи на входе дискриминатора; S_δ – крутизна дискриминационной характеристики; w_0 – частота входного гармонического сигнала.

Если фазовому дискриминатору предшествует усилитель, охваченный АРУ, то выражение для спектральной плотности шума на выходе фазового дискриминатора имеет вид

$$S_x(0) = \frac{a^2 U_0^2 U_{cm}^2}{2S_{ш.вх}^2} \frac{1}{1+q^2} S_n(w_0),$$

где U_{cm} – стабилизированное эффективное значение напряжения на выходе усилителя с АРУ; $q^2 = \frac{P_c}{S_{ш.вх}^2}$ – отношение сигнал/шум; $U_0, S_n(w_0)$ – амплитуда сигнала и спектральная плотность шума на входе усилителя; $S_{ш.вх}^2$ – дисперсия шума на входе усилителя в пределах его полосы пропускания.

Выражения для расчета спектральных плотностей флюктуационных процессов на выходах частотного, временного и углового дискриминаторов можно найти в литературе [1].

4.2. Примеры

1. Определить дисперсию ошибки слежения в установившемся режиме в следящей системе (рис. 4.1), если

$$S_x(w) = S_x(0); \quad W_\phi(p) = \frac{ku_2(1+pT_1)}{p^2}.$$

Решение. Для расчета дисперсии воспользуемся выражением (4.1). Определим частотную передаточную функцию $H_{xx}(jw)$, заменив p на jw :

$$H_{xx}(jw) = \frac{-ku_2(1+jwT_1)}{(jw)^2 + S_g ku_2(1+jwT_1)}.$$

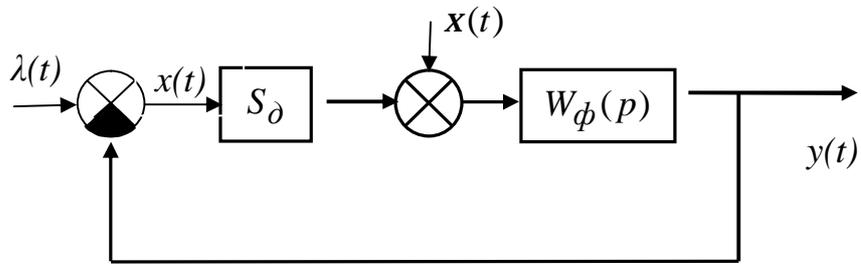


Рис. 4.1

В соответствии с (4.1), (4.2) дисперсия определяется выражением

$$S_x^2 = S_x(0)k^2u_2 J_2,$$

где

$$J_2 = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[1 - (jw)^2 T_1^2] dw}{|(jw)^2 + S_2 k u_2 + jw T S_g k u_2|^2}.$$

Определим коэффициенты, сравнив полученное выражение с (4.2):

$$n = 2; b_0 = -T_1^2; b_1 = 1; a_0 = S_\delta k u_2 T_1; a_2 = S_\delta k u_2.$$

Таким образом, в соответствии с (4.3): $J_2 = \frac{T_1^2 + \frac{1}{K_v}}{K_v T_1}; \quad K_v = S_g k u_2$.

О т в е т: $S_x^2 = \frac{S_x(0)}{S_\delta^2} \cdot \frac{K_v T_1^2 + 1}{2T_1}$.

2. Определить дисперсию ошибки слежения в установившемся режиме в системе (рис. 4.1), приняв, что $x(t) = 0$, $W_\phi(p) = \frac{k_u}{p}$, а воздействие является стационарным случайным процессом, спектральная плотность которого равна

$$S_1(w) = \frac{2m I_1^2}{m^2 + w^2}.$$

Р е ш е н и е. Определим передаточную функцию от воздействия I к ошибке x .

$$H_{1x}(s) = \frac{1}{1 + S_{\partial} W_{\phi}(s)} = \frac{s}{s + K_v}; \quad K_v = S_{\partial} k_u.$$

Представим спектральную плотность в виде произведения комплексно-сопряженных величин:

$$S_I(w) = \frac{s_I \sqrt{2m}}{m - jw} \frac{s_I \sqrt{2m}}{m + jw}.$$

Произведем замену jw на s . В соответствии с (4.4) получаем, что

$$S_x^2 = 2m S_I^2 J_2[\Phi(s) H_{1x}(s)],$$

где

$$\Phi(s) H_{1x}(s) = \frac{s}{(m + s)(K_v + s)} = \frac{s}{s^2 + (K_v + s)s + mK_v}.$$

Сравним полученное выражение с (4.5), определим коэффициенты

$$n = 2, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1; \quad b_0 = mK_v, \quad b_1 = m + K_v, \quad b_2 = 1.$$

$$\text{В соответствии с (4.6)} \quad J_2 = \frac{mK_v}{2mK_v(m + K_v)} = \frac{1}{2(m + K_v)}; \quad S_x^2 = \frac{mS_I^2}{m + K_v}.$$

$$\text{О т в е т: } S_x^2 = \frac{mS_I^2}{m + K_v}.$$

4.3. Задачи и упражнения

1. Для системы (см. рис. 4.1) найдите в установившемся режиме дисперсию ошибки слежения, вызванную шумом $x(t)$ при условии, что:

$$\text{а) } W_{\phi}(p) = \frac{k}{1 + pT_{\phi}}; \quad x(t) - \text{белый шум со спектральной плотностью } S_x(0);$$

$$\text{б) } W_{\phi}(p) = \frac{ku}{p}; \quad S_x(w) = \frac{2a^2 m}{w^2 + m^2}.$$

2. Найдите дисперсию рассогласования в установившемся режиме для системы (см. рис. 4.1), полагая, что шум $x(t)$ отсутствует, спектральная плотность воздействия $I(t)$ равна

$$S_I(\omega) = \frac{2a^2 m}{\omega^2 + m^2};$$

для следующих фильтров:

$$\text{а) } W_\phi(p) = \frac{k}{1 + pT_\phi};$$

$$\text{б) } W_\phi(p) = \frac{k_u(1 + T_1)}{p(1 + pT_2)}.$$

3. Для системы ФАПЧ (рис. 4.2) найдите в установившемся режиме дисперсию разности фаз j , создаваемую нестабильностью частоты подстраиваемого генератора. Крутизна дискриминационной характеристики равна S_δ ; операторный коэффициент передачи фильтра равен $W_\phi(p) = \frac{1 + pT_1}{1 + pT_2}$; спектральная плотность процесса dw_{zc} равна $S(0)$, крутизна регулировочной характеристики генератора равна S_p .

4. Для системы ФАПЧ (см. рис. 1.11) найдите дисперсию S^2 разности фаз на выходе фазового дискриминатора и дисперсию фазы подстраиваемого генератора. Воздействие $x(t)$ — белый шум со спектральной плотностью $S_x(0)$;

$$W_1(p) = W_2(p) = \frac{1}{1 + pT_\phi}; \quad F(j) = S_\delta j.$$

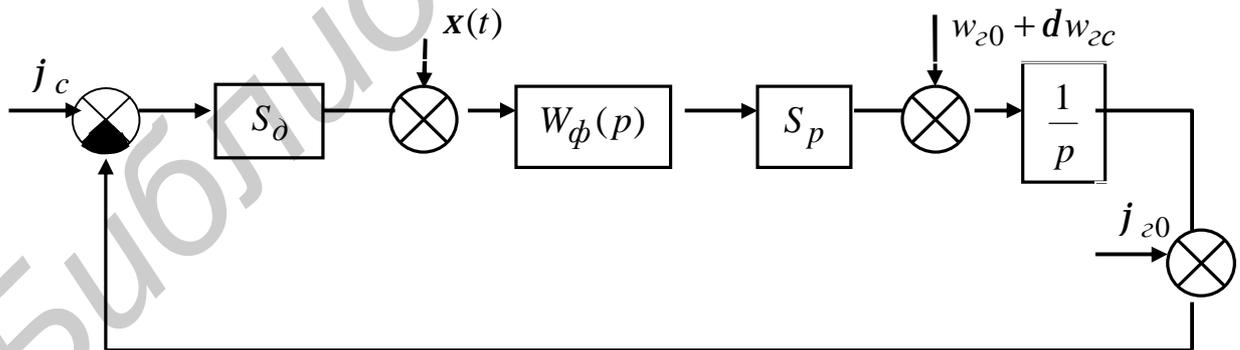


Рис. 4.2

5. Для системы (см. рис. 4.2) ФАПЧ найдите значение параметра k_u передаточной функции фильтра $W_\phi(s) = \frac{k_u}{s}$, обеспечивающего минимум среднего квадрата ошибки слежения в установившемся режиме:

$$\bar{x}^2 = m_x^2 + S_x^2 = \min ,$$

полагая, что $I(t) = at$. Воздействие $x(t)$ – белый шум спектральной плотностью $S_x(0)$, m_x – математическое ожидание ошибки слежения.

6. Рассчитать эквивалентную шумовую полосу пропускания системы (см. рис. 4.2), если

$$\text{а) } W_\phi(p) = \frac{k_u}{p(1+pT)}; \text{ б) } W_\phi(p) = \frac{k_u}{p}; \text{ в) } W_\phi(p) = \frac{k(1+pT_1)}{p^2(1+pT_2)};$$

$$\text{г) } W_\phi(p) = \frac{k(1+pT_1)}{p^2}.$$

7. Операторный коэффициент передачи разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(p) = \frac{k_{u2}(1+Tp)}{p^2},$$

где k_{u2} – общий коэффициент усиления системы; T – постоянная времени корректирующего звена.

На вход системы действует полезный регулярный сигнал $I = at + \frac{bt^2}{2}$ и помеха со спектральной плотностью N_0 . Найти значение постоянной времени T , соответствующее минимуму средней квадратической ошибки, а также значение средней квадратической ошибки.

8. Определить дисперсию ошибки слежения, если операторный коэффициент передачи разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(p) = \frac{k_{u2}(1+T_1p)}{p^2(1+T_2p)},$$

а спектральная плотность помехи на выходе дискриминатора – N_0 . Рассчитать эквивалентную шумовую полосу системы.

9. Операторный коэффициент передачи ФАП 2-го порядка задается выражением

$$H(p) = \frac{2\alpha w_n p + w_n^2}{p^2 + 2\alpha w_n p + w_n^2},$$

где w_n – собственная частота, а χ – затухание системы. Определить:

а) шумовую полосу системы; б) коэффициент затухания, который минимизирует S_j^2 в присутствии белого гауссового шума ($S_x(0) = N_0$).

10. Операторный коэффициент передачи ФАП 3-го порядка определяется выражением

$$H(p) = \frac{k(p^2 + ap + b)}{p^3 + kp^2 + akp + bk},$$

где k – коэффициент усиления разомкнутого кольца. Найти:

а) шумовую полосу системы; б) фильтр, который необходим для получения упомянутой выше функции замкнутого кольца.

11. Операторный коэффициент передачи разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{K}{p^2(1 + T_2 p)}.$$

Рассчитать суммарную среднюю квадратическую ошибку при действии на вход замкнутой системы управляющего воздействия со спектральной плотностью

$$S_x(w) = \frac{N_x}{1 + T_x^2 w^2}$$

и помехи со спектральной плотностью $S_n(w) = N_n$.

12. Вычислить суммарную среднюю квадратическую ошибку в системе с передаточной функцией

$$H(s) = \frac{K}{s + K},$$

на вход которой подается управляющее воздействие и помеха со спектральными

плотностями $S_x(w) = \frac{N_x}{1 + T_x^2 w^2}$, $S_n(w) = N_n$.

13. На вход системы с передаточной функцией в разомкнутом состоянии

$$W_p(s) = \frac{K}{s(1 + sT)}$$

действует стационарный сигнал и помеха со спектральными плотностями

$$\text{соответственно: } S_x(\omega) = \frac{N_x}{1 + T_x^2 \omega^2}, S_n(\omega) = N_n.$$

Определить оптимальное значение коэффициента усиления, соответствующего минимуму суммарной средней квадратической ошибки при $T = 0,1$ с; $T_x = 20$ с;

$$s_x^2 = 3,05 \cdot 10^{-2} \text{ рад}^2; N_n = 3,05 \cdot 10^{-6} \text{ рад}^2 \cdot \text{с}.$$

Литература

1. Первачев, С. В. Радиоавтоматика / С. В. Первачев. – М. : Радио и связь, 1982.
2. Первачев, С. В. Статистическая динамика радиотехнических следящих систем / С. В. Первачев, А. А. Валуев, В. М. Чиликин. – М. : Сов. радио, 1973.
3. Радиоавтоматика / В. А. Бесекерский [и др.]; под ред. В. А. Бесекерского. – М. : Высш. шк., 1985.
4. Коновалов, Г. Ф. Радиоавтоматика / Г. Ф. Коновалов. – М. : Высш. шк., 1990.
5. Артемьев, В. М. Справочное пособие по методам исследования радиоэлектронных следящих систем / В. М. Артемьев. – Минск : Высш. шк., 1984.
6. Ганкевич, С. А. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Радиоавтоматика» для студентов радиотехнических специальностей: В 2 ч. Ч.1 / С. А. Ганкевич, С. Б. Саломатин. – Минск : БГУИР, 1991.

СОДЕРЖАНИЕ

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ.....	3
1.1. Краткие теоретические сведения.....	3
1.2. Примеры.....	11
2. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ.....	19
2.1. Краткие теоретические сведения.....	19
2.2. Примеры.....	22
2.3. Задачи и упражнения.....	26
2.3.1. Алгебраические критерии устойчивости.....	26
2.3.2. Критерий устойчивости Михайлова.....	30
2.3.3. Критерий устойчивости Найквиста.....	33
3. АНАЛИЗ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ.....	36
3.1. Краткие теоретические сведения.....	36
3.1.1. Показатели качества переходного процесса.....	36
3.1.2. Анализ точности при регулярных воздействиях.....	38
3.2. Примеры.....	40
3.3. Задачи и упражнения.....	42
3.3.1. Показатели качества переходного процесса.....	42
3.3.2. Анализ точности при регулярных воздействиях.....	44
4. АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ.....	49
4.1. Краткие теоретические сведения.....	49
4.2. Примеры.....	51
4.3. Задачи и упражнения.....	53
Литература.....	57

Учебное издание

Ганкевич Сергей Антонович

РАДИОАВТОМАТИКА

Практикум
для студентов специальностей I-39 01 01 «Радиотехника»,
I-39 01 02 «Радиоэлектронные системы»,
I-39 01 04 «Радиоэлектронная защита информации »
дневной формы обучения

В 2-х частях

Часть 1

Линейные системы радиоавтоматики

Редактор Т. П. Андрейченко
Корректор Е. Н. Батурчик

Подписано в печать 07.09.2007.
Гарнитура «Таймс».
Уч.-изд. л. 3,0.

Формат 60x84 1/16.
Печать ризографическая.
Тираж 200 экз.

Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,6.
Заказ 230.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6