УДК 004.056.55; 621.391.26

КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕЧНЫХ ОБРАЗОВ И КЛАССИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА РАЗБИЕНИЯ ЧИСЕЛ

В.А. ЛИПНИЦКИЙ*, В.К. КОНОПЕЛЬКО, Н.В. СПИЧЕКОВА

*Военная академия Республики Беларусь
Минск-57,220057, Беларусь

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П.Бровки,6 Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 4 октября 2010

Изучается действие симметрической группы на строках и столбцах квадратных матриц порядка *n*, $n \geq 2$, с элементами 0 и 1, содержащих в точности *n* единиц. Устанавливается тесная связь проблемы классификации возникающих при этом действии орбит с проблемой разбиения чисел, классической в комбинаторике и теории чисел. С помощью формулы количества разбиений числа установлены границы для количества орбит. Сформулированы необходимые условия принадлежности матриц одной орбите.

Ключевые слова: распознавание образов, разбиение чисел, формула Эйлера, действие группы на множестве, матрица, симметрическая группа, орбита.

Постановка задачи

Данная работа является прямым продолжением исследований, начатых в [1]. Развивается общий подход к изучению действия группы $S_n^2 = S_n \times S_n$ – квадрата симметрической группы S_n – на множестве P_n всех квадратных $(0,1)$ – матриц порядка n, содержащих в точности n единиц. Неподвижные точки относительно действия S_n^2 отсутствуют – каждая орбита содержит более одного элемента. В то же время нет и полных S_n^2 – орбит – содержащих по $\left|S_n^2\right| = n!^{\,2}$ элементов. Исключение составляют лишь две полные орбиты – по одной из множеств P_3 и P_4 (см. [1]). Внутреннее строение S_n^2 – орбит характеризуется расположением единиц по строкам и столбцам их представителей. Описание же этого расположения впрямую взаимосвязано с классической проблемой разбиения чисел, хорошо известной в теории чисел и комбинаторике [2–4]. Данная статья посвящена установлению названной взаимосвязи.

Разбиения чисел

В дальнейшем будем использовать, взятое из монографии [2], следующее

Определение 1. *Разбиением натурального числа* n *называется последовательность положительных чисел, сумма которых равна* n. *Слагаемые данной суммы называются частями разбиения. Разбиения, отличающиеся только порядком частей, считаются равными.*

Важную роль в теории разбиений играет функция разбиений $p(n)$. Она определяется как количество всех не равных друг другу разбиений числа n. Если n отрицательно, то $p(n)=0$. Последовательность, состоящая из нулей, считается разбиением нуля. Поэтому $p(0)=1$. Значения $p(n)$ растут очень быстро с ростом n. Так, $p(1)=1$, $p(2)=2$,

$p(3)=3,\ p(4)=5,\quad p(5)=7,\quad p(6)=11,\ p(10)=42,\quad p(20)=627,\quad p(50)=204226,$ $p(200)=3972999029388$ [2].

Имеет место следующая рекуррентная формула, называемая формулой Эйлера, которая позволяет последовательно находить значения функции $p(n)$:

$$p(n)=p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+\ldots+(-1)^{q+1}\left(p\left(n-\frac{3q^2-q}{2}\right)+p\left(n-\frac{3q^2+q}{2}\right)\right)+\ldots$$

Если n невелико, то $p(n)$ легко вычислить, просто выписав все разбиения. Вывод этой рекуррентной формулы можно найти в [2].

Разбиения числа и векторы распределений единиц

Всякой матрице $A\in P_n$ соответствуют два вектора $\bar{s}_A=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ и $\bar{c}_A=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ распределений единиц по строкам и столбцам, здесь число s_i равно весу i - й строки данной матрицы, то есть количеству единиц в этой строке; число c_j равно весу j - ого столбца матрицы A. Так как $\sum_{i=1}^{n}s_i=\sum_{j=1}^{n}c_j=n,$ то таким образом каждой матрице $A\in P_n$ соответствует пара $(\bar{s}_A,\bar{c}_A)$ разбиений натурального числа n, если допускать в определении 1 и нулевые части..

При таком допущении, у матриц A и B, принадлежащих одной S_n^2 −орбите, пары разбиений $(\bar{s}_A,\bar{c}_A)$ и $(\bar{s}_B,\bar{c}_B)$ одинаковы. Ведь у пар $(\bar{s}_A,\bar{c}_A)$ и $(\bar{s}_B,\bar{c}_B)$ лишь компоненты $\bar{s}_A$ и $\bar{s}_B$, а также компоненты $\bar{c}_A$ и $\bar{c}_B$ могут отличаться друг от друга перестановкой координат.

По векторам $\bar{s}_A$ и $\bar{c}_A$ можно соответственно рассчитать числа str_A и col_A, равные числу ненулевых координат в $\bar{s}_A$ и $\bar{c}_A$.

Через J_A обозначаем S_n^2 – орбиту, порождённую матрицей $A\in P_n$.

Предложение 1. *Среди матриц орбиты J_A существует такая матрица K, у которой пара $(\bar{s}_K,\bar{c}_K)$ распределения единиц по строкам и столбцам имеет обратный лексикографический порядок координат своих компонент:* $s_1\ge s_2\ge\ldots\ge s_n$; $c_1\ge c_2\ge\ldots\ge c_n$.

Доказательство. Пара $(\bar{s}_K,\bar{c}_K)$ получается из пары $(\bar{s}_A,\bar{c}_A)$ подходящей перестановкой координат у каждого из векторов $\bar{s}_A$ и $\bar{c}_A$. Пусть перестановка $f\in S_n$ такая, что $f(\bar{s}_A)=\bar{s}_K$, а перестановка $g\in S_n$ такая, что $g(\bar{c}_A)=\bar{c}_K$. Переставим строки матрицы A в соответствии с требованиями подстановки f, а затем переставим у полученной матрицы столбцы в соответствии с требованиями подстановки g. В результате получим требуемую матрицу K Предложение 1 полностью доказано.

Замечание. Очевидно, для всех матриц данной орбиты J_A пара $(\bar{s}_K,\bar{c}_K)$ с обратным лексикографическим распределением единиц определена однозначно, хотя соответствующих матриц K может быть и несколько. Чтобы подтвердить принадлежность пары $(\bar{s}_K,\bar{c}_K)$ именно к орбите J_A будем впредь её обозначать через $(\bar{s}_K^A,\bar{c}_K^A)$.

Пример 1. Орбиту J_E, порожденную единичной матрицей $E\in P_n$, характеризует пара $(\bar{s}_K,\bar{c}_K)$ векторов $\bar{s}_K=\bar{c}_K=(1,1,\ldots,1)$. В качестве матрицы K здесь можно взять любую из $n!$ матриц S_n^2 −орбиты J_E.

Спектр распределения единиц в S_n^2 – орбитах

Определение 2. *Для каждой* S_n^2 – *орбиты* J_A *пара распределений* $(\bar{s}_K^A, \bar{c}_K^A)$ *из предложения 1 называется спектром распределения единиц по строкам и столбцам в этой орбите.*

Из предложения 1 и замечания к нему вытекает

Предложение 2. *Спектр* $(\bar{s}_K^A, \bar{c}_K^A)$ *является однозначной характеристикой каждой* S_n^2 – *орбиты* $J_A \in P_n$.

Возникает обратная задача: пусть $(\bar{s}, \bar{c}) = (s_1, s_2, ..., s_n;\ c_1, c_2, ..., c_n)$ – пара разбиений числа n, при этом $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_n;\ c_1 \geq c_2 \geq ... \geq c_n$; существует ли матрица $A \in P_n$ со спектром распределения единиц $(\bar{s}_K^A, \bar{c}_K^A) = (\bar{s}, \bar{c})$?

Ответ почти очевиден – не всегда. Например, не существует матрицы в P_n при $n \geq 2$, у которой бы все n единиц были бы расположены в первой строке и в первом столбце одновременно. Только такая матрица могла бы иметь в качестве спектра распределения единиц пару $(\bar{s}, \bar{c}) = (n, 0, \ldots, 0;\ n, 0, \ldots, 0)$ разбиений числа n.

Определение 3. *Пара* $(\bar{s}, \bar{c}) = (s_1, s_2, ..., s_n;\ c_1, c_2, ..., c_n)$, $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_n$; $c_1 \geq c_2 \geq ... \geq c_n$, *разбиений числа* n *называется реализуемой, если найдётся матрица* $A \in P_n$ *со спектром распределения единиц* $(\bar{s}_K^A, \bar{c}_K^A) = (\bar{s}, \bar{c})$.

Весовое содержание единиц и весовой портрет $(0, 1)$ – матрицы

Введем еще две характеристики матриц многообразия P_n.

Определение 4. *Пусть одна из единиц матрицы* $A \in P_n$ *расположена на пересечении* i – *й строки и* j – *го столбца этой матриц. Пусть* s_i – *вес* i - *й строки матрицы* A, *а* c_j – *вес* j - *го столбца этой матриц. Пара чисел* (s_i, c_J) *называется весовым содержанием названной единицы. Совокупность пар* (s_i, c_J) *всех единиц матрицы* A *называется ее весовым портретом.*

Непосредственно доказывается следующее

Предложение 3. *Если матрица* $A \in P_n$ *содержит единицу с весовым содержанием* (s, c), *то каждая матрица орбиты* J_A *содержит единицу с таким же весовым содержанием. У всех матриц* S_n^2 – *орбиты* J_A *одинаковый весовой портрет.*

Предложение 3 позволяет ввести следующее

Определение 5. *Весовым портретом* S_n^2 – *орбиты* J_A *называется весовой портрет любой матрицы этой орбиты.*

Необходимые признаки принадлежности матриц одной S_n^2 – орбите

Приведём небольшой и далеко не полный список общих свойств матриц, принадлежащих одной S_n^2 – орбите. Такие свойства являются необходимыми признаками принадлежности двух матриц одной орбите. Если для одной из них хотя бы один из необходимых признаков выполняется, а для другой – не выполняется, то эти матрицы должны принадлежать различным S_n^2 – орбитам.

Признак 1. *Если матрицы* A *и* B *принадлежат одной* S_n^2 – *орбите, то векторы* $\bar{s}_A$ *и* $\bar{s}_B$ *(векторы* $\bar{c}_A$ *и* $\bar{c}_B$*) отличаются друг от друга лишь перестановкой координат.*

Признак 2. *Если матрицы* A *и* B *принадлежат одной* S_n^2 *– орбите, то соответствующие им параметры* str_A *и* str_B *(*col_A *и* col_B*) равны между собой.*

Признак 3. *Если матрицы* A *и* B *принадлежат одной* S_n^2 *– орбите, то их весовые портреты одинаковы.*

Множество P_n является частью множества всевозможных квадратных матриц порядка n с коэффициентами 0 и 1. Эти коэффициенты можно интерпретировать как элементы поля Галуа из двух элементов $GF(2)=\{0,1\}$. Все поля Галуа данного порядка изоморфны друг другу, в частности, $GF(2)$ изоморфно полю классов вычетов $Z/2Z$. Этот изоморфизм и определяет однозначно арифметику поля $GF(2)$. Таким образом, P_n можно считать частью линейного пространства $M_n(GF(2))$ всех квадратных матриц порядка n с коэффициентами из поля $GF(2)$. Тогда строки любой матрицы $A\in P_n$ образуют систему векторов пространства строк с n координатами над полем $GF(2)$. Ранг этой системы векторов в линейной алгебре носит название ранга матрицы A.

Из свойств ранга матрицы непосредственно вытекает

Признак 4. *Если матрицы* A *и* B *принадлежат одной* S_n^2 *– орбите, то ранги этих матриц равны между собой.*

Данное условие позволяет ввести следующее

Определение 6. *Рангом* S_n^2 *– орбиты* $<A>$ *называется ранг любой из матриц этой орбиты и обозначается через* $r(<A>)$.

Введенные характеристики – спектр распределения единиц, ранг, весовой портрет – удобно использовать для распознавания S_n^2 – орбит.

Пример 2. Векторы распределений единиц по строкам и столбцам матриц

$$A=\begin{pmatrix}111100\\100000\\000010\\000000\\000000\\000000\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}011110\\100000\\100000\\000000\\000000\\000000\end{pmatrix}$$ одинаковы: $\bar{s}_A=\bar{s}_B=(4,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$; $\bar{c}_A=\bar{c}_B=(2,1,1,1,1,0)$.

Но $rang(A)=3\neq rang(B)=2,$ поэтому матрицы A и B принадлежат различным S_6^2 – орбитам, орбиты $<A>$ и $<B>$ различны.

Пример 3. Возьмем следующие три матрицы из множества P_6:

$$A=\begin{pmatrix}111000\\110000\\000100\\000000\\000000\\000000\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}111000\\100100\\010000\\000000\\000000\\000000\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}101100\\110000\\010000\\000000\\000000\\000000\end{pmatrix}.$$

У всех трех матриц ранг равен трем, одинаковы у них и спектры распределения единиц по строкам и столбцам: $\bar{s}_A=\bar{s}_B=\bar{s}_C=(3,2,1,0,0,0)$; $\bar{c}_A=\bar{c}_B=\bar{c}_C=(2,2,1,1,0,0)$.

В матрице A имеется единица с весовым содержанием (1, 1), у матриц B и C такой единицы нет. Следовательно, S_6^2 – орбита $J_A\neq J_B$ и $J_A\neq J_C$. Матрица B содержит единицу с весовым содержанием (2, 1), у матрицы C такой единицы нет. Следовательно, $J_B\neq J_C$. Все три орбиты J_A, J_B, J_C попарно различны.

Нижняя и верхняя оценки количества S_n^2 – орбит

Теорема 1. *Для каждого значения* n, $n \geq 2$, *мощность* $\left|P_n / S_n^2\right|$ *множества* P_n / S_n^2 *всех* S_n^2 *– орбит находится в границах*

$$p(n) \leq \left|P_n / S_n^2\right| \leq \frac{1}{n} C_{n^2}^n .$$

Доказательство. Выше отмечено, что не каждая пара разбиений числа n реализуется в качестве спектра распределения единиц той или иной матрицы множества P_n. Однако для любого разбиения числа n, взятого в качестве вектора $\bar{s}$, найдётся такое иное разбиение числа n, взяв которое в качестве вектора $\bar{c}$, мы получим реализуемую пару $(\bar{s}, \bar{c})$. Отсюда сразу же следует неравенство: $p(n) \leq \left|P_n / S_n^2\right|$.

Докажем, что каждая S_n^2 – орбита содержит не менее n матриц; тогда будет установлена вышеуказанная верхняя граница количества S_n^2 – орбит. В любой S_n^2 – орбите найдётся матрица A с ненулевой первой строкой. Если в матрице A все n единиц расположены в первой строке, то орбита $< A >$ имеет мощность n (см. в примере 1 [1]). Пусть в первой строке матрицы A расположено τ единиц, где $1 \leq \tau \leq [n/2]$ ($[k]$ – целая часть числа k). В орбите $< A >$ найдется матрица G, в которой первая строка содержит τ единиц, расположенных в первых τ столбцах. Тогда в силу предложения 2.5 [5] S_n^2 – орбита должна содержать не менее n матриц.

Пусть в первой строке матрицы A расположено μ единиц, где $n > \mu > [n/2]$. Тогда в матрице A найдётся другая строка, содержащая $1 \leq \tau \leq n - \mu$ единиц, следовательно $\tau < [n/2]$. Повторяя проведенные рассуждения, убеждаемся, что и в этом случае $\left|< A >\right| \geq n$.

Теорема 1 полностью доказана.

Заключение

Проблема классификации точечных образов сведена к описанию орбит на множестве всех квадратных $(0,1)$ – матриц с n единицами. Орбиты возникают под действием симметрической группы на строках и столбцах названных матриц. Установлена тесная взаимосвязь распределения единиц по строкам и столбцам с проблемой разбиения чисел. Известная рекуррентная формула Эйлера числа разбиений натуральных чисел послужила основой для установления нижней и верхней оценок количества исследуемых орбит. Введенные характеристики орбит – спектр распределения единиц, ранг, весовой портрет – удобно использовать для распознавания орбит.

POINT PATTERN CLASSIFICATION AND CLASSICAL NUMBER PARTITION PROBLEM

V.A. LIPNITSKI, V.K. KONOPELKO, N.V. SPICHEKOVA

Abstract

The action of the symmetric group on the rows and columns of square matrices of order n, $n \geq 2$, with elements 0 and 1, containing exactly n units is studied. A close relationship between the problem of classification of orbits arising in this action with the number partition problem, classical in the theory of combinations and number theory is established. Limits for the number of orbits are found by means of the formula for the number of partitions. The necessary conditions for matrices belonging to one orbit are formulated.

Литература

1. *Конопелько В.К., Липницкий В.А., Смолякова О.Г., Спичекова Н.В.* // Докл. БГУИР. 2010. № 5. С. 40–47.
2. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. М., 1982.
3. *Холл М.* Комбинаторика. М.,1970.
4. *Hardy G.H., Wright E.M.* An Introduction to the Theory of Numbers. Berlin, 1973.
5. *Липницкий В.А., Конопелько В.К.* Норменное декодирование помехоустойчивых кодов и алгебраические уравнения. Минск, 2007.