УДК 519.816

ПРИНЯТИЕ ОКОНЧАТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Б.Ю. РУТМАН

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь*

Поступила в редакцию 13 сентября 2010

Представлен метод принятия решений на базе матрицы выигрышей «условия – альтернативы». Описаны алгоритмы выбора наилучшей альтернативы с помощью свертки решений, получаемых критериями принятия решений, применяемых в условиях неопределенности, а также с привлечением метода Кемени-Снелла [1]. Приведен способ определения коэффициентов доверия частных критериев.

Ключевые слова: лицо, принимающее решение (ЛПР), система предпочтений лица принимающего решение (СП ЛПР), матрица выигрышей (МВ).

Введение

Применение математических моделей является одним из ведущих факторов повышения научного уровня управления. Однако качественная новизна и сложность современных технико-экономических проблем зачастую не позволяет осуществить полную математическую формализацию таких задач. Для их решения могут быть использованы экспертные методы, основанные на балльных оценках, позволяющие применять вероятностные, статистические и логические приёмы для анализа мнений руководителей и специалистов, а также для принятия решений на всех уровнях управления.

Общим недостатком методов суммирования баллов являются неограниченные компенсационные возможности. Поэтому для повышения надежности оценок большое значение имеет выявление связей и установление зависимостей между всеми значимыми факторами. Установление таких зависимостей возможно методом последовательных сравнений.

Ряд методов теории принятия решений основан на ранжировании матрицы выигрышей критериями принятия решений в условиях неопределенности. В ряде случаев для принятия окончательного решения рекомендуется учесть частоту выбора альтернатив критериями этой группы. Однако в этом случае может получиться так, что не удастся выделить лидирующую альтернативу.

Данная работа является развитием работ [2] и [3], в которых обсуждалась возможность множественного решения вследствие возможного применения различных критериев принятия решений в условиях риска и неопределенности для выбора наилучшей альтернативы. Работа ставит своей целью предложение методов выбора единственного оптимального решения, основанного на множестве критериев принятия решений. Первый подход опирается на коэффициенты доверия ЛПР тому либо иному критерию. Данные коэффициенты определяются методом парных сравнений и отражают количественный показатель степени уверенности ЛПР (в долях единицы) при решении задачи критериального анализа в правильности выбора при определении наилучшей альтернативы данным критерием по сравнению с рассматриваемым множеством критериев. Второй подход использует метод ранжирования Кемени-Снелла.

Исходные данные

Для построения матрицы выигрышей и принятия решения необходимы следующие исходные данные.

1. Набор конкурирующих альтернатив $n=1\ldots N$, где N – число альтернатив. Данные представляются вектор-столбцом.

2. Набор внешних условий реализации конкурирующих альтернатив m=1..M, где M – множество условий функционирования альтернатив. Данные представляются вектор-строкой.

3. Выигрыши (оценки) по каждой альтернативе при конкретных условиях функционирования. Данные сводятся в матрицу выигрышей.

4. Список критериев анализа матрицы выигрышей с целью выбора наилучшей альтернативы.

Критерий оптимальности есть правило, позволяющее сопоставить стратегии, характеризующиеся различной степенью достижения цели, и осуществить целенаправленный выбор единственной стратегии из множества допустимых стратегий.

5. Оценки предпочтений критериев в соответствии с СП ЛПР. Данные сводятся в матрицу предпочтений.

Этапы метода

Для сравнительного анализа конкурирующих альтернатив необходимо выполнить следующие шаги:

Шаг 1. определить набор конкурирующих альтернатив;

Шаг 2. определить множество внешних условий функционирования конкурирующих альтернатив;

Шаг 3. сформировать матрицу, каждый элемент которой содержит выигрыш, получаемый от реализации соответствующей альтернативы из пункта (1) в соответствующих внешних условиях из пункта (2);

Шаг 4. составить список критериев, привлекаемых для ранжирования матрицы выигрышей с целью выбора наилучшей альтернативы. В качестве таких критериев привлекаются критерии принятия решений в условиях риска и неопределенности;

Шаг 5. применить критерии принятия решений для ранжирования альтернатив;

Шаг 6. применить один из подходов для принятия окончательного решения.

В случае использования подхода, основанного на свертке критериальных решений, далее необходимо выполнить следующие шаги:

Шаг 1. рассчитать коэффициенты доверия критериев принятия решений с помощью метода парных сравнений;

Шаг 2. выбрать альтернативы, являющиеся решением хотя бы одного критерия;

Шаг 3. построить матрицу «лидеров», строками которой являются альтернативы-решения, а столбцами – критерии;

Шаг 4. заполнить матрицу выигрышами, приписанными соответствующим альтернативам соответствующими критериями (в случае, если критерий оперирует проигрышами, провести необходимое преобразование);

Шаг 5. свернуть выигрыши каждой альтернативы с помощью коэффициентов доверия в обобщенный выигрыш альтернативы;

Шаг 6. выбрать наилучшую из конкурирующих альтернатив. В качестве такой альтернативы выступает альтернатива с максимальным выигрышем.

В случае использования подхода, основанного на ранжировании методом Кемени-Снелла, далее необходимо выполнить следующие шаги:

Шаг 1. свести результаты ранжирования альтернатив критериями принятия решений в матрицу предпочтений;

Шаг 2. перейти от матрицы предпочтений к матрице рангов;

Шаг 3. перейти от матрицы рангов к матрице бинарных предпочтений;

Шаг 4. перейти от матрицы бинарных предпочтений к матрице потерь;

Шаг 5. произвести циклическую обработку матрицы потерь, результатом которой является выбор наилучшей альтернативы.

Расчет коэффициентов доверия

Для получения коэффициентов доверия критериям принятия решений из рассматриваемого множества необходимо воспользоваться достаточно простым методом ранжирования объектов. В качестве такого метода может выступать метод парных сравнений либо его развитие – метод последовательных сравнений. Согласно методу осуществляются парные сравнения целей во всех возможных сочетаниях. В каждой паре выделяется наиболее предпочтительная цель. Это предпочтение выражается с помощью оценки по какой-либо шкале. Оценки сводятся в матрицу **A**, обработка которой позволяет найти веса целей, характеризующие их относительную важность.

Воспользуемся методом парных сравнений для одного эксперта, в качестве которого выступает ЛПР. В качестве шкалы для выражения предпочтений выберем шкалу L=[0, 0.5, 1]:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1,\ \textit{если}\ K_i > K_j \ \ (\textit{предпочтение}), \\ 0{,}5,\ \textit{если}\ K_i \infty K_j \ \ (\textit{соизмерим}), \\ 0,\ \textit{если}\ K_i < K_j, \end{cases}$$

где a_{ij} – сравнительная оценка критериев K_i и K_j.

Для расчета коэффициентов доверия необходимо выполнение следующих пунктов:

1) составить матрицу парных сравнений критериев. В такой матрице все критерии $K_1..K_m$ записываются в одном и том же порядке дважды: в верхней строке и в первом столбце;

2) проставить на пересечении строки и столбца для двух сравниваемых критериев оценку a_{ij}. Если критерий K_i более предпочтителен, чем критерий K_j, то оценка равна 1, в противном случае – 0 соответственно. В случае соизмеримости критериев оценка равна 0,5. На главной диагонали матрицы проставляются нули или прочерки. Каждая пара критериев может сравниваться единожды или дважды (например, сначала a_{12}, а затем a_{21});

3) определить цену каждого критерия. Для этого необходимо каждой строке матрицы поставить в соответствие величину, характеризующую важность критерия и рассчитанную в соответствии со следующим соотношением:

$$V_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij},$$

где V_i – сумма элементов a_{ij} – строки матрицы;

4) рассчитать веса критериев, используя нормировку согласно представленному соотношению:

$$w_i = \frac{V_i}{\sum_{j=1}^{m} V_j} = \frac{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}}{\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{k} a_{jk}};\ \sum w_j = 1.$$

К матрице парных сравнений предъявляются следующие требования:

1) требование асимметричности: если на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца стоит 1 (0), то на пересечении *j*- й строки и *i*- го столбца должен стоять 0 (1);

2) требование транзитивности: если некий критерий K_i нравится респонденту больше, чем K_j, а K_i больше, чем K_l, то естественно ожидать, что критерий K_i будет ему нравиться больше, чем K_l.

В случае привлечения к расчету коэффициентов доверия нескольких экспертов, каждый из них заполняет матрицу **A**, а затем полученные индивидуальные предпочтения усредняются с учетом мнений всех экспертов. На основе результатов этого суммирования строится матрица **P**, показывающая процентное отношение случаев, когда критерий *i* оказался предпочтительнее критерия *j*, в общем числе полученных оценок. Элементы матрицы **P** обладают тем свойством, что

$$p_{ij} + p_{ji} = 1; \; p_{ij} = \frac{a_{ij}}{m},$$

где m – число экспертов. После получения обобщений матрицы предпочтений **P**, элементы которой p_{ij} представляют относительное число предпочтений, полученных от всех экспертов, по каждому критерию перед каждым другим критерием можно произвести их шкалирование.

Расчет обобщенного выигрыша

Применение различных критериев принятия решений в условиях неопределенности в общем случае приводит к ситуации, когда результаты ранжирования отличаются. Тем самым общая задача – выбор наилучшей альтернативы – остается не решенной. В этом случае необходимо перейти от матрицы выигрышей к матрице лидеров. В столбцах данной матрицы помещаются критерии, а в строках – альтернативы, оказавшиеся выбранными этими критериями на предыдущем этапе, тем самым отсекается большинство априорно невыигрышных альтернатив для текущего этапа. Матрица «лидеров» заполняется выигрышами альтернатив, полученных в результате применения критериев к матрице выигрышей. На следующем этапе наилучшая альтернатива выбирается на основании матрицы «лидеров» с помощью расчета обобщенных выигрышей альтернатив.

Обобщенный выигрыш рассчитывается следующим образом. Задана матрица выигрышей $\mathbf{E} = \|e_{ij}\|, i = 1..n, j = 1..m$, на основании которой с помощью вектора критериев $K = \{K_l\}, l = 1..k$ строится матрица «лидеров» $\mathbf{R} = \|r_{il}\|, i = 1..n, l = 1..k$, где n – число альтернатив, m – число внешних условий, а k – число критериев оценки альтернатив. Тогда обобщенный выигрыш каждой альтернативы W_i рассчитывается с использованием следующего соотношения:

$$W_i = \sum_{l=1}^{k} \alpha_l \cdot r_{il}$$

где α_l – коэффициенты доверия критериям ранжирования альтернатив, причем $\alpha_l \in [0;1]$. Исходя из данного соотношения следует, что обобщенный выигрыш есть математическое ожидание выигрыша, получаемого при выборе альтернативы различными критериями.

В условиях неопределенности наиболее часто используют критерии принятия решений [4]:

1) критерий Вальда (минимаксный критерий), определяемый соотношением (1);
2) критерий максимакса, определяемый соотношением (2);
3) критерий Сэвиджа, определяемый соотношением (3);
4) критерий Гурвица, определяемый соотношением (4);
5) критерий произведений, определяемый соотношением (5).

$$Z_B = \max_i e_{ir}; \; e_{ir} = \min_j e_{ij}; \; E_0 = \{E_{i0} \mid E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \min_j e_{ir}\} \quad (1)$$

$$Z_{MM} = \max_i e_{ir}; \; e_{ir} = \max_j e_{ij}; \; E_0 = \{E_{i0} \mid E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \max_j e_{ir}\} \quad (2)$$

$$Z_S = \min_i e_{ir} = \min_i [\max_j (\max_i e_{ij} - e_{ij})]; \; e_{ir} = \max_j a_{ij} = \max_j (\max_i e_{ij} - e_{ij}); \; a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij};$$
$$E_0 = \{E_{i0} \mid E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \min_i e_{ir}\} \quad (3)$$

$$Z_{HW} = \max_i e_{ir}\,;\, e_{ir} = c\min_j e_{ij} + (1-c)\max_j e_{ij}\,;$$

$$E_0 = \{E_{i0} \mid E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i [c\min_j e_{ij} + (1-c)\max_j e_{ij}] \wedge 0 \le c \le 1\} \qquad (4)$$

$$Z_P = \max_i e_{ir}\,;\; e_{ir} = \prod_j e_{ij}\,;\; E_0 := \{E_{i0} \mid E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \prod_j e_{ij} \wedge e_{ij} > 0\} \qquad (5)$$

В случае применения критериев, описанных соотношениями (1)–(5), для принятия решения обобщенный выигрыш альтернативы можно представить в виде:

$$W = \alpha_B \cdot Z_B + \alpha_{MM} \cdot Z_{MM} + \alpha_S \cdot Z_S + \alpha_{HW} \cdot Z_{HW} + \alpha_P \cdot Z_P$$

Таким образом, при использовании обобщенных выигрышей альтернатив для выбора наилучшей, необходимо воспользоваться следующим правилом: наилучшей является та альтернатива, для которой обобщенный выигрыш максимален. В таком случае решение задачи ранжирования можно представить в виде:

$$Z = \max_i W_i\,.$$

Принятие решения методом Кемени-Снелла

При принятии окончательного решения, основанного на использовании метода Кемени-Снелла, матрица выигрышей $\mathbf{E} = \left\| e_{ij} \right\|, i = 1..n,\ j = 1..m$ подвергается ранжированию вектором критериев принятия решений в условиях неопределенности $K = \{K_l\}, l = 1..k$. Результаты этих ранжирований сводятся в матрицу предпочтений, строками которой являются критерии, а столбцами – альтернативы. Данная матрица содержит выигрыши, приписанные альтернативам критериями принятия решений в процессе ранжирования. Полученная таким образом матрица предпочтений преобразуется в матрицу рангов, с целью расположения альтернатив в наиболее рациональном порядке, путем приписывания каждой из них числа натурального ряда – ранга. При этом ранг 1 получает наиболее предпочтительная альтернатива (имеющая максимальный выигрыш) по данному критерию, а ранг *N* – наименее предпочтительная. В результате данной процедуры для каждого критерия получаем порядковую шкалу, которая должна удовлетворять условию равенства числа рангов (*N*) числу ранжируемых альтернатив (*n*). Если нескольким альтернативам присваивается одинаковый ранг, то число рангов не равно числу альтернатив. В таких случаях приписываются стандартизированные ранги. Значение стандартизированного ранга представляет собой среднее суммы мест, которые поделили между собой альтернативы с одинаковыми рангами. Образованная матрица рангов является исходной матрицей принятия решения, основанного на методе Кемени-Снелла.

Исходя из матрицы рангов, определяется матрица бинарных предпочтений альтернатив A_j с оценками a_{ik}^j :

$$a_{ik}^j = \begin{cases} 1,\ \text{если}\ \ A_i > A_k \\ -1, \text{если}\ \ A_k < A_i \\ 0,\ \text{если}\ \ A_i \infty A_k \end{cases}$$

Исходя из матрицы бинарных предпочтений, определяется матрица потерь с оценками r_{ik} :

$$r_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \left| a_{ik}^j - 1 \right|$$

Последним шагом является циклическая обработка матрицы потерь:

1) для каждой альтернативы определить сумму по строке;

2) альтернатива с минимальной суммой ставится на первое место, а соответствующая ей строка и столбец вычеркиваются из матрицы потерь;

3) если матрица содержит только одну альтернативу, то данная альтернатива ставится на последнее место, а обработка заканчивается, иначе переход к 2);

Таким образом, исходя из метода Кемени-Снелла, наилучшей является та альтернатива, которая была вычеркнута первой.

Заключение

В теории принятия решений используются «разумные» процедуры выбора наилучшей из нескольких возможных альтернатив. Насколько правильным будет выбор, зависит от качества данных, используемых при описании ситуации, в которой принимается решение [5]. Однако существует проблема выбора этой самой «разумной» процедуры. В данной работе предложены методы, позволяющие согласовать результаты применения различных процедур выбора для получения однозначного решения.

Первый метод основан на расчете обобщенных выигрышей для альтернатив с помощью коэффициентов доверия и результирующих выигрышей, определяемых критериями принятия решений в условиях неопределенности, и заключается в следующем:

1) рассчитываются коэффициенты доверия ЛПР к критериям принятия решений с помощью метода парных сравнений для одного эксперта;

2) осуществляется ранжирование альтернатив критериями принятия решений по матрице выигрышей. Результатом является усеченный набор альтернатив;

3) строится матрица, содержащая выигрыши альтернатив при выборе их различными критериями, строками которой являются альтернативы-решения, а столбцами – критерии;

4) вычисляются обобщенные выигрыши выбранных альтернатив с помощью свертки выигрышей на основании коэффициентов доверия;

5) в качестве решения выступает альтернатива с максимальным обобщенным выигрышем.

Второй метод не требует промежуточного расчета коэффициентов доверия и включает следующие процедуры.

1) Проводится ранжирование альтернатив критериями принятия решений по матрице выигрышей. Результатом является матрица предпочтений.

2) Осуществляется переход от матрицы предпочтений к матрице рангов.

3) Используется метод Кемени-Снелла для выбора наилучшей альтернативы.

Представленные в работе методы могут использоваться на последнем этапе ранжирования проектов методом РАМБР.

FINAL DECISION ACCEPTANCE IN THE CONDITIONS OF UNCERTAINTY

B.Y. RUTMAN

Abstract

The method of decision-making based on gains matrix «conditions-alternatives» is presented. The algorithms of a choice of the best alternative with a help of the convolution of solutions, obtained by criteria of the decision-making, used in conditions of uncertainty, is described, as well as involving of the method of Kemeny-Snell. A method of determining factors of confidence of individual criteria is given.

Литература

1. *Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж.* Введение в конечную математику. М., 1965.
2. *Рутман Б.Ю., Никульшин Б.В.* // Докл. БГУИР. 2009. №3 (41). С. 102–106.
3. *Рутман Б.Ю., Никульшин Б.В.* // Докл. БГУИР. 2010. №3 (49). С. 111–115.
4. *Мушик Э., Мюллер П.* Методы принятия технических решений. М., 1990.
5. *Таха, Хемди А.* Введение в исследование операций. М., 2005.