

УДК 621.372.512

## ПРИМЕНЕНИЕ ЦЕЛЕВЫХ МАТРИЦ ПЕРЕДАЧИ И УСЛОЖНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ КАСКАДОВ ПРИ СИНТЕЗЕ ШИРОКОПОЛОСНЫХ СОГЛАСУЮЩЕ-ФИЛЬТРУЮЩИХ И МОДЕЛИРУЮЩИХ СХЕМ

Ю.П. ВОРОПАЕВ, А.Д. ВАСИЛЬЕВ, И.М. МЕЩЕРЯКОВ

*Военная академия Республики Беларусь  
пр. Независимости, 220, Минск, 220057, Беларусь*

*Поступила в редакцию 6 июля 2010*

Вводится понятие целевой матрицы при решении оптимизационных задач широкополосного согласования и моделирования линейных четырехполюсников. Получены строгие соотношения для расчета каскадов, имеющих нули передачи на конечных частотах, что существенно расширяет возможности оптимизации частотных характеристик пассивных и активных четырехполюсников. Приводится пример расчета широкополосного согласующего устройства.

*Ключевые слова:* целевая матрица, мажорантная и минорантная функции, широкополосное согласование, моделирование.

### Введение

В работах авторов [1–4] показано, что метод среднего гармонического значения коэффициента преобразования мощности обеспечивает наилучшие энергетические параметры и характеристики при широкополосной оптимизации многокаскадных соединений различных линейных четырехполюсников, а также их моделирование.

Цель статьи — предложить критерии качества согласования на основе целевых матриц передачи и использовать их при выводе строгих аналитических соотношений для расчета элементарных Z- и Y-каскадов с нулями передачи на конечных частотах синтезируемых согласующе-фильтрующих схем и схем широкополосных моделей.

### Постановка задачи

Рассмотрим  $M$ -каскадное соединение линейных четырехполюсников рис. 1, описываемое результирующей матрицей передачи

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}_A \mathbf{T}_{Z,Y} \mathbf{T}_B, \tag{1}$$

где обозначено

$$\mathbf{T}_A = \prod_{j=1}^{k-1} \mathbf{T}_j, \mathbf{T}_{Z,Y} = \mathbf{T}_k, \mathbf{T}_B = \prod_{j=k+1}^M \mathbf{T}_j \tag{2}$$

Матрица  $\mathbf{T}_A$  состоит из  $k-1$  множителей, где матрица [5]

$$\mathbf{T}_1 = \frac{1}{\sqrt{1-|G_1|^2}} \begin{bmatrix} 1 & -G_1 \\ -G_1^* & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

учитывает рассогласование источника сигнала, комплексный коэффициент отражения от которого равен  $\Gamma_1$ ; \* — знак комплексного сопряжения.

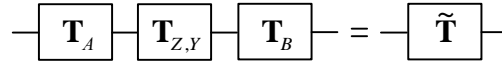


Рис. 1. Соединение линейных четырехполюсников

Остальные множители  $\mathbf{T}_A$  описывают как оптимизируемые каскады тракта, так и уже рассчитанные элементарные каскады общего согласующего устройства (СУ). Матрица  $\mathbf{T}_B$  состоит из  $M - k$  сомножителей, где матрица

$$\mathbf{T}_M = \frac{1}{\sqrt{1 - |\Gamma_M|^2}} \begin{bmatrix} 1 & \Gamma_M^* \\ \Gamma_M & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

описывает рассогласование нагрузки, коэффициент отражения от которой составляет  $\Gamma_M$ . Остальные сомножители  $\mathbf{T}_B$  имеют тот же смысл, что и в матрице  $\mathbf{T}_A$ .

Матрицы  $\mathbf{T}_{Z,Y}$  описывают элементарный либо Z-, либо Y-каскады вида [6]

$$\mathbf{T}_Z = \mathbf{E} + \frac{Z}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_Y = \mathbf{E} + \frac{Y}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{E}$  — единичная матрица второго порядка;

$$Z = R + iX = R + i \omega_L L - 1 / \omega_C C, \quad (6)$$

$$Y = G + iB = G + i \omega_C C - 1 / \omega_L L \quad (7)$$

— комплексные сопротивление и проводимость двухполюсников, включаемых в схему элементарного каскада соответственно последовательно и параллельно;  $R, G, L, C$  — подлежащие первичному или любому повторному расчету элементы схемы данного каскада;  $\omega_L$  и  $\omega_C$  — выводимые ниже функции частоты  $\omega$ ;  $i$  — мнимая единица.

Внешние параметры (комплексные элементы T- или S-матриц) всех оптимизируемых каскадов соединения считаем известными в достаточном частотном диапазоне, содержащем полосу частот оптимизации  $\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$ , причем зависимость элементов от  $\omega$  может быть аналитической или дискретной, например, экспериментальной.

Как и в предыдущих работах [1–4], общий алгоритм содержит два принципиальных этапа: строгий аналитический расчет (как первичный, так и все повторные) всех элементарных каскадов и циклическую итерационную процедуру оптимизации общего СУ в целом.

### Критерии качества и целевая матрица задачи

Обратимся к выражению (1) и запишем известное соотношение между коэффициентом пропускания матрицы  $\tilde{\mathbf{S}}$  и обратным значением коэффициента передачи результирующей матрицы  $\tilde{\mathbf{T}}$  [6]

$$\tilde{S}_{21}(\omega, L, C) = \tilde{T}_{11}^{-1}(\omega, L, C), \quad (8)$$

где физический смысл коэффициента пропускания следует из равенства  $|\tilde{S}_{21}|^2 = P_{\text{вых}} / P_{\text{вх}}$ , определяющего мощность сигнала на выходе четырехполюсника рис. 1 через мощность на входе.

При широкополосном согласовании наибольший интерес представляют следующие усреднения выражений (8) по частоте при числе дискретов  $N$  в полосе оптимизации:

$$\frac{1}{N} \sum |\tilde{S}_{21}(\omega_j)|^2 \equiv \bar{\eta}_A \rightarrow \max, \quad (9)$$

$$\frac{1}{N} \sum |\tilde{T}_{11}(\omega_j)|^2 = \frac{1}{N} \sum |\tilde{S}_{21}(\omega_j)|^{-2} \equiv \bar{\eta}_\Gamma^{-1} \rightarrow \min \quad (10)$$

или, что аналитически эквивалентно,

$$N \left[ \sum |\tilde{T}_{11}(\omega_j)|^2 \right]^{-1} = N \left[ \sum |\tilde{S}_{21}(\omega_j)|^{-2} \right]^{-1} \equiv \bar{\eta}_\Gamma \rightarrow \max, \quad (11)$$

где  $\bar{\eta}_A$  – среднее арифметическое и  $\bar{\eta}_\Gamma$  – среднее гармоническое значения [7] коэффициента преобразования мощности (КПМ)  $|\tilde{S}_{21}|^2$ .

Отметим два принципиальных момента. Во-первых, известное соотношение между средним арифметическим и гармоническим значениями

$$\bar{\eta}_A(L, C) \geq \bar{\eta}_\Gamma(L, C) \quad (12)$$

определяет  $\bar{\eta}_A$  как мажорантную, а  $\bar{\eta}_\Gamma$  — как минорантную функции переменных  $L, C$ , и поэтому при максимизации по  $L, C$  среднего гармонического значения  $\bar{\eta}_\Gamma$ , не имеющего четкого физического смысла, гарантируется максимизация физического содержательного значения  $\bar{\eta}_A$ .

Во-вторых, легко показать, что переменные  $L, C^{-1}$  из (5) для Z-каскада и  $L^{-1}, C$  для Y-каскада входят линейно в каждое слагаемое  $\tilde{T}_{11j} = \tilde{S}_{21j}^{-1}$  из (10). Это обстоятельство позволяет из системы частных производных от  $\bar{\eta}_\Gamma^{-1}$  по  $L, C^{-1}$  (или по  $L^{-1}, C$ ) получать аналитически строгие выражения для вычисления значений  $L_0, C_0^{-1}$  (или  $L_0^{-1}, C_0$ ), определяющих единственный экстремум  $\bar{\eta}_\Gamma^{-1}(L_0, C_0^{-1}) \rightarrow \min$ .

Рассмотрим целевую матрицу  $\mathbf{T}_u$ , под которой понимается заранее известная матрица  $\mathbf{T}$  (при широкополосном моделировании четырехполюсников) или задаваемые определенным образом (при широкополосном согласовании) T- или S-матрицы, которые должны описывать желательные параметры и характеристики всей системы в целом на конечных этапах ее оптимизации.

Для этого с учетом (1) составим разность  $\Delta \mathbf{T} = \mathbf{T}_u - \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}_u - \mathbf{T}_A \mathbf{T}_{Z,Y} \mathbf{T}_B$  и ее норму

$$q = \|\mathbf{T}_u - \mathbf{T}_A \mathbf{T}_{Z,Y} \mathbf{T}_B\| \rightarrow \min \quad (13)$$

используем как парциальный критерий качества.

Учтем (5) и запишем критерии качества для Z- и Y-каскадов соответственно

$$q_Z = \|\mathbf{U} - Z \mathbf{U}_Z\| \rightarrow \min, \quad q_Y = \|\mathbf{U} - Y \mathbf{U}_Y\| \rightarrow \min, \quad (14)$$

где обозначено

$$\mathbf{U} = \mathbf{T}_u - \mathbf{T}_A \mathbf{T}_B, \quad (15)$$

$$\mathbf{U}_Z = \frac{1}{2} \mathbf{T}_A \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} U_{11}^Z & U_{12}^Z \\ U_{21}^Z & U_{22}^Z \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\mathbf{U}_Y = \frac{1}{2} \mathbf{T}_A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} U_{11}^Y & U_{12}^Y \\ U_{21}^Y & U_{22}^Y \end{bmatrix}. \quad (17)$$

В качестве нормы возьмем сумму квадратов модулей элементов разности и получим с учетом (6) и (13) для Z-каскада среднее значение критерия качества:

$$\begin{aligned} \bar{q}_Z \ L, C^{-1} &= \overline{|U_{11} - ZU_{11}^Z|^2} + \overline{|U_{12} - ZU_{12}^Z|^2} + \overline{|U_{21} - ZU_{21}^Z|^2} + \overline{|U_{22} - ZU_{22}^Z|^2} = \\ & \overline{a_{11}R^2} + \overline{a_{11}\omega_L^2L^2} + \overline{a_{11}\omega_C^{-2}C^{-2}} - 2\overline{a_{11}\omega_L\omega_C^{-1}LC^{-1}} + 2\overline{a_{13}R} + 2\overline{a_{23}\omega_L L} - 2\overline{a_{23}\omega_C^{-1}C^{-1}} + \overline{a_{33}} \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (18)$$

где черта сверху означает средние арифметические значения слагаемых в полосе частот оптимизации  $\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$ ,  $j = \overline{1, N}$  и приняты следующие обозначения для коэффициентов

$$\begin{aligned} a_{11} &= |U_{11}^Z|^2 + |U_{12}^Z|^2 + |U_{21}^Z|^2 + |U_{22}^Z|^2 = \|U_Z\|, \\ 2a_{13} &= -A_Z + A_Z^*, \\ 2a_{23} &= -i A_Z - A_Z^*, \end{aligned} \quad (19)$$

$$A_Z = U_{11}^Z U_{11}^* + U_{12}^Z U_{12}^* + U_{21}^Z U_{21}^* + U_{22}^Z U_{22}^*,$$

$$a_{33} = |U_{11}|^2 + |U_{12}|^2 + |U_{21}|^2 + |U_{22}|^2 = \|U\|.$$

Очевидно, что при расчете параметров Y-каскадов вместо (16) используется выражение (17).

### Аналитический расчет параметров элементарных каскадов

В системе координат  $x = L$ ,  $y = C^{-1}$ ,  $z = \bar{q} \ \langle C^{-1}, R \rangle$  поверхность критерия качества (ПКК) является эллиптическим параболоидом [8], ось которого параллельна оси  $z$ , вершина обращена вниз и имеет координаты  $x_0 = L_0$ ,  $y_0 = C_0^{-1}$ ,  $z_0 = \bar{q} \ \langle C_0^{-1}, R_0 \rangle \rightarrow \min$ . Из (18) следует, что резистивная составляющая  $R_0$  влияет лишь на абсолютное значение  $\bar{q}_Z$ , но не на координаты  $L_0, C_0^{-1}$  проекции вершины на плоскость  $L, C^{-1}$ . Принципиальная особенность ПКК – унимодальность, т. е. экстремум  $\bar{q} \ \langle C_0^{-1} \rangle$  – единственный, что обеспечивает глобально-оптимальные характеристики системы как при расчете каждого отдельного каскада, так и системы в целом.

Оптимальные значения  $L = L_0$ ,  $C^{-1} = C_0^{-1}$  находятся из равенств

$$\partial \bar{q} / \partial L = 0, \quad \partial \bar{q} / \partial C^{-1} = 0, \quad (20)$$

сводящихся к системе двух линейных уравнений с решениями:

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{\overline{a_{23}\omega_C^{-1}} \cdot \overline{a_{11}\omega_L\omega_C^{-1}} - \overline{a_{23}\omega_L} \cdot \overline{a_{11}\omega_C^{-2}}}{\Delta}, \\ C_0^{-1} &= \frac{\overline{a_{23}\omega_C^{-1}} \cdot \overline{a_{11}\omega_L^2} - \overline{a_{23}\omega_L} \cdot \overline{a_{11}\omega_L\omega_C^{-1}}}{\Delta}, \\ \Delta &= \overline{a_{11}\omega_L^2} \cdot \overline{a_{11}\omega_C^{-2}} - \overline{a_{11}\omega_L\omega_C^{-1}}^2 > 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогично из равенства  $\partial \bar{q} / \partial R = 0$  имеем оптимальное значение  $R_0 = -\bar{a}_{13} / \bar{a}_{11}$ . Наличие в выражениях (6), (7) резистивных составляющих  $R$  и  $G$  расширяет возможности синтеза схем при оптимизации активных четырехполюсников, а также при широкополосном моделировании.

Если проекция вершины ПКК оказывается в первом квадранте плоскости  $xOy = LOC^{-1}$ , т.е.  $L_0 > 0$ ,  $C_0^{-1} > 0$ , то решения (21) дают параметры элементарного каскада.

Если проекция вершины не оказывается в первом квадранте ( $L_0 < 0$ ,  $C_0^{-1} > 0$ ;  $L_0 < 0$ ,  $C_0^{-1} < 0$ ;  $L_0 > 0$ ,  $C_0^{-1} < 0$ ), то вместо (21) используется одно из частных решений (20)

$$L_0 = -\overline{a_{23}\omega_L} / \overline{a_{11}\omega_L^2}, \quad C_0^{-1} = \overline{a_{23}\omega_C^{-1}} / \overline{a_{11}\omega_C^{-2}}, \quad (22)$$

при котором получается лучшее значение критерия качества  $\bar{q}_Z$ .

При оптимизации физически реализуемых каскадных соединений всегда существует подходящее ненулевое, физически реализуемое решение (20).

Рассмотрим схемное представление двухполюсников, описываемых выражениями (6) и (7) и входящих в Z- и Y-каскады. На рис. 2 показан один из возможных вариантов использования контуров с резонансными частотами

$$\omega_1^2 = 1/L_1C_1, \quad \omega_2^2 = 1/L_2C_2, \quad \omega_1 < \omega_2, \quad (23)$$

которые удовлетворяют условиям  $\omega_1 < \omega_{\min}$ ,  $\omega_2 > \omega_{\max}$ , где  $\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$ , т.е. располагаются вне полосы частот согласования.

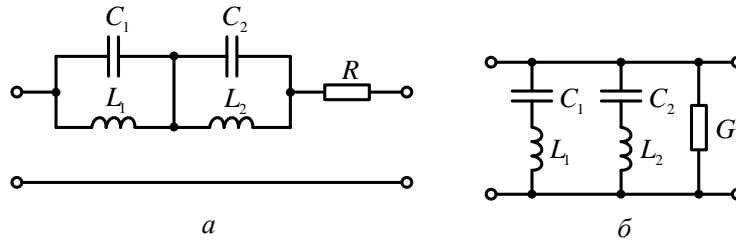


Рис. 2 Каскады СУ: а — Z-каскад; б — Y-каскад

Для Z-каскада и при условии  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  запишем выражение для реактивной составляющей из (6)

$$X = X_2^L - X_1^C = \omega_L L_2 - 1/\omega_C C_1 \quad (24)$$

где обозначено

$$\omega_L = \omega / \sqrt{1 - \omega^2/\omega_2^2}, \quad \omega_C = \omega \sqrt{1 - \omega_1^2/\omega^2}. \quad (25)$$

Зависимости  $X(\omega)$  поясняются на рис. 3.

Таким образом, при фиксированных частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  значение реактивности  $X$  прямо пропорционально искомым параметрам  $L_2$  и  $C_1^{-1}$ , что позволяет рассчитывать их по аналитическим выражениям (21), (22), а значения  $C_2$  и  $L_1$  находить из (23).

Полагая в (24), (25)  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 \rightarrow \infty$ , вместо последовательного соединения параллельных контуров получим один последовательный. Возможны и другие варианты, например, только  $\omega_1 = 0$ , или только  $\omega_2 \rightarrow \infty$ .

Следовательно, соотношения (24), (25) позволяют использовать в качестве элементарных каскады, имеющие нули передачи на конечных частотах, что существенно расширяет возможности синтеза широкополосных согласующе-фильтрующих и моделирующих схем.

При расчете элементарных Y-каскадов применяются выше изложенные соотношения для Z-каскадов после замен

$$Z \rightarrow Y, \quad R \rightarrow G, \quad X \rightarrow B, \quad L \leftrightarrow C \quad (26)$$

как в формулах, так и в индексах.

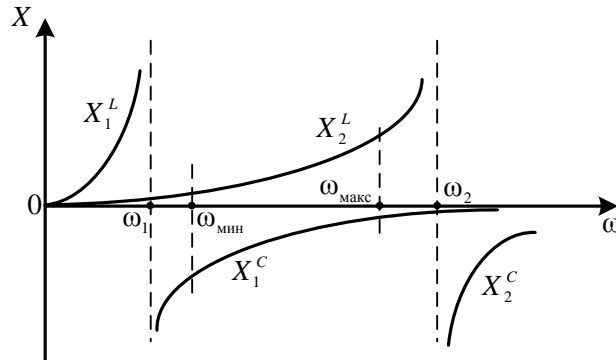


Рис. 3. Зависимость реактивных составляющих контуров от частоты

### Целевая матрица $T_{\text{ц}}$

При широкополосном моделировании четырехполюсников в качестве целевой используется известная матрица  $T$  модели [9]. При широкополосном согласовании в общем случае целевая матрица не является известной, но обоснованную первичную информацию о ней можно получить, используя частные целевые функции, хорошо себя зарекомендовавшие [1–4], например, функцию

$$\bar{q}_{11}^Z = \overline{|\tilde{T}_{11}^Z|^2} = \overline{|\tilde{S}_{21}^Z|^{-2}} \rightarrow \min, \quad (27)$$

которая позволяет синтезировать СУ, обеспечивающие наилучшие широкополосные характеристики системы по передаче мощности от источника в нагрузку.

В обозначениях этой статьи коэффициенты квадратичной формы (18) принимают вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= |U_{11}^Z|^2, \quad 2a_{13} = U_{11}^Z U_{11}^{*Z} + U_{11}^{Z*} U_{11}, \\ 2a_{23} &= i U_{11}^Z U_{11}^{*Z} - U_{11}^{Z*} U_{11}, \quad a_{33} = |U_{11}|^2. \end{aligned} \quad (28)$$

где  $U_{11}$  — элемент матрицы  $U$  из выражения (15) при  $T_{\text{ц}} = 0$ .

Далее с помощью соотношений (21), (22) производится расчет и оптимизация необходимого числа элементарных каскадов и вычисляется результирующая матрица всей системы  $\tilde{T}$ , которая используется в качестве начального приближения матрицы  $T_{\text{ц}}$  для применения более общего критерия (18), а также более сложных схемных реализаций элементарных каскадов.

### Пример широкополосного согласования четырехполюсника

Рассмотрим тестовый пример оптимизации КПМ линейного участка тракта с непреднамеренно выбранными параметрами (рис. 4) в диапазоне частот от  $\omega_{\text{мин}} = 0,5$  до  $\omega_{\text{макс}} = 1,5$ . Оптимизируемый четырехполюсник содержит три каскада–реактивные элементы  $C = 4$  и  $L = 3$ , выполняющие роль рассогласователей входа и выхода, и четырехполюсник ЧП с параметрами  $S_{11} = S_{22} = 0$ ,  $S_{12} = 0,05 \exp -i\pi\omega / 1 + \omega$ ,  $S_{21} = 20 \exp -i\pi\omega / \omega + 1$ , и требуется рассчитать СУ 1 и СУ 2, которые обеспечивают оптимальное значение  $|S_{21}|^2$  в заданной полосе частот.

Кривой 1 на рис. 6 показан КПМ заданного тракта без СУ 1 и СУ 2.

При использовании методики работы [4] при  $N = 101$  рассчитано 9-элементное СУ, состоящее из каскадов с  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 \rightarrow \infty$  (рис. 5), КПМ при котором представлен на рис. 6 кривой 2.

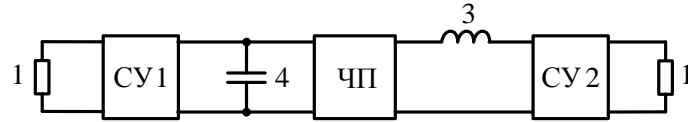


Рис. 4. Структурная схема широкополосного согласования

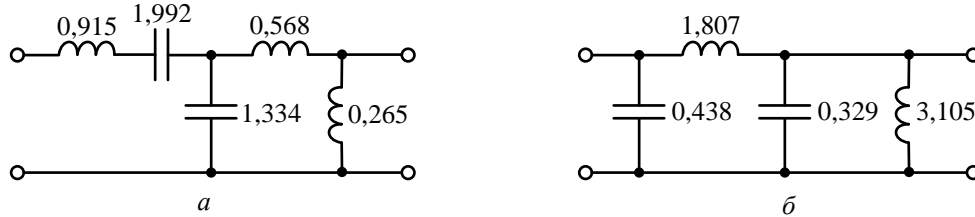


Рис. 5. 9-элементное СУ: а) СУ 1; б) СУ 2

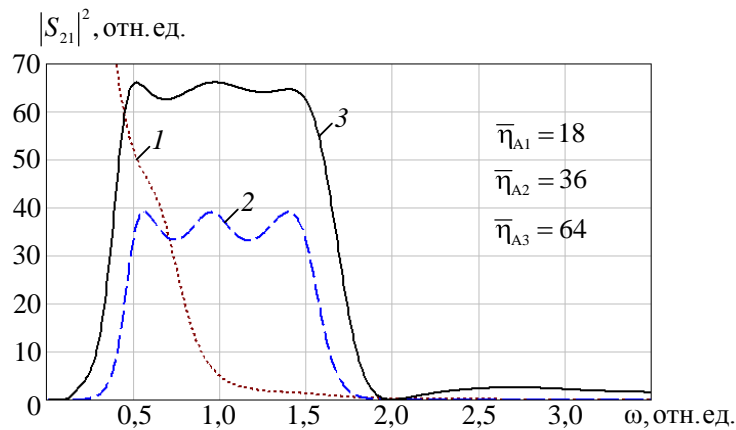


Рис. 6. КПМ оптимизируемого тракта

При синтезе СУ, содержащих каскады рис. 2, их резонансные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  обычно задаются и в процессе расчетов СУ могут корректироваться. Оптимальной представляется методика одновременного расчета в каждом новом сечении каскадов как с нулями передачи на конечных частотах, так и без, из которых далее используется тот, который обеспечивает лучшее значение критерия качества.

Расчеты каскадов производились при  $\omega_1 = 0,3$ ,  $\omega_2 = 2,0$ . При этом по методике работы [4] получено 6-элементное СУ (рис. 7), обеспечивающее КПМ, представленный кривой 3 на рис. 6.

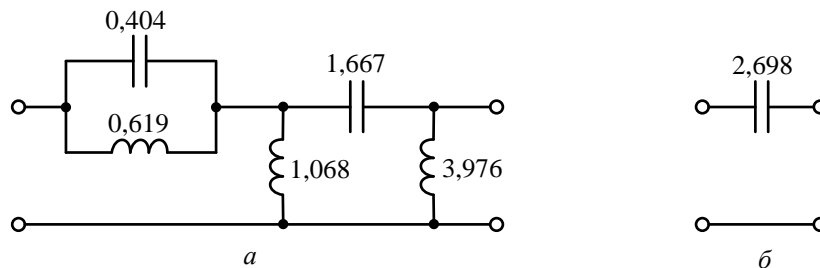


Рис. 7. 6-элементное СУ, содержащее каскад с нулем передачи на частоте  $\omega=2,0$ : а) СУ 1; б) СУ 2

Таким образом, в результате использования только одного каскада с нулем передачи на конечной частоте удалось значительно повысить КПМ в заданной полосе при меньшем общем количестве элементов СУ.

По результатам расчета ряда других тестовых примеров и задач из литературы можно сделать вывод, что нередко использование каскадов рис. 2 в схемах СУ и моделей позволяет получать более качественные результаты широкополосного согласования и моделирования.

## Заклучение

Аналитические строгие соотношения (20)–(22) сводят к минимуму временные затраты при первичных и множественных повторных расчетах параметров всех типов элементарных каскадов. Это принципиально и позволяет выполнять весьма объемные циклические итерационные процедуры оптимизации многокаскадных СУ в целом в форме диалога оператора с ЭВМ в реальном масштабе времени.

Элементарные каскады могут располагаться с достаточным для творческого подхода произволом в любых технически оправданных сечениях каскадного соединения. Поэтому общая структура СУ формируется в процессе синтеза естественным адаптивным образом и не нуждается в ее исходном задании.

Важным свойством используемого итерационного процесса оптимизации СУ является адаптивность—при синтезе, как правило, изменяется структура СУ—Г-образные схемы преобразуются в Т-образные и наоборот при существенном изменении параметров их элементов; каскады, при расчете которых номиналы элементов  $L$ ,  $C$  оказываются технически неприемлемыми, могут заменяться в этом сечении каскадами иного типа или каскадами в других подходящих сечениях без, как правило, ухудшения свойств общих частотных характеристик.

## APPLICATION OF SPECIFIC MATRICES FOR TRANSFER AND NONMINIMUM-PHASE ELEMENTARY CASCADES IN THE SYNTHESIS OF BROADBAND COORDINATING-FILTERING AND SIMULATING CIRCUITS

Y.P. VOROPAEV, A.D. VASILEV, I.M. MESHERJAKOV

### Abstract

The concept of the specific matrix for solving optimization problems of broadband harmonizing and modeling of linear two-ports is introduced. Rigorous balance was obtained for the calculation of nonminimum-phase elementary cascades and their common use with the minimum-phase ones, which significantly expands the possibilities of optimizing the frequency characteristics of passive and active two-ports. The instance of account of the broad-band matching device is resulted.

### Литература

1. Воробаев Ю.П., Васильев А.Д., Мещеряков И.М. // Радиотехника и электроника. 2009. № 7. С. 853–863.
2. Васильев А.Д., Воробаев Ю.П. // Сб. науч. ст. Воен. акад. Респ. Беларусь. 2009. № 16. С. 78–84.
3. Васильев А.Д. // Вестн. Воен. акад. Респ. Беларусь. 2010. № 1. С. 73–80.
4. Васильев А.Д. // Вестн. Воен. акад. Респ. Беларусь. 2010. № 2. С. 109–115.
5. Воробаев Ю.П., Юрцев О.А. Электродинамика и техника СВЧ. Ч. II. Техника сверхвысоких частот. М., 1985.
6. Фельдштейн А.Л., Явич Л.Р., Смирнов В.П. Справочник по элементам волноводной техники. М., 1967.
7. Математическая энциклопедия. М., 1977. Т. 1
8. Математическая энциклопедия. М., 1984. Т. 3
9. Воробаев Ю.П., Васильев А.Д., Мещеряков И.М. // Вестн. Воен. акад. Респ. Беларусь. 2009. № 4. С. 72–80.