О размерности и метрике пространства, в котором может существовать физическая система

А. Н. Тараканов

Институт информационных технологий
Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники
220037, Республика Беларусь, г. Минск, ул. Козлова, 28

E-mail: tarak-ph@mail.ru

Аннотация

Исходя из движения материальной точки по траектории в многомерном пространстве, рассматриваются все возможные геометрии такого пространства.

PACS numbers: 02.10.Yn, 02.40.–k
Keywords: Differential geometry, Matrix theory

Общепринято, что любой физический объект можно рассматривать как совокупность материальных точек, наделённых набором физических параметров. Знание состояния движения каждой точки объекта эквивалентно знанию состояния движения самого объекта. Таким образом, состояние объекта характеризуется рядом параметров, а любое изменение их значений является движением объекта. Параметры могут быть как дискретными (спин, заряд), так и непрерывными (координаты точек, моменты времени). Количество параметров, необходимое для описания физической системы, определяется конкретной задачей. Например, для описания движения материальной точки в ньютоновской механике достаточно трёх координат, а для описания поведения большого числа подсистем приходится вводить понятия конфигурационного и фазового пространств.

Здесь мы рассмотрим только непрерывные параметры, называемые *координатами*, каждый из которых принимает значения на действительной прямой. Совокупность координат определяет *пространство координат*, метрические свойства которого необходимо знать для возможности осуществлять прямые физические измерения, позволяющие определить, как изменяются параметры в рассматриваемом физическом процессе. Например, в аналитической динамике пространством параметров является пространство обобщённых координат. В каждом физическом процессе можно определить физические величины, являющиеся функциями параметров, которые определяются посредством косвенных измерений и задают состояние объекта. Множество состояний определяет *пространство состояний*. Таким образом, можно резюмировать, что состояния физических объектов реализуются на пространстве координат. Иначе говоря, пространство координат является вместилищем физических объектов и ареной, на которой происходят физические процессы. В этом смысле оно носит *абсолютный характер в духе ньютоновского пространства*.

Так как пространство координат является непрерывным многообразием, то будем полагать, что оно является гладким дифференцируемым вещественным N-мерным пространством $\mathfrak{D}_{\mathrm{N}}^{\mathbb{R}}$, покрываемом криволинейными координатами X^A, $A = 1, 2, \ldots, N$, N – число параметров. Изменение состояния системы определяется движением точки в этом пространстве, так что точка описывает траекторию, или гладкую кривую, параметрическое уравнение которой $X^A = X^A(s)$. В качестве параметра s можно выбрать любой параметр, но удобнее всего выбрать естественный параметр, определяемый длиной дуги траектории. В специальной теории относительности для досветовых частиц таким параметром является собственное время. Поэтому *пространство Минковского*, так же, как и евклидово пространство механики Ньютона также *носит абсолютный характер*, а не относительный как это утверждается в специальной теории относительности.

Производная от координат X^A по параметру s в каждой точке траектории определяет касательный вектор $V^A = dX^A / ds$. Множество таких векторов, касательных всем возможным траекториям, проходящим через данную точку, образует касательное N-мерное векторное пространство $\mathbf{V}_{\mathrm{N}}^{\mathbb{R}}$ в данной точке X^A, которое не совпадает с таким же по структуре векторным пространством в соседней точке X'^A пространства параметров. Для того, чтобы перейти к соседней точке необходимо совершить преобразование $X'^A = f^A(X^B)$ в пространстве $\mathfrak{D}_{\mathrm{N}}^{\mathbb{R}}$, индуцирующее линейное преобразование $dX'^A = F^A_{.B} dX^B$ в пространстве $\mathbf{V}_{\mathrm{N}}^{\mathbb{R}}$, где $\hat{\mathbf{F}} = (F^A_{.B}) = (\partial X'^A / \partial X^B)$ – матрица преобразования. Преобразование в пространстве $\mathfrak{D}_{\mathrm{N}}^{\mathbb{R}}$ определяет переход от локальной карты $(\mathfrak{U}, \phi)$ к карте $(\mathfrak{U}', \phi')$, где $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{D}_{\mathrm{N}}^{\mathbb{R}}$ и $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{D}_{\mathrm{N}}^{\mathbb{R}}$ – открытые множества в $\mathfrak{D}_{\mathrm{N}}^{\mathbb{R}}$, покрываемые координатами $\{X^A\} \in \mathfrak{U}$ и $\{X'^A\} \in \mathfrak{U}'$, соответственно; ϕ и ϕ' – гомеоморфизмы множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}'$ на открытые множества $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}'$, соответственно, позволяющие определить системы локальных координат $\{\xi^A\} \in \mathbf{D}$ на $\mathfrak{U}$ и $\{\xi'^A\} \in \mathbf{D}'$ на $\mathfrak{U}'$:

$$\phi : \mathfrak{U} \to \mathbf{D}, \text{ or } \xi^A = \phi^A(X^B); \qquad (1)$$

$$\phi' : \mathfrak{U}' \to \mathbf{D}', \text{ or } \xi'^A = \phi'^A(X'^B). \qquad (2)$$

Введение локальных координат позволяет, во-первых, определить в каждой точке локальный базис и установить закон преобразования базиса при переходе от точки к точке, и, во-вторых, связать локальные координаты с касательными векторами линейным преобразованием: $d\xi^A = H^A_{.B} dX^B$. Координаты ξ^A и X^A можно выбрать так, что матрица $\hat{\mathbf{H}} = (H^A_{.B})$ будет иметь канонический вид.

С физической точки зрения процесс измерения осуществляется с помощью локальных координат ξ^A. Тогда координаты dX^A будут «естественно измеренными величинами», как их называет Эйнштейн ([1], с. 355),[1] а канонический вид матрицы $\hat{\mathbf{H}}$ определяет метрическую структуру касательного пространства $\mathbf{V}_{\mathrm{N}}^{\mathbb{R}}$. Поскольку во всех точках пространства $\mathfrak{D}_{\mathrm{N}}^{\mathbb{R}}$ касательные пространства можно совместить друг с другом, то пространство $\mathbf{V}_{\mathrm{N}}^{\mathbb{R}}$ с канонической метрикой можно рассматривать как фоновое пространство, на котором разворачиваются физические явления. Это согласуется с утверждением А. Пуанкаре, что геометрия не проистекает из опыта и, следовательно, «никакая геометрия не может быть более истинна, чем другая; та или иная геометрия может быть *только удобной*».[2]

Определение канонического вида матрицы $\hat{\mathbf{H}}$ является вполне определённой, но достаточно громоздкой процедурой. Как известно, её суть состоит в том, что нужно найти собственные значения λ_A матрицы $\hat{\mathbf{H}}$, а затем с помощью масштабных преобразований привести её элементы к 0, 1 или –1. λ_A являются решениями характеристического уравнения

$$\det(\hat{\mathbf{H}} - \lambda \cdot \mathbf{1}) = (-1)^N \mathrm{P}^N(\lambda) = 0, \qquad (3)$$

где $\mathrm{P}^N(\lambda) = \lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ – полином степени N, коэффициенты которого выражаются через элементы матрицы $\hat{\mathbf{H}}$. Полином $\mathrm{P}^N(\lambda)$ можно представить в следующем виде

---

[1] [1], p. 355.

[2] [3], c. 41; «Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre; elle peut seulement être *plus commode*» ([2], p. 66-67).

$$\mathrm{P}^N(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_n)^{m_n}\left[\mathrm{P}_1^2(\lambda)\right]^{s_1}\left[\mathrm{P}_2^2(\lambda)\right]^{s_2}\ldots\left[\mathrm{P}_z^2(\lambda)\right]^{s_z}, \tag{4}$$

где m_i ($i=1,2,...,n$) – алгебраические кратности вещественных корней λ_1, λ_2, ..., λ_n,

s_k ($k=n+1,\ n+2,...,n+z$) – алгебраические кратности комплексных корней λ_k,

$$\mathrm{P}_{k-n}^2(\lambda) = (\lambda-\lambda_k)(\lambda-\lambda_k^*) = \lambda^2 - \lambda(\lambda_k+\lambda_k^*) + \lambda_k\lambda_k^* \tag{5}$$

– полином второй степени, имеющий два комплексно-сопряжённых корня λ_k и λ_k^*.

Пусть вещественные корни λ_1, λ_2, ..., λ_n полинома (4) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 0,...,\lambda_r = 0\ ;\\ &\lambda_{r+1} > 0,...,\lambda_{r+p} > 0\ ;\\ &\lambda_{r+p+1} < 0,...,\lambda_{r+p+q} < 0\ ; \end{aligned} \tag{6}$$

а комплексные корни λ_{n+1}, λ_{n+2}, ..., λ_{n+z} условиям

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\,\lambda_{n+1} > 0,...,\mathrm{Re}\,\lambda_{n+k} > 0\ ;\\ &\mathrm{Re}\,\lambda_{n+k+1} < 0,...,\mathrm{Re}\,\lambda_{n+k+l} < 0\ ;\\ &\mathrm{Re}\,\lambda_{n+k+l+1} = 0,...,\mathrm{Re}\,\lambda_{n+k+l+m} = 0\ . \end{aligned} \tag{7}$$

Тогда $n=r+p+q$, $z=k+l+m$, $N=r+m_1+m_2+...+m_{p+q}+2(s_1+s_2+...+s_z)$, а ранг матрицы $\hat{\mathbf{H}}$ равен $\mathrm{rank}(\hat{\mathbf{H}}) = m_1+m_2+...+m_{p+q}+2(s_1+s_2+...+s_z) = N-r$.

С помощью скрупулёзных вычислений можно показать, что матрица $\hat{\mathbf{H}}$ приводится к следующей канонической форме

$$\hat{\mathbf{H}}_0 = \hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{M}}^{-1} = \mathrm{diag}(\mathbf{0}_r, \mathbf{E}_{p+q}, \mathbf{A}_{k+l}, \mathbf{\Sigma}_m), \tag{8}$$

где

$$\mathbf{E}_{p+q} = \mathrm{diag}(\mathbf{E}_{\mu_1}^{m_1},...,\mathbf{E}_{\mu_p}^{m_p},\mathbf{E}_{\mu_{p+1}}^{m_{p+1}},...,\mathbf{E}_{\mu_{p+q}}^{m_{p+q}}), \tag{9}$$

$$\mathbf{A}_{k+l} = \mathrm{diag}(\mathbf{A}_{\sigma_1}^{s_1},...,\mathbf{A}_{\sigma_k}^{s_k},\mathbf{A}_{\sigma_{k+1}}^{s_{k+1}},...,\mathbf{A}_{\sigma_{k+l}}^{s_{k+l}}), \tag{10}$$

$$\mathbf{\Sigma}_m = \mathrm{diag}(\mathbf{\Sigma}_{\sigma_{k+l+1}}^{s_{k+l+1}},...,\mathbf{\Sigma}_{\sigma_{k+l+m}}^{s_{k+l+m}}), \tag{11}$$

$\hat{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$ – вырожденные ранга $N-r$ матрицы перехода к локальному базису и обратно, удовлетворяющие соотношению $\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{M}}^{-1} = \hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{M}} = \mathrm{diag}(\mathbf{0}_r, \mathbf{1}_{N-r})$.

Матрицы, составляющие диагональные блоки матрицы (8), имеют вид

$$\mathbf{E}_{\mu_i}^{m_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} +\mathbf{1}_{m_i-\mu_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{\mu_i} \end{pmatrix}}_{m_i} m_i\,,\ \mathbf{E}_{\mu_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mu_i} \mu_i\,,\ i=1,2,...,p\,; \tag{12}$$

$$\mathbf{E}_{\mu_i}^{m_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\mathbf{1}_{m_i-\mu_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{\mu_i} \end{pmatrix}}_{m_i} m_i\,,\ \mathbf{E}_{\mu_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\mu_i} \mu_i\,,\ i=p+1,p+2,...,p+q\,; \tag{13}$$

$$\mathbf{A}_{\sigma_a}^{s_a}=\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_{s_a-\sigma_a} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\sigma_a}\end{pmatrix}}_{2s_a}2s_a\,,\ \mathbf{A}_{\sigma_a}=\underbrace{\begin{pmatrix}+\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{1}_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & +\boldsymbol{\alpha} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & +\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{1}_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & +\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}}_{2\sigma_a}2\sigma_a\,,\ a=1,2,...,k\,; \tag{14}$$

$$\mathbf{A}_{\sigma_a}^{s_a}=\underbrace{\begin{pmatrix}-\boldsymbol{\alpha}_{s_a-\sigma_a} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\sigma_a}\end{pmatrix}}_{2s_a}2s_a\,,\ \mathbf{A}_{\sigma_a}=\underbrace{\begin{pmatrix}-\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{1}_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\alpha} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{1}_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}}_{2\sigma_a}2\sigma_a\,,$$

$$a=k+1,k+2,...,k+l\,; \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\sigma_a}^{s_a}=\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}_{s_a-\sigma_a} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{\sigma_a}\end{pmatrix}}_{2s_a}2s_a\,,\ \boldsymbol{\Sigma}_{\sigma_a}=\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & \mathbf{1}_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{1}_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}}_{2\sigma_a}2\sigma_a\,,$$

$$a=k+l+1,k+l+2,...,k+l+m\,; \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{1}_n\times\boldsymbol{\alpha}=\underbrace{\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\alpha}\oplus...\oplus\boldsymbol{\alpha}}_{n}\,,\ \boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{1}_2+\boldsymbol{\sigma})=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n=\mathbf{1}_n\times\boldsymbol{\sigma}=\underbrace{\boldsymbol{\sigma}\oplus\boldsymbol{\sigma}\oplus...\oplus\boldsymbol{\sigma}}_{n}\,,\ \boldsymbol{\sigma}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=i\sigma_2\,, \tag{18}$$

$\mathbf{0}_n$, $\mathbf{1}_n$ – нулевая и единичная матрицы размерности $n\times n$, соответственно, σ_2 в (18) – матрица Паули. При $n=0$ матрицы $\mathbf{0}_n$, $\mathbf{1}_n$, $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{A}_n$, $\boldsymbol{\Sigma}_n$ исчезают. В формулах (9)-(16) μ_i, σ_i – геометрические кратности, означающие, что матрица $\hat{\mathbf{H}}$ удовлетворяет минимальному уравнению

$$(\hat{\mathbf{H}}-\lambda_1)^{\mu_1}(\hat{\mathbf{H}}-\lambda_2)^{\mu_2}...(\hat{\mathbf{H}}-\lambda_n)^{\mu_n}\left[\mathrm{P}_1^2(\hat{\mathbf{H}})\right]^{\sigma_1}\left[\mathrm{P}_2^2(\hat{\mathbf{H}})\right]^{\sigma_2}...\left[\mathrm{P}_z^2(\hat{\mathbf{H}})\right]^{\sigma_z}=\mathbf{0}\,. \tag{19}$$

Канонический вид (8) матрицы $\hat{\mathbf{H}}$ определяет расстояние в пространстве $\mathbf{V}_{\mathrm{N}}^{\mathbb{R}}$, которое для бесконечно близких точек на мировой линии выражается через локальные координаты с помощью $\hat{\mathbf{H}}$ в виде

$$dS^2=(\hat{\mathbf{H}}_0)_{AB}dX^A dX^B=\hat{\mathbf{H}}_{AB}d\xi^A d\xi^B\,. \tag{20}$$

Представление матрицы $\hat{\mathbf{H}}$ в каноническом виде (8) означает, что векторное пространство $\mathbf{V}_{\mathrm{N}}^{\mathbb{R}}$ можно представить в виде прямой суммы инвариантных подпространств

$$\mathbf{V}_{\mathrm{N}}^{\mathbb{R}}=\mathbf{V}_r\oplus\mathbf{V}_{\mu_1}^{m_1}\oplus...\oplus\mathbf{V}_{\sigma_{k+l+m}}^{s_{k+l+m}}\,, \tag{21}$$

каждое из которых покрывается собственным набором локальных координат. Это означает, что элемент дуги (20) мировой линии можно представить в виде

$$dS^2=ds_r^2+ds_{m_1\mu_1}^2+...+ds_{s_{k+l+m}\sigma_{k+l+m}}^2\,, \tag{22}$$

который содержит все возможные случаи метрик. Например, если $\hat{\mathbf{H}}_0 = \mathbf{E}_{\mu_1}^{m_1}$, то при $m_1 = 3$, $\mu_1 = 2$ матрицу $\hat{\mathbf{H}}$ можно интерпретировать как метрику моноклинного кристалла с одной круговой оптической осью (см., напр., [4], с. 97). Метрика анизотропного пространства рассматривалась Эдвардсом в [5], а также в [6], pp. 82-88, где координаты Эйнштейна и координаты Эдвардса связаны матрицей $\mathbf{E}_{\mu_i}^{m_i}$ (12) при $i = 1$, $m_1 = 4$, $\mu_1 = 2$. Использование метрик вида (14)-(16) может соответствовать различным суперпространствам, в которых координаты не коммутируют между собой.

Список литературы

[1] Эйнштейн А. Формальные основы общей теории относительности. – В кн. Эйнштейн А. Собрание научных трудов в 4-х тт., т.1. – М.: Наука, 1965. – 700 с, с. 326-384.

[2] Poincaré H. La Science et l'hypothèse. (Bibliothèque de philosophie scientifique). – Paris: Flammarion, 1902. – 284 pp.

[3] Пуанкаре А. Наука и гипотеза. – В кн. Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983. – 560 с.

[4] Фёдоров Ф.И. Теория гиротропии. – Минск: Наука и техника, 1976. – 456 с.

[5] Edwards W.F. Special Relativity in Anisotropic Space. // Amer. J. Phys, 1963, **31**, no. 7, 482-489.

[6] Yuan Zhong Zhang. Special Relativity and Its Experimental Foundation. (Advanced Series on Theoretical Physical Science. Vol. 4). – Singapore-New Jersey-London-Hong Kong: World Scientific, 1997. – XI, 296 pp.