

УДК 539.12

А.В. ИВАШКЕВИЧ¹, Е.М. ОВСИЮК²,

В.В. КИСЕЛЬ³, В.М. РЕДЬКОВ¹

¹Минск, Институт физики НАН Беларуси;

²Мозырь, МГПУ; ³Минск, БГУИР

БЕЗМАССОВОЕ ПОЛЕ СО СПИНОМ 3/2, СФЕРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Система уравнений для вектор-биспинора, описывающего безмассовую частицу со спином 3/2 (Паули–Фирц [1]) исследуется в сферических координатах пространства Минковского. Найдены два независимых класса решений, которые не содержат калибровочных компонент. Исходим из уравнений, полученных разделением переменных по методике из работы [2]:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \left(\frac{d}{dr} + \frac{1-a}{2r} \right) F_3 + \frac{1+a}{r} F_2 + \frac{b}{2r} F_1 = 0, \\
 2) \quad & 2 \left(\frac{d}{dr} - \frac{1+a}{2r} \right) G_0 + \frac{1-a}{2r} F_3 + \frac{b}{2r} F_1 + 2i\varepsilon G_2 + i\varepsilon G_3 = 0, \\
 3) \quad & - \left(\frac{d}{dr} + \frac{1+a}{2r} \right) G_3 + \frac{1-a}{r} G_2 + \frac{b}{2r} G_1 = 0, \\
 4) \quad & 2 \left(\frac{d}{dr} - \frac{1-a}{2r} \right) F_0 - \frac{1+a}{2r} G_3 + \frac{b}{2r} G_1 + 2i\varepsilon F_2 - i\varepsilon F_3 = 0, \\
 5) \quad & -i\varepsilon F_1 + \frac{d}{dr} G_1 + \frac{b}{r} G_2 + \frac{b}{r} F_0 = 0, \quad 6) \quad -i\varepsilon G_1 + \frac{d}{dr} F_1 + \frac{b}{r} F_2 + \frac{b}{r} G_0 = 0, \\
 7) \quad & -i\varepsilon F_3 + \frac{1+a}{r} F_0 + \frac{1+a}{2r} G_3 - \frac{b}{2r} G_1 = 0, \quad 8) \quad i\varepsilon G_3 + \frac{1-a}{r} G_0 - \frac{1-a}{2r} F_3 - \frac{b}{2r} F_1 = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Величины a, b определяются полным моментом j . Из 2), 4) и 7), 8) находим

$$\begin{aligned}
 F_2 &= i \frac{(a-1)F_0 + (a-1)G_2 + r(-i\varepsilon F_3 + 2F_0 + G_3)}{2r\varepsilon}, \\
 G_2 &= -i \frac{(a+1)G_0 + (a+1)F_2 + r(F_3 - i\varepsilon G_3 - 2G_0)}{2r\varepsilon};
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 F_3 &= \frac{2(a^2-1)G_0 + (a+1)(bF_1 + 4ir\varepsilon F_0) - 2ibr\varepsilon G_1}{a^2 - 4r^2\varepsilon^2 - 1}, \\
 G_3 &= \frac{-2(a^2-1)F_0 + (a-1)(bG_1 + 4ir\varepsilon G_0) + 2ibr\varepsilon F_1}{a^2 - 4r^2\varepsilon^2 - 1}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя (2) и (3) в уравнения 1), 3), 5), 6), получаем две пары уравнений, относительно F'_0, F'_1 , и G'_0, G'_1 . Их решения имеют вид

$$F_0 = \frac{1}{-a^2 r + 4r^3 \varepsilon^2 + r} \times \\ \times [ir\varepsilon(-3a^2 + 3 + 4r^2 \varepsilon^2)G_0 + (a^3 - a + 4r^2 \varepsilon^2)F_0 - i(1+a)br\varepsilon F_1 - 2br^2 \varepsilon^2 G_1], \quad (4)$$

$$G_0 = \frac{1}{-a^2 r + 4r^3 \varepsilon^2 + r} \times \\ [ir\varepsilon(-3a^2 + 3 + 4r^2 \varepsilon^2)F_0 - (a^3 - a - 4r^2 \varepsilon^2)G_0 - 2br^2 \varepsilon^2 F_1 - i(1-a)br\varepsilon G_1], \quad (5)$$

$$G_1 = i\varepsilon F_1, F_1 = i\varepsilon G_1. \quad (6)$$

Из (6) следуют явные выражения для функций F_1 и G_1 :

$$\delta = +1, F_1 = e^{+i\varepsilon r}, G_1 = e^{+i\varepsilon r}; \delta = -1, F_1 = e^{-i\varepsilon r}, G_1 = -e^{-i\varepsilon r}. \quad (7)$$

Из (4) и (5) находим 4 неоднородных уравнения:

$$\delta = +1$$

$$\Delta_2 G_0 + \frac{ib\varepsilon e^{ir\varepsilon}(-3(a-1)a + 2r\varepsilon(2r\varepsilon + 3i))}{r(-3a^2 + 4r^2 \varepsilon^2 + 3)} = 0, \\ \Delta_2 F_0 - \frac{ib\varepsilon e^{ir\varepsilon}(3a(a+1) - 2r\varepsilon(2r\varepsilon + 3i))}{r(-3a^2 + 4r^2 \varepsilon^2 + 3)} = 0;$$

$$\delta = -1,$$

$$\Delta_2 G_0 + \frac{ib\varepsilon e^{-ir\varepsilon}(3(a-1)a + 2r\varepsilon(-2r\varepsilon + 3i))}{r(-3a^2 + 4r^2 \varepsilon^2 + 3)} = 0, \\ \Delta_2 f_0 + \frac{b\varepsilon e^{-ir\varepsilon}(2r\varepsilon(3 + 2ir\varepsilon) - 3ia(a+1))}{r(-3a^2 + 4r^2 \varepsilon^2 + 3)} = 0.$$

Оператор Δ_2 задается равенством

$$\Delta_2 = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{8r\varepsilon^2}{(-3a^2 + 4r^2 \varepsilon^2 + 3)} \frac{d}{dr} + \frac{(15 - 7a^2)r^2 \varepsilon^2 + 3(a-1)a(a+1)^2 + 4r^4 \varepsilon^4}{r^2(-3a^2 + 4r^2 \varepsilon^2 + 3)}. \quad (8)$$

Неоднородные уравнения позволяют найти все оставшиеся переменные $F_1, G_1; F_2, G_2; F_3, G_3$. Нужно знать их частные решения и общие решения соответствующих однородных. Частные решения могут быть найдены с использованием калибровочных решений, общая структура которых такая:

$$\begin{aligned}
\bar{F}_0 &= -i\varepsilon(K_1 + K_2)\frac{1}{\sqrt{2}}, & G_0 &= -i\varepsilon(K_1 - K_2)\frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\bar{F}_1 &= -\frac{b}{\sqrt{2}r}(K_1 + K_2), & \bar{G}_1 &= -\frac{b}{\sqrt{2}r}(K_1 - K_2), \\
\bar{F}_2 &= \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r}\right)(K_1 + K_2)\frac{1}{\sqrt{2}}, & \bar{G}_2 &= \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r}\right)(K_1 - K_2)\frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\bar{F}_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}r}(a+1)(K_1 + K_2), & \bar{G}_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}r}(a-1)(K_1 - K_2);
\end{aligned} \tag{9}$$

Частные решения следует выбрать, исходя из двух соотношений (см. (7)):

$$(K_1 + K_2) = -\frac{\sqrt{2}r}{b}e^{i\delta\varepsilon r}, \quad (K_1 - K_2) = -\delta\frac{\sqrt{2}r}{b}e^{i\delta\varepsilon r}; \tag{10}$$

Откуда следует

$$\delta = +1, \quad K_1 = -\frac{r\sqrt{2}}{b}e^{+i\varepsilon r}, \quad K_2 = 0; \quad \delta = +1, \quad K_1 = 0, \quad K_2 = -\frac{r\sqrt{2}}{b}e^{-i\varepsilon r}. \tag{11}$$

Таким образом, будем использовать два типа калибровочных решений:

$$\begin{aligned}
&\delta = +1, \\
&\bar{F}_0 = \frac{i\varepsilon r}{b}e^{+i\varepsilon r}, & G_0 &= \frac{i\varepsilon r}{b}e^{+i\varepsilon r}, \\
&\bar{F}_1 = e^{+i\varepsilon r}, & \bar{G}_1 &= e^{+i\varepsilon r}, \\
&\bar{F}_2 = -\left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r}\right)\frac{r}{b}e^{+i\varepsilon r}, & \bar{G}_2 &= -\left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r}\right)\frac{r}{b}e^{+i\varepsilon r}, \\
&\bar{F}_3 = \frac{a+1}{b}e^{+i\varepsilon r}, & \bar{G}_3 &= \frac{a-1}{b}e^{+i\varepsilon r};
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
&\delta = -1, \\
&\bar{F}_0 = \frac{i\varepsilon r}{b}e^{-i\varepsilon r}, & G_0 &= -\frac{i\varepsilon r}{b}e^{-i\varepsilon r}, \\
&\bar{F}_1 = e^{-i\varepsilon r}, & \bar{G}_1 &= -e^{-i\varepsilon r}, \\
&\bar{F}_2 = -\left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r}\right)\frac{r}{b}e^{-i\varepsilon r}, & \bar{G}_2 &= \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r}\right)\frac{r}{b}e^{-i\varepsilon r}, \\
&\bar{F}_3 = \frac{a+1}{b}e^{-i\varepsilon r}, & \bar{G}_3 &= -\frac{a-1}{b}e^{-i\varepsilon r};
\end{aligned} \tag{13}$$

Прямым вычислением можно убедиться, что таким образом действительно получаются частные решения неоднородных систем. Обратимся к

однородным уравнениям. Учтем тождество $a^2 - 1 = (j + 1/2)^2 - 1 = b^2$ и перейдем к переменной $\varepsilon r = x$, в результате получаем уравнение

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{8x}{(4x^2 - 3b^2)} \frac{df}{dx} + \frac{4x^4 + (8 - 7b^2)x^2 + 3b^2 a(a+1)}{x^2(4x^2 - 3b^2)} f = 0 \quad (14)$$

стремя регулярными сингулярными точками и одной нерегулярной ранга 2. Поведение решений около точек $x = \pm\sqrt{3b}/2$ тривиальное:

$$f(x) = (x + \sqrt{3b}/2)^s, \quad f(x) = (x - \sqrt{3b}/2)^s, \quad s = 0, 2. \quad (15)$$

Решения Фробениуса уравнения (16) строятся на основе подстановки $f(x) = x^A e^{Bx} F(x)$; при выборе параметров согласно $A = -a, a+1, B = \pm i$ уравнение для F имеет вид

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \left(2B + \frac{2A}{x} - \frac{8x}{4x^2 - 3b^2} \right) \frac{dF}{dx} + \left[\frac{2AB}{x} + \frac{-8Bx - 8A + 4a(a+1) - 4b^2 + 8}{4x^2 - 3b^2} \right] F = 0.$$

Его решения строятся в виде степенных рядов с 4-членными рекуррентными соотношениями. Согласно методу Пуанкаре-Перрона возможны следующие радиусы сходимости: $R_{conv} = \sqrt{3b}/2, \infty$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fierz, M. Über die relativistische Theorie der Kraftfreien Teilchen mit beliebigen Spin / M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 3–37.
2. Spherical solutions of the wave equation for a spin 3/2 particle / A. V. Ivashkevich, E.M. Ovsyuk, V.V. Kisel, V.M. Red'kov // Доклады НАН-Беларуси. – 2019. – Том 63, № 3. – С. 282–290.