МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 514.76

ТЕНЗОРЫ РИЧЧИ ИНВАРИАНТНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НА НЕРЕДУКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н. П. Можей
кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

В работе указан объект исследования – структуры на однородных пространствах. В общем случае задача исследования многообразий различных типов является достаточно сложной, поэтому естественно рассматривать ее в более узком классе нередуктивных пространств. Определены основные понятия: изотропно-точная пара, (инвариантная) аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, тензор Риччи, редуктивное пространство. Если однородное пространство является редуктивным, то оно всегда допускает инвариантную связность; в данной работе же изучаются трехмерные нередуктивные однородные пространства, допускающие инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны. Для всех трехмерных нередуктивных однородных пространств указанного типа найдены и выписаны в явном виде тензоры Риччи инвариантных аффинных связностей.

Ключевые слова: аффинная связность, тензор Риччи, тензор кривизны, редуктивное пространство, группа преобразований.

Введение

Гладкое многообразие обобщает кривые и поверхности трехмерного евклидова пространства, рассматриваемые локально в классической дифференциальной геометрии и глобально в аналитической геометрии. Тензор Риччи задает один из способов измерения кривизны многообразия (степени отличия геометрии многообразия от геометрии плоского пространства), также в общей теории относительности тензор кривизны Риччи служит ключевым компонентом уравнений Эйнштейна. Кривизна Риччи появляется и в уравнении потока Риччи, в котором зависящая от времени метрика деформируется пропорционально кривизне Риччи (со знаком минус). Потоки Риччи ввел Р. Гамильтон, он же получил глубокие результаты в теории трехмерных многообразий. В работах, связанных с доказательством гипотезы Пуанкаре, потоки Риччи использовались как важное техническое средство, было получено много результатов о существовании и свойствах таких потоков (см., например, [1]). Поток Риччи задается через тензор Риччи. Если кривизна связности нулевая, то тензор Риччи также нулевой. Целью данной работы является описание тензоров Риччи инвариантных связностей на трехмерных нередуктивных пространствах, допускающих аффинные связности только ненулевой кривизны (с описанием таких пространств можно ознакомиться в работе [2], в которой приведен более подробный тематический обзор, а также обоснование применяемых методов; при изложении сохранены обозначения, введенные ранее).

Основная часть

Пусть $(\overline{G}, M)$ – трехмерное однородное пространство, где $\overline{G}$ – группа Ли на многообразии M. Зафиксируем произвольную точку $o \in M$ и обозначим через $G = \overline{G}_o$ стабилизатор точки o. Поставим в соответствие $(\overline{G}, M)$ пару $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли, где $\overline{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра $\overline{\mathfrak{g}}$, соответствующая подгруппе G. *Изотропный* $\mathfrak{g}$*-модуль* $\mathfrak{m}$ – это $\mathfrak{g}$-модуль $\overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ такой, что $x.(y+\mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}$. Соответствующее представление $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ является *изотропным представлением* пары $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если ее изотропное представление – инъекция.

Между инвариантными аффинными связностями на $(\overline{G}, M)$ и линейными отображениями $\Lambda : \overline{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ такими, что $\Lambda|_{\mathfrak{g}} = \lambda$ и отображение Λ является $\mathfrak{g}$-инвариантным, существует взаимно-однозначное соответствие (см. [3]). Будем называть такие отображения *(инвариантными) аффинными связностями* на паре $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Если возможна хотя бы одна связность на паре $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, то такая пара является изотропно-точной (см. [4]). *Тензоры кручения* $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и *кривизны* $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \overline{\mathfrak{g}}$ имеют соответственно вид $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$, а *тензор Риччи* имеет вид $Ric(y_{\mathfrak{m}}, z_{\mathfrak{m}}) = tr\{x_{\mathfrak{m}} \mapsto R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}})z_{\mathfrak{m}}\}$ для всех $x, y, z \in \overline{\mathfrak{g}}$.

Того, что пара является изотропно-точной, не достаточно для существования инвариантных связностей (см., например, [5]). Однородное пространство $\overline{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\overline{\mathfrak{g}}$ для $\overline{G}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ для G и $\mathrm{a}d(G)$-инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \bigcap \mathfrak{m} = 0$; $\mathrm{a}d(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Второе условие влечет $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна. Этот класс однородных пространств ввел в рассмотрение П. К. Рашевский [6], у редуктивных пространств при параллельном переносе сохраняются тензор кривизны и тензор кручения. Если $\overline{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность [4]. Все трехмерные нередуктивные пространства, допускающие аффинные связности, кривизна которых не может быть нулевой, приведены в [2]. Найдем тензоры Риччи инвариантных связностей на таких пространствах.

Будем определять пару $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ таблицей умножения алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, ..., e_n\}$ будем обозначать базис $\overline{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \overline{\mathfrak{g}}$). Полагаем, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, ..., e_{n-3}$. Пусть $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для ссылки на пару будем использовать обозначение $d.n.m$, где d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, соответствующие приведенным в [2]. Поскольку ограничение $\Lambda : \overline{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на $\mathfrak{m}$ – изотропное представление подалгебры, связность определяется своими значениями на $\mathfrak{m}$, будем выписывать ее через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$ (поскольку $\Lambda|_{\mathfrak{g}} = \lambda$), тензор кривизны R будем описывать его значениями $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T – его значениями $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$.

В работе [2] получен следующий результат:

Теорема 1. *Любая нередуктивная пара* $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, *допускающая инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, эквивалентна одной и только одной из следующих пар:*

4.21.24(25).	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	e_4	u_1	u_2	0
e_2	0	0	e_4	0	0	u_1	e_2
e_3	$-e_3$	$-e_4$	0	0	0	0	u_2
e_4	$-e_4$	0	0	0	0	0	e_4+u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	αe_4
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$\alpha e_3+\delta e_4-u_2$
u_3	0	$-e_2$	$-u_2$	$-e_4-u_1$	$-\alpha e_4$	$-\alpha e_3-\delta e_4+u_2$	0

, $\alpha < -1/4$, $\delta = 0, 1$,

3.20.22.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$(1/2)e_3$	u_1	0	$(1/2)u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$-(1/2)e_3$	0	0	0	e_3	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	$2u_1$	0
u_2	0	$-u_1$	$-e_3$	$-2u_1$	0	e_3-u_3
u_3	$-(1/2)u_3$	0	$-u_1$	0	$-e_3+u_3$	0

,

3.20.27.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(4/5)e_2$	$(3/5)e_3$	u_1	$(1/5)u_2$	$(2/5)u_3$
e_2	$-(4/5)e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$-(3/5)e_3$	0	0	0	e_2	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-(1/5)u_2$	$-u_1$	$-e_2$	0	0	e_3
u_3	$-(2/5)u_3$	0	$-u_1$	0	$-e_3$	0

,

3.25.25(26).	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_2	0	u_1	e_1
e_2	0	0	0	0	0	u_1
e_3	e_2	0	0	0	0	$-e_3+u_2$
u_1	0	0	0	0	0	$\alpha e_2+(1+\beta)u_1$
u_2	$-u_1$	0	0	0	0	$\delta e_2+\alpha e_3+\beta u_2$
u_3	$-e_1$	$-u_1$	e_3-u_2	$-\alpha e_2-(1+\beta)u_1$	$-\delta e_2-\alpha e_3-\beta u_2$	0

, $\alpha < -(\beta+1)^2/4$, $\delta = 0, 1$,

2.13.7.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	u_2
e_2	0	0	0	0	e_2+u_1
u_1	0	0	0	0	αu_1
u_2	$-u_1$	0	0	0	$(1-\alpha)e_1+e_2+\alpha u_2$
u_3	$-u_2$	$-e_2-u_1$	$-\alpha u_1$	$(\alpha-1)e_1-e_2-\alpha u_2$	0

, $\alpha \neq 3/2$,

2.13.8.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	u_2
e_2	0	0	0	0	e_2+u_1
u_1	0	0	0	0	αu_1
u_2	$-u_1$	0	0	0	$\beta e_1+\alpha u_2$
u_3	$-u_2$	$-e_2-u_1$	$-\alpha u_1$	$-\beta e_1-\alpha u_2$	0

, $\beta \neq 1/4 - \alpha/2$,

2.20.3,2.20.8.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	e_1+u_1	0
e_2	0	0	0	δe_1+e_2	u_1
u_1	0	0	0	$2u_1$	0
u_2	$-e_1-u_1$	$-\delta e_1-e_2$	$-2u_1$	0	e_2-u_3
u_3	0	$-u_1$	0	$-e_2+u_3$	0

, $\delta = 0, 1$,

2.20.6.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	0
e_2	0	0	0	e_1	u_1
u_1	0	0	0	0	0
u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0	e_2
u_3	0	$-u_1$	0	$-e_2$	0

,

2.20.12,2.20.14.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	$-2e_1$
e_2	0	0	0	δe_1	$-e_2+u_1$
u_1	0	0	0	0	$-3u_1$
u_2	$-u_1$	$-\delta e_1$	0	0	e_2-u_2
u_3	$2e_1$	e_2-u_1	$3u_1$	u_2-e_2	0

, $\delta = \pm 1$,

2.20.9.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	αe_1
e_2	0	0	0	0	$u_1+(\alpha+1)e_2$
u_1	0	0	0	0	$2\alpha u_1$
u_2	$-u_1$	0	0	0	$e_1+\alpha u_2$
u_3	$-\alpha e_1$	$-u_1-(\alpha+1)e_2$	$-2\alpha u_1$	$-e_1-\alpha u_2$	0

,

2.20.22.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	αe_1
e_2	0	0	0	e_1	$u_1+(\alpha+1)e_2$
u_1	0	0	0	0	$(\alpha-1)u_1$
u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0	$-u_2$
u_3	$-\alpha e_1$	$-u_1-(\alpha+1)e_2$	$(1-\alpha)u_1$	u_2	0

,

1.5.21.	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_1	u_1
u_1	0	0	u_1	$-e_1$
u_2	$-e_1$	$-u_1$	0	0
u_3	$-u_1$	e_1	0	0

.

Доказательство теоремы приведено в [2].

Используя приведенную локальную классификацию трехмерных нередуктивных однородных пространств, не допускающих связностей нулевой кривизны, найдем тензоры Риччи связностей указанного вида.

Теорема 2. *Пусть* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ *– трехмерное нередуктивное однородное пространство, допускающее инвариантные связности только ненулевой кривизны (приведенное в теореме 1). Тензоры Риччи инвариантных связностей на* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ *имеют вид, приведенный в таблице (здесь и далее* $p_{ij}, q_{ij}, r_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = \overline{1,3})$*):*

Пара	Тензор Риччи
4.21.24, 4.21.25	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}^2 - 2\alpha + 2p_{1,3} \end{pmatrix}$
3.20.27	нулевой
3.20.22	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 - 4p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.25.25, 3.25.26	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\beta p_{1,3} + 2p_{1,3}^2 - 2\alpha - 2p_{1,3} \end{pmatrix}$

Окончание таблицы

Пара	Тензор Риччи
2.13.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha p_{1,3}+2p_{1,3}^2+2p_{1,3}-3/4+1/2\alpha \end{pmatrix}$
2.13.8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha p_{1,3}+2p_{1,3}^2+2p_{1,3}+1/4-\beta-1/2\alpha \end{pmatrix}$
2.20.3($\delta=0$)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2-2p_{1,2} & 2p_{1,2}p_{1,3}-2p_{1,3}-r_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3}+r_{1,1} & 2p_{1,3}^2 \end{pmatrix}$
2.20.8($\delta=1$)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2-2p_{1,2}+2p_{1,3} & 2p_{1,2}p_{1,3}-2p_{1,3}-r_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3}+r_{1,1} & 2p_{1,3}^2 \end{pmatrix}$
2.20.6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2+2p_{1,3} & 2p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3} & 2p_{1,3}^2 \end{pmatrix}$
2.20.9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 & \alpha q_{1,1}+2p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & -2\alpha p_{1,2}-\alpha q_{1,1}+2p_{1,2}p_{1,3} & -2\alpha p_{1,3}+2p_{1,3}^2+2p_{1,3} \end{pmatrix}$
2.20.22	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2+2p_{1,3} & 2p_{1,2}p_{1,3}-q_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3}+2p_{1,2}+q_{1,1} & 2p_{1,3}^2+4p_{1,3} \end{pmatrix}$
2.20.12($\delta=1$)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2+2p_{1,3} & 2p_{1,2}p_{1,3}-q_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3}+2p_{1,2}+q_{1,1} & 2p_{1,3}^2+4p_{1,3} \end{pmatrix}$
2.20.14($\delta=-1$)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2-2p_{1,3} & 2p_{1,2}p_{1,3}-q_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3}+2p_{1,2}+q_{1,1} & 2p_{1,3}^2+4p_{1,3} \end{pmatrix}$
1.5.21	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,2}p_{2,3}-p_{2,3}q_{1,1}+p_{2,3}q_{2,2} \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1}+2p_{1,2}q_{2,2}-2p_{1,2} & 2p_{1,2}q_{2,3}-p_{2,3}q_{1,2} \\ -p_{1,2}p_{2,3}+p_{2,3}q_{1,1}-p_{2,3}q_{2,2} & B & A \end{pmatrix},$ $A=p_{1,2}r_{2,3}+p_{1,3}^2+p_{1,3}q_{2,3}+p_{2,3}q_{1,3}-p_{2,3}r_{1,2}-q_{1,1}r_{2,3}+q_{2,2}r_{2,3}+q_{2,3}r_{1,1}-q_{2,3}r_{2,2}-r_{2,3}+1,$ $B=p_{1,2}p_{1,3}+p_{1,2}q_{2,3}-p_{1,2}r_{1,1}+p_{1,2}r_{2,2}+p_{2,3}q_{1,2}$

Доказательство. Для каждой пары, приведенной в теореме 1, выпишем инвариантные связности и найдем тензоры Риччи. Например, в случаях 4.21.24 и 4.21.25 аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & 0 \\ 0 & r_{1,1}+1 & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3}+1 \end{pmatrix}.$$

В случае 4.21.24 тензор кривизны принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & {p_{1,3}}^2+p_{1,3}-\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2q_{1,3}p_{1,3}+2q_{1,3} \\ 0 & 0 & {p_{1,3}}^2+p_{1,3}-\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\alpha \geq -1/4$ уравнение ${p_{1,3}}^2+p_{1,3}-\alpha=0$ имеет решение, т.е. если $p_{1,3}$ – корень этого уравнения, а $q_{1,3}=0$, то тензор кривизны нулевой. Если $\alpha < -1/4$, то при любых значениях параметров $p_{1,3}$, $q_{1,3} \in \mathbb{R}$ тензор кривизны не может оказаться нулевым. Тогда тензор Риччи $Ric(y,z)=tr\{x \mapsto R(x,y)z\}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}^2-2\alpha+2p_{1,3} \end{pmatrix}.$$

Аналогично, в случае 4.21.25 тензор кривизны –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & {p_{1,3}}^2+p_{1,3}-\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2q_{1,3}p_{1,3}+2q_{1,3}-1 \\ 0 & 0 & {p_{1,3}}^2+p_{1,3}-\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор ненулевой при $\alpha < -1/4$. Тогда тензор Риччи совпадает с выписанным в случае 4.21.24.

В случае 3.20.27 аффинная связность и тензор кривизны (соответственно) имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

очевидно, что тензор кривизны ненулевой, а тензор Риччи нулевой.

В случае 3.20.22 аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1}+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

а тензор кривизны –

$$\begin{pmatrix} 0 & {p_{1,2}}^2-2p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}-{p_{1,2}}^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны ненулевой при любых значениях параметра $p_{1,2}$. Получаем тензор Риччи

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 - 4p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аффинная связность в случаях 3.25.25 и 3.25.26 принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & r_{1,1}+1 & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix},$$

тензор кривизны в случаях 3.25.25 и 3.25.26 ($\delta = 0$, 1 соответственно) –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & {p_{1,3}}^2 - \alpha - p_{1,3} - p_{1,3}\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2q_{1,3}p_{1,3} - \delta - \beta q_{1,3} \\ 0 & 0 & {p_{1,3}}^2 - \alpha - p_{1,3} - p_{1,3}\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\alpha < -(\beta+1)^2/4$ тензор кривизны ненулевой, тогда тензоры Риччи в случаях 3.25.25 и 3.25.26 совпадают и имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\beta p_{1,3} + 2p_{1,3}^2 - 2\alpha - 2p_{1,3} \end{pmatrix}.$$

В случаях 2.13.7 и 2.13.8 аффинная связность –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 1/2+p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{1,1}+1/2 & r_{1,2}+q_{1,3} \\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3}+1 \end{pmatrix},$$

тензор кривизны в случае 2.13.7 –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & {p_{1,3}}^2 + p_{1,3} - \alpha p_{1,3} \\ 0 & 0 & -\alpha p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3/4+\alpha/2 & 3q_{1,3}/2 + q_{1,3}p_{1,3} - r_{1,2}p_{1,3} - 1 - \alpha q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} - 3/4 + {p_{1,3}}^2 + \alpha/2 - \alpha p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\alpha \neq 3/2$ тензор кривизны ненулевой, а тензор Риччи –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha p_{1,3} + 2p_{1,3}^2 + 2p_{1,3} - 3/4 + 1/2\alpha \end{pmatrix},$$

в случае 2.13.8 тензор кривизны –

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}{}^2+p_{1,3}-\alpha p_{1,3}\\0&0&-\alpha p_{1,2}\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1/4-\beta-\alpha/2&3q_{1,3}/2+q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}-\alpha q_{1,3}\\0&0&p_{1,3}+1/4+p_{1,3}{}^2-\beta-\alpha/2-\alpha p_{1,3}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

при $\beta \neq 1/4-\alpha/2$ тензор кривизны ненулевой, тогда тензор Риччи –

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\alpha p_{1,3}+2p_{1,3}^2+2p_{1,3}+1/4-\beta-1/2\alpha\end{pmatrix}.$$

Аналогично получаем аффинную связность в случаях 2.20.3 (δ = 0) и 2.20.8 (δ = 1) –

$$\begin{pmatrix}0&p_{1,2}&p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}q_{1,1}&q_{1,2}&q_{1,3}\\0&q_{1,1}+p_{1,2}+1&p_{1,3}\\0&\delta&q_{1,1}+1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r_{1,1}&r_{1,2}&r_{1,3}\\0&r_{1,1}&0\\0&p_{1,2}&r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix},\ \delta=0,\ 1,$$

2.20.6 –

$$\begin{pmatrix}0&p_{1,2}&p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}q_{1,1}&q_{1,2}&q_{1,3}\\0&q_{1,1}+p_{1,2}&p_{1,3}\\0&1&q_{1,1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r_{1,1}&r_{1,2}&r_{1,3}\\0&r_{1,1}&0\\0&p_{1,2}&r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix},$$

2.20.9 (δ = 0), 2.20.22 (δ = 1) –

$$\begin{pmatrix}0&p_{1,2}&p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}q_{1,1}&q_{1,2}&q_{1,3}\\0&q_{1,1}+p_{1,2}&p_{1,3}\\0&\delta&q_{1,1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r_{1,1}&r_{1,2}&r_{1,3}\\0&r_{1,1}+\alpha&0\\0&p_{1,2}&r_{1,1}+p_{1,3}+\alpha+1\end{pmatrix},\ \delta=0,\ 1,$$

2.20.12 (δ = 1), 2.20.14 (δ = –1) –

$$\begin{pmatrix}0&p_{1,2}&p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}q_{1,1}&q_{1,2}&q_{1,3}\\0&q_{1,1}+p_{1,2}&p_{1,3}\\0&\delta&q_{1,1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r_{1,1}&r_{1,2}&r_{1,3}\\0&r_{1,1}-2&0\\0&p_{1,2}&r_{1,1}+p_{1,3}-1\end{pmatrix},\ \delta=\pm 1.$$

Тензоры кривизны, соответственно, в случаях 2.20.3 (δ = 0) и 2.20.8 (δ = 1) принимают вид

$$\begin{pmatrix}0&p_{1,2}{}^2-p_{1,2}+\delta p_{1,3}&p_{1,2}p_{1,3}-p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&p_{1,2}p_{1,3}&p_{1,3}{}^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} r_{1,1} & q_{1,3}p_{1,2} - r_{1,2}p_{1,2} - \delta r_{1,3} & q_{1,3}p_{1,3} - r_{1,2}p_{1,3} - 1 \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1} & p_{1,3}{}^2 \\ 0 & p_{1,2} - p_{1,2}{}^2 - \delta p_{1,3} & -p_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1} + p_{1,3} \end{pmatrix}, \delta = 0,\ 1,$$

в случае 2.20.6 –

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}{}^2+p_{1,3} & p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,3}{}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,2}p_{1,2}-r_{1,3} & q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}-1 \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,3}{}^2 \\ 0 & -p_{1,2}{}^2-p_{1,3} & -p_{1,2}p_{1,3} \end{pmatrix},$$

2.20.9 –

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}{}^2 & p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\alpha p_{1,2} + p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,3}{}^2 - \alpha p_{1,3} + p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha q_{1,1} & q_{1,3}p_{1,2} - r_{1,2}p_{1,2} - 1 & q_{1,3}p_{1,3} + q_{1,3} - r_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} - \alpha q_{1,1} - \alpha p_{1,2} & p_{1,3}{}^2 - \alpha p_{1,3} + p_{1,3} \\ 0 & -p_{1,2}{}^2 & -p_{1,2}p_{1,3} - \alpha q_{1,1} \end{pmatrix},$$

2.20.12 ($\delta = -1$), 2.20.14 ($\delta = -1$) –

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}{}^2 + \delta p_{1,3} & p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} + p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,3}{}^2 + 2p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} q_{1,1} & -q_{1,2} + q_{1,3}p_{1,2} - r_{1,2}p_{1,2} - \delta r_{1,3} & q_{1,3}p_{1,3} - r_{1,2}p_{1,3} - 1 \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} + q_{1,1} + p_{1,2} & p_{1,3}{}^2 + 2p_{1,3} \\ 0 & -p_{1,2}{}^2 - \delta p_{1,3} & -p_{1,2}p_{1,3} + q_{1,1} \end{pmatrix}, \delta = \pm 1,$$

2.20.22 –

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}{}^2+p_{1,3} & p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & p_{1,2}\alpha+p_{1,2}p_{1,3}+q_{1,2} & p_{1,3}{}^2+p_{1,3}\alpha+p_{1,3}+q_{1,3} \\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 1 & q_{1,1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & q_{1,2}\alpha+q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,2}p_{1,2}-r_{1,3} & q_{1,3}p_{1,3}+q_{1,3}\alpha+q_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,3}{}^2 + p_{1,3} \\ 0 & -1 - p_{1,2}{}^2 - p_{1,3} & -p_{1,2}p_{1,3} \end{pmatrix},$$

Тогда тензоры Риччи в случаях 2.20.3 ($\delta = 0$), 2.20.8 ($\delta = 1$) имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 - 2p_{1,2} & 2p_{1,2}p_{1,3} - 2p_{1,3} - r_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1} & 2p_{1,3}^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 - 2p_{1,2} + 2p_{1,3} & 2p_{1,2}p_{1,3} - 2p_{1,3} - r_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1} & 2p_{1,3}^2 \end{pmatrix},$$

в случае 2.20.6 –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 + 2p_{1,3} & 2p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3} & 2p_{1,3}^2 \end{pmatrix},$$

2.20.9 –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 & \alpha q_{1,1} + 2p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & -2\alpha p_{1,2} - \alpha q_{1,1} + 2p_{1,2}p_{1,3} & -2\alpha p_{1,3} + 2p_{1,3}^2 + 2p_{1,3} \end{pmatrix},$$

2.20.22 –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 + 2p_{1,3} & 2p_{1,2}p_{1,3} - q_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3} + 2p_{1,2} + q_{1,1} & 2p_{1,3}^2 + 4p_{1,3} \end{pmatrix},$$

2.20.12 ($\delta = 1$), 2.20.14 ($\delta = -1$) –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 + 2p_{1,3} & 2p_{1,2}p_{1,3} - q_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3} + 2p_{1,2} + q_{1,1} & 2p_{1,3}^2 + 4p_{1,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 - 2p_{1,3} & 2p_{1,2}p_{1,3} - q_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3} + 2p_{1,2} + q_{1,1} & 2p_{1,3}^2 + 4p_{1,3} \end{pmatrix}.$$

Аффинная связность в случае 1.5.21 –

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & q_{2,2} & q_{2,3} \\ 0 & 0 & q_{1,1}-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ -p_{2,3} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix},$$

тензор кривизны –

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}q_{2,2}-q_{1,1}p_{1,2}-p_{1,2} & p_{1,2}q_{2,3}-2p_{1,3}-q_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1}-2p_{2,3}-q_{2,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3} & p_{1,2}r_{2,2}+p_{1,3}p_{1,2}-r_{1,1}p_{1,2} & p_{1,2}r_{2,3}+p_{1,3}^{\ 2}-r_{1,2}p_{2,3}+1 \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3} & p_{2,3}r_{1,1}+2p_{2,3}p_{1,3}-r_{2,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -q_{1,2}p_{2,3} & q_{1,1}r_{1,2}+q_{1,2}r_{2,2}+q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,1}q_{1,2}-r_{1,2}q_{2,2} & q_{1,2}r_{2,3}+q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}q_{2,3}+r_{1,3} \\ -q_{2,2}p_{2,3}+p_{2,3}q_{1,1} & p_{1,2}q_{2,3}+q_{1,2}p_{2,3} & \begin{array}{c} q_{2,2}r_{2,3}+q_{2,3}r_{1,1}+q_{2,3}p_{1,3}+ \\ +p_{2,3}q_{1,3}-r_{2,2}q_{2,3}-r_{2,3}q_{1,1}+r_{2,3} \end{array} \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2}-p_{1,2}-p_{1,2}q_{2,2} & -p_{1,2}q_{2,3} \end{pmatrix},$$

тогда тензор Риччи –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,2}p_{2,3}-p_{2,3}q_{1,1}+p_{2,3}q_{2,2} \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1}+2p_{1,2}q_{2,2}-2p_{1,2} & 2p_{1,2}q_{2,3}-p_{2,3}q_{1,2} \\ -p_{1,2}p_{2,3}+p_{2,3}q_{1,1}-p_{2,3}q_{2,2} & B & A \end{pmatrix},$$

$$A = p_{1,2}r_{2,3}+p_{1,3}^2+p_{1,3}q_{2,3}+p_{2,3}q_{1,3}-p_{2,3}r_{1,2}-q_{1,1}r_{2,3}+q_{2,2}r_{2,3}+q_{2,3}r_{1,1}-q_{2,3}r_{2,2}-r_{2,3}+1,$$

$$B = p_{1,2}p_{1,3}+p_{1,2}q_{2,3}-p_{1,2}r_{1,1}+p_{1,2}r_{2,2}+p_{2,3}q_{1,2}.$$

Таким образом тензоры Риччи имеют вид, приведенный в теореме.

Заключение

В работе для всех трехмерных нередуктивных однородных пространств (допускающих инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны) найдены и выписаны в явном виде тензоры Риччи указанных связностей. Полученные результаты могут быть применены в работах по дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям, топологии, в теории представлений, а также в других разделах современной математики и в теоретической физике. Изложенные в работе методы могут быть применены для анализа физических моделей, а приведенные алгоритмы могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Chow, B.*** Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 110: The Ricci flow: an introduction / B. Chow, D. Knopf. – Providence: American Mathematical Society, 2004. – 325 p.
2. ***Можей, Н. П.*** Связности ненулевой кривизны на трехмерных нередуктивных пространствах / Н. П. Можей // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2017. – Т. 17, вып. 4. – С. 381–393.
3. ***Nomizu, K.*** Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. J. Math. – 1954. – V. 76, № 1. – C. 33–65.

4. ***Kobayashi, S.*** Foundations of differential geometry / S. Kobayashi, K.Nomizu. – New York : John Wiley and Sons, 1963. – T. 1; 1969. – T. 2.

5. ***Можей, Н. П.*** Трехмерные однородные пространства, не допускающие инвариантных связностей / Н. П. Можей // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. – Т. 16, № 4. – С. 413–421.

6. ***Рашевский, П. К.*** Симметрические пространства аффинной связности с кручением / П. К. Рашевский // Труды семин. по векторн. и тенз. анализу. – 1969. – № 8. – С. 82–92.

Поступила в редакцию 26.10.2020 г.
Контакты: mozheynatalya@mail.ru (Можей Наталья Павловна)

Mozhey N.P. RICCI TENSORS OF INVARIANT CONNECTIONS ON NON-REDUCTIVE SPACES

The object of the research is pointed out as structures on homogeneous spaces. In general, the purpose of the research of manifolds of various types is rather complicated; therefore, it is natural to consider it in a narrower class of non-reductive spaces. The basic notions, such as isotropically-faithful pair, (invariant) affine connection, curvature tensor, torsion tensor, Ricci tensor, reductive space are defined. If a homogeneous space is reductive, then the space admits an invariant connection. In the article the authors study three-dimensional non-reductive homogeneous spaces which admit invariant affine connections of nonzero curvature only. For all three-dimensional non-reductive homogeneous spaces of this type, Ricci tensors of invariant affine connections are found and made explicit.

Keywords: affine connection, Ricci tensor, curvature tensor, reductive space, transformation group.