Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (126), 2021

УДК 514.765.1

Тензоры Риччи инвариантных связностей на редуктивных пространствах

Н.П. Можей

В общем случае задача исследования многообразий различных типов и структур на них является достаточно сложной, поэтому данная задача рассматривается в классе редуктивных однородных пространств, среди которых широкий подкласс образуют пространства с разрешимой группой преобразований. Исследование таких пространств существенно затруднено тем, что, в отличие от полупростых групп преобразований, не разработана структурированная теория их классификации, а сама классификация является громоздкой и трудоемкой. Если однородное пространство является редуктивным, то оно всегда допускает инвариантную связность. В работе изучаются трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие как эквиаффинную, так и нормальную связность. Найдены и описаны в явном виде тензоры Риччи инвариантных связностей на трехмерных редуктивных однородных пространствах с разрешимой группой преобразований.
Ключевые слова: эквиаффинная связность, нормальная связность, редуктивное пространство, группа преобразований, тензор Риччи.

In general, the problem of the research of manifolds of various types and structures on them is rather complicated; therefore, this problem is considered in the class of reductive homogeneous spaces, among which a wide subclass is formed by spaces with a solvable transformation group. The study of such spaces is significantly complicated by the fact that, in contrast to semisimple transformation groups, a structured theory of their classification has not been developed, and the classification itself is cumbersome and laborious. If a homogeneous space is reductive, then the space admits an invariant connection. In this paper, we study three-dimensional reductive homogeneous spaces that admit both equiaffine and normal connection. Ricci tensors invariant connections on three-dimensional reductive homogeneous spaces with a solvable transformation group are found and described in explicit form.
Keywords: equiaffine connection, normal connection, reductive space, transformation group, Ricci tensor.

Введение. В общем случае задача исследования многообразий различных типов и структур на них является достаточно сложной, поэтому данная задача рассматривается в классе редуктивных однородных пространств, среди которых широкий подкласс образуют пространства с разрешимой группой преобразований. Исследование таких пространств существенно затруднено тем, что, в отличие от полупростых групп преобразований, не разработана структурированная теория их классификации, а сама классификация является громоздкой и трудоемкой. Если однородное пространство является редуктивным, то оно всегда допускает инвариантную связность.

В работе обсуждаются существование и свойства инвариантных связностей на однородных пространствах, результаты Вана [1] применяются к ситуации, когда существует инвариантная структура на однородном пространстве, а именно, конструкция используется для случая редуктивного пространства. Тензор Риччи задаёт один из способов измерения кривизны многообразия (степени отличия геометрии многообразия от геометрии плоского пространства), в общей теории относительности тензор кривизны Риччи служит ключевым компонентом уравнений Эйнштейна. Кривизна Риччи появляется и в уравнении потока Риччи, в котором зависящая от времени метрика деформируется пропорционально кривизне Риччи (со знаком минус). Потоки Риччи ввел Р. Гамильтон, он же получил глубокие результаты в теории трехмерных многообразий. В работах, связанных с доказательством гипотезы Пуанкаре, потоки Риччи использовались как важное техническое средство, было получено много результатов о существовании и свойствах таких потоков (см., например, [2]). Понятие нормальной связности ввел Э. Картан (для риманова многообразия, см. [3]). Аффинная связность является эквиаффинной, если допускает параллельную форму объема (см. [4]). Трехмерные редуктивные однородные пространства разрешимых групп Ли изучались в [5], в данной работе находятся и описываются в явном виде тензоры Риччи инвариантных связностей на указанных пространствах.

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, (M, $\bar{G}$) – *однородное пространство*, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$, пара ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$.

Пусть $M = \bar{G}/G$ – однородное пространство, на котором связная группа $\bar{G}$ действует транзитивно и эффективно. Пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathrm{ad}(G)$-инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$; $\mathrm{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Второе условие влечет $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Аффинной связностью на паре ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве (M, $\bar{G}$) находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) (см., например, [6]). Если $\bar{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность и линейное представление изотропии для G всегда точное. Тензор кручения $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}, \quad R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \text{ для всех } x, y \in \bar{\mathfrak{g}}.$$

Будем говорить, что Λ имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если $T = 0$. Определим *тензор Риччи*

$$Ric \in Inv\mathrm{T}_2(\mathfrak{m}): \ Ric(y, z) = \mathrm{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}.$$

Будем говорить, что аффинная связность Λ является *локально эквиаффинной*, если $\mathrm{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ (то есть $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}]) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$). Аффинная связность Λ с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиаффинна. Под *эквиаффинной* связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\mathrm{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. В этом случае очевидно, что $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}) \in \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Алгебра Ли $\mathfrak{h}^*$ группы *голономии* инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Положим $\mathfrak{a}$ равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, порожденной $\{\Lambda(x) \mid x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Связность *нормальна*, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$.

Описание тензоров Риччи инвариантных связностей. Будем описывать пару ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, ..., e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, ..., e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [5], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$). Будем описывать аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R через $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T – через $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$.

Теорема 1. Все трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие как локально эквиаффинную, так и нормальную связность, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима, а $\dim \mathfrak{g} > 1$, локально имеют следующий вид:

2.9.1.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-2e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0

,

2.20.18,α=0.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	0
e_2	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	u_1
u_2	$-u_1$	0	0	0	u_2
u_3	0	$-u_1$	$-u_1$	$-u_2$	0

,

2.9.2.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-2e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	u_2
u_2	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_1$	$-u_2$	0	0

,

2.21.1.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	$-u_1$	0	0	0
u_3	u_3	$-u_2$	0	0	0

,

2.9.4,μ=0,−1.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-\mu)e_2$	u_1	0	μu_3
e_2	$(\mu-1)e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	u_1	0
u_2	0	0	$-u_1$	0	$-u_3$
u_3	$-\mu u_3$	$-u_1$	0	u_3	0

,

2.9.5,2.9.6.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	$\pm e_2$
u_2	0	0	0	0	αu_2
u_3	0	$-u_1$	$\mp e_2$	$-\alpha u_2$	0

,α≥0,

2.9.7.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	u_2
u_3	0	$-u_1$	0	$-u_2$	0

,

2.17.2, 2.17.3.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	0	u_1
e_2	0	0	0	0	u_2
u_1	0	0	0	0	$\pm e_1$
u_2	0	0	0	0	αe_2
u_3	$-u_1$	$-u_2$	$\mp e_1$	$-\alpha e_2$	0

,

Пара	*Совпадает с 2.17.2, за исключением*
2.17.4	$[u_1,u_3]=\alpha e_1-e_2,[u_2,u_3]=e_1+\alpha e_2,\alpha\geqslant 0$
2.17.6, 2.17.7	$[u_1,u_3]=\pm e_1,[u_2,u_3]=e_1+e_2$
2.17.8	$[u_1,u_3]=\delta e_1+u_1,[u_2,u_3]=\beta e_2+\alpha u_2,-1<\alpha<1$
2.17.9	$[u_1,u_3]=\delta e_1+e_2+u_1,[u_2,u_3]=\gamma e_1+\beta e_2+\alpha u_1,-1<\alpha<1$
2.17.10	$[u_1,u_3]=\delta e_1+u_1,[u_2,u_3]=e_1+\beta e_2+\alpha u_2,-1<\alpha<1$
2.17.13, 2.17.14	$[u_1,u_3]=\alpha e_1-e_2,[u_2,u_3]=\alpha e_2+u_1$
2.17.15	$[u_1,u_3]=\alpha e_1,[u_2,u_3]=e_1+\alpha e_2+u_1$
2.17.17	$[u_1,u_3]=e_2,[u_2,u_3]=\alpha e_1+\beta e_2+u_1$
2.17.18	$[u_1,u_3]=\gamma e_2+u_1,[u_2,u_3]=\alpha e_1+\beta e_2+u_1+u_2$
2.17.19	$[u_1,u_3]=\alpha e_1+u_1,[u_2,u_3]=\beta e_2+u_1+u_2$
2.17.20	$[u_1,u_3]=\alpha e_1+u_1,[u_2,u_3]=\beta e_1+\alpha e_2+u_1+u_2$
2.17.21	$[u_1,u_3]=\alpha e_1+u_1,[u_2,u_3]=e_1+\alpha e_2+u_2$
2.17.22	$[u_1,u_3]=\alpha e_1-\beta e_2+u_1,[u_2,u_3]=\beta e_1+\alpha e_2+u_2,\beta>0$
2.17.23	$[u_1,u_3]=\alpha e_1+u_1,[u_2,u_3]=\beta e_2+u_2,\lvert\alpha\rvert\leqslant\lvert\beta\rvert$
2.17.24	$[u_1,u_3]=\delta e_1+\gamma e_2+\alpha u_1-u_2,[u_2,u_3]=\beta e_1+\delta e_2+u_1+\alpha u_2,\lvert\beta\rvert\leqslant\lvert\gamma\rvert$
2.17.25	$[u_1,u_3]=\alpha e_1+u_1,[u_2,u_3]=\beta e_2-u_2,\lvert\alpha\rvert\leqslant\lvert\beta\rvert$
2.17.26	$[u_1,u_3]=\alpha e_1+\beta e_2+u_1,[u_2,u_3]=e_1+\gamma e_2-u_2,-1\leqslant\beta\leqslant 1$

Доказательство для случая нормальной связности приведено в [5]. Найдем тензоры Риччи инвариантных связностей на указанных пространствах.

Рассмотрим, например, пару 2.9.1 (при $\lambda=0,\ \mu=-1$). Тогда аффинная связность

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}q_{2,2} - q_{1,1}p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2} - p_{1,2}q_{2,2} & 0 \end{pmatrix},$$

найдем тензор Риччи $Ric(y,z) = \mathrm{tr}\{x \mapsto R(x,y)z\}$, получаем

$$Ric = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,2}p_{2,3} - p_{2,3}q_{1,1} + p_{2,3}q_{2,2} \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,2} & 0 \\ -p_{1,2}p_{2,3} + p_{2,3}q_{1,1} - p_{2,3}q_{2,2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор Риччи является симметрическим при $p_{2,3}(p_{1,2} - q_{1,1} + q_{2,2}) = 0$, в частности, при $T = 0$.

У пары 2.9.2 ($\mu = -1$) аффинная связность совпадает с выписанной для 2.9.1, тензор Риччи

$$Ric = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,2}p_{2,3} - p_{2,3}q_{1,1} + p_{2,3}q_{2,2} + q_{1,1} \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,2} & 0 \\ -p_{1,2}p_{2,3} + p_{2,3}q_{1,1} - p_{2,3}q_{2,2} - q_{1,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является симметрическим при $q_{1,1} = p_{2,3}(q_{1,1} - p_{1,2} - q_{2,2})$.

Рассмотрим пару 2.9.4 при $\mu = -1$, связность совпадает со случаем 2.9.1, в данном случае тензор Риччи $Ric=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,2}p_{2,3} - p_{2,3}q_{1,1} + p_{2,3}q_{2,2} + p_{2,3} \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,2} - 2p_{1,2} & 0 \\ -p_{1,2}p_{2,3} + p_{2,3}q_{1,1} - p_{2,3}q_{2,2} - p_{2,3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

также является симметрическим при $p_{2,3}(q_{1,1} - p_{1,2} - q_{2,2} - 1) = 0$, в частности, при $T = 0$.

В случае 2.21.1 при $\lambda = 0$ аффинная связность

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

тензор Риччи

$$Ric = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2p_{1,2}^2 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 & 0 \\ -2p_{1,2}^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является симметрическим.

Аналогично находим результаты для всех остальных случаев. Для пары 2.17.2 аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & r_{1,3} \\ -p_{2,3} & r_{1,1} + p_{1,3} - q_{2,3} & r_{2,3} \\ 0 & 0 & r_{1,1} + p_{1,3} \end{pmatrix},$$

у пар 2.17.3, 2.17.4, 2.17.6, 2.17.7, 2.17.8, 2.17.9, 2.17.10, 2.17.13, 2.17.14, 2.17.15, 2.17.17, 2.17.18, 2.17.19, 2.17.20, 2.17.21, 2.17.22, 2.17.23, 2.17.24, 2.17.25, 2.17.26 связность такая же, как в случае 2.17.2. Для пары 2.20.18 при $\alpha = 0$ аффинная связность

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ 0 & q_{11} + p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & q_{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{11} & 0 \\ 0 & p_{12} & r_{11} + p_{13} \end{pmatrix},$$

а для пар 2.9.4 ($\mu = 0$), 2.9.5, 2.9.6, 2.9.7 –

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & q_{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & p_{12} & r_{11} + p_{13} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, прямыми вычислениями получаем следующую теорему:

Теорема 2. Тензоры Риччи инвариантных связностей на трехмерных редуктивных однородных пространствах разрешимых групп Ли, приведенных в теореме 1, имеют следующий вид:

Пара	Тензоры Риччи
2.9.1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,2}p_{2,3} - p_{2,3}q_{1,1} + p_{2,3}q_{2,2} \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,2} & 0 \\ -p_{1,2}p_{2,3} + p_{2,3}q_{1,1} - p_{2,3}q_{2,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & S \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,2} & 0 \\ -p_{1,2}p_{2,3} + p_{2,3}q_{1,1} - p_{2,3}q_{2,2} - q_{1,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $S = p_{1,2}p_{2,3} - p_{2,3}q_{1,1} + p_{2,3}q_{2,2} + q_{1,1}$
2.9.4, $\mu = 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,2} - 2p_{1,2} & 2p_{1,2}q_{2,3} - 2p_{1,3} - r_{1,1} \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} + p_{1,2}q_{2,3} - p_{1,2}r_{1,1} + p_{1,2}r_{2,2} + r_{2,2} & S \end{pmatrix}$, $S = p_{1,2}r_{2,3} + p_{1,3}^2 + p_{1,3}q_{2,3} - q_{1,1}r_{2,3} + q_{2,2}r_{2,3} + q_{2,3}r_{1,1} - q_{2,3}r_{2,2} + r_{2,3}$
2.9.4, $\mu = -1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & S \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,2} - 2p_{1,2} & 0 \\ -p_{1,2}p_{2,3} + p_{2,3}q_{1,1} - p_{2,3}q_{2,2} - p_{2,3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $S = p_{1,2}p_{2,3} - p_{2,3}q_{1,1} + p_{2,3}q_{2,2} + p_{2,3}$
2.9.5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,2} & aq_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,3} \\ 0 & -aq_{2,2} + p_{1,2}p_{1,3} + p_{1,2}q_{2,3} - p_{1,2}r_{1,1} + p_{1,2}r_{2,2} & S \end{pmatrix}$, $S = -aq_{2,3} + p_{1,2}r_{2,3} + p_{1,3}^2 + p_{1,3}q_{2,3} - q_{1,1}r_{2,3} + q_{2,2}r_{2,3} + q_{2,3}r_{1,1} - q_{2,3}r_{2,2} - 1$
2.9.6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,2} & aq_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,3} \\ 0 & -aq_{2,2} + p_{1,2}p_{1,3} + p_{1,2}q_{2,3} - p_{1,2}r_{1,1} + p_{1,2}r_{2,2} & S \end{pmatrix}$, $S = -aq_{2,3} + p_{1,2}r_{2,3} + p_{1,3}^2 + p_{1,3}q_{2,3} - q_{1,1}r_{2,3} + q_{2,2}r_{2,3} + q_{2,3}r_{1,1} - q_{2,3}r_{2,2} + 1$
2.9.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,2} & 2p_{1,2}q_{2,3} + q_{1,1} \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} + p_{1,2}q_{2,3} - p_{1,2}r_{1,1} + p_{1,2}r_{2,2} - q_{2,2} & S \end{pmatrix}$, $S = p_{1,2}r_{2,3} + p_{1,3}^2 + p_{1,3}q_{2,3} - q_{1,1}r_{2,3} + q_{2,2}r_{2,3} + q_{2,3}r_{1,1} - q_{2,3}r_{2,2} - q_{2,3}$
2.20.18	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 & 2p_{1,2}p_{1,3} + q_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3} - 2p_{1,2} - q_{1,1} & 2p_{1,3}^2 - 2p_{1,3} \end{pmatrix}$
2.21.1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2p_{1,2}^2 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 & 0 \\ -2p_{1,2}^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.17.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 + 2p_{2,3}q_{1,3} + q_{2,3}^2 - a - 1 \end{pmatrix}$

2.17.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 + 2p_{2,3}q_{1,3} + q_{2,3}^2 - a + 1 \end{pmatrix}$
2.17.4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 + 2p_{2,3}q_{1,3} + q_{2,3}^2 - 2a \end{pmatrix}$
2.17.6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 + 2p_{2,3}q_{1,3} + q_{2,3}^2 - 2 \end{pmatrix}$
2.17.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 + 2p_{2,3}q_{1,3} + q_{2,3}^2 + 2 \end{pmatrix}$
2.17.9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ap_{2,3} + p_{1,3}^2 + 2p_{2,3}q_{1,3} + q_{2,3}^2 - b - \delta - p_{1,3} \end{pmatrix}$
2.17.8, 2.17.10	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -aq_{2,3} + p_{1,3}^2 + 2p_{2,3}q_{1,3} + q_{2,3}^2 - b - \delta - p_{1,3} \end{pmatrix}$
2.17.13	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 + 2p_{2,3}q_{1,3} + q_{2,3}^2 - a - p_{2,3} - 1 \end{pmatrix}$
2.17.14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 + 2p_{2,3}q_{1,3} + q_{2,3}^2 - a - p_{2,3} + 1 \end{pmatrix}$
2.17.15	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 + 2p_{2,3}q_{1,3} + q_{2,3}^2 - 2a - p_{2,3} \end{pmatrix}$
2.17.17	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 + 2p_{2,3}q_{1,3} + q_{2,3}^2 - b - p_{2,3} \end{pmatrix}$
2.17.18	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 + 2p_{2,3}q_{1,3} + q_{2,3}^2 - b - p_{1,3} - p_{2,3} - q_{2,3} \end{pmatrix}$
2.17.19	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 + 2p_{2,3}q_{1,3} + q_{2,3}^2 - a - b - p_{1,3} - p_{2,3} - q_{2,3} \end{pmatrix}$
2.17.20	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 + 2p_{2,3}q_{1,3} + q_{2,3}^2 - 2a - p_{1,3} - p_{2,3} - q_{2,3} \end{pmatrix}$
2.17.21, 2.17.22	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 + 2p_{2,3}q_{1,3} + q_{2,3}^2 - 2a - p_{1,3} - q_{2,3} \end{pmatrix}$

2.17.23	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2+2p_{2,3}q_{1,3}+q_{2,3}^2-a-b-p_{1,3}-q_{2,3} \end{pmatrix}$
2.17.24	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ap_{1,3}-aq_{2,3}+p_{1,3}^2+2p_{2,3}q_{1,3}+q_{2,3}^2-2\delta-p_{2,3}+q_{1,3} \end{pmatrix}$
2.17.25	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2+2p_{2,3}q_{1,3}+q_{2,3}^2-a-b-p_{1,3}+q_{2,3} \end{pmatrix}$
2.17.26	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2+2p_{2,3}q_{1,3}+q_{2,3}^2-a-\gamma-p_{1,3}+q_{2,3} \end{pmatrix}$

Заключение. Найдены и описаны в явном виде тензоры Риччи инвариантных связностей на трехмерных редуктивных однородных пространствах с разрешимой группой преобразований. Полученные в работе результаты могут быть применены в работах по дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям, топологии, а также в других разделах математики и физики, а алгоритмы, приведенные в работе, могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

Литература

1. Wang, H. C. On invariant connections over a principal fibre bundle / H. C. Wang // Nagoya Math. J. – 1958. – № 13. – P. 1–19.

2. Chow, B. Mathematical Surveys and Monographs / B. Chow, D. Knopf. – Providence : American Mathematical Society, 2004. – Vol. 110, The Ricci flow : an introduction. – 325 p.

3. Картан, Э. Риманова геометрия в ортогональном репере / Э. Картан. – М. : Моск. ун-т, 1960. – 307 с.

4. Nomizu, K. Affine differential geometry / K. Nomizu, T. Sasaki. – Great Britain : Cambridge Univ. Press, 1994. – 263 p.

5. Можей, Н. П. Трехмерные редуктивные пространства разрешимых групп Ли / Н. П. Можей // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2016. – № 6 (99). – С. 74–81.

6. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. Journ. Math. – 1954. – Vol. 76, № 1. – P. 33–65.

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Поступила в редакцию 12.02.2021