ОБ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

Можей Наталья Павловна, mozheynatalya@mail.ru

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

Повышенный интерес к симплектическим многообразиям первоначально мотивирован важной ролью пуассоновских структур в гамильтоновой динамике, этот интерес возродился после публикации фундаментальных трудов А. Лихнеровича [1], А. Кириллова [2], А. Вайнштейна [3] и др. Симплектическое многообразие – это многообразие с заданной на нем симплектической формой (замкнутой невырожденной дифференциальной 2-формой), оно позволяет естественным геометрическим образом ввести гамильтонову механику и дает наглядное толкование многим ее свойствам.

Целью данной работы является классификация четырехмерных изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой над полем C. В работе [4] автором проделан первый шаг такой классификации, там же даны основные определения и приведено более подробное обоснование применяемых методов.

Пусть $(\bar{G}, M)$ – четырехмерное однородное пространство, а $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Паре $(\bar{G}, G)$ поставим в соответствие пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, где $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$ и $\mathfrak{g}$ – подалгебра в $\bar{\mathfrak{g}}$, соответствующая подгруппе Ли G. Рассмотрим задачу классификации для заданной подалгебры $\mathfrak{g}$ с точностью до эквивалентности пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, у которых изотропное представление является инъекцией и сопряжено подалгебре $\mathfrak{g}$.

Пусть $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ $(n = \dim \mathfrak{g})$ и $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ – базис векторного пространства U. Для $x \in \mathfrak{g}$ через $A(x)$ и $B(x)$ обозначим матрицы отображений $ad\,x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ и $x_U : U \to U$ в базисах E и U соответственно. Тогда отображение $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(4, \mathrm{C})$, $x \mapsto B(x)$ – инъекция.

Это позволяет отождествить алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с некоторой подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{gl}(4,\mathrm{C})$.

Пусть $V=\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ – $\mathfrak{g}$-модуль, соответствующий изотропному представлению. Пространство $B(V)$ билинейных форм на V естественным образом становится $\mathfrak{g}$-модулем, если положить

$$(x.b)(v_1,v_2)=-b(x.v_1,v_2)-b(v_1,x.v_2),$$

где $x\in\mathfrak{g}$, $v_1,v_2\in V$, $b\in B(V)$. *Почти симплектической структурой на $\mathfrak{g}$-модуле V* называется невырожденная, кососимметрическая билинейная форма $b\in B(V)$ такая, что $x.b=0$ для всех $x\in\mathfrak{g}$. Другими словами, $b\in B(V)^{\mathfrak{g}}$.

Пусть B – матрица симплектической структуры в базисе пространства V, а A_x – матрица элемента $x\in\rho(\mathfrak{g})$ в том же базисе. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ допускает почти симплектическую структуру, если выполняется следующее свойство:

$$A_x^t\cdot B+B\cdot A_x=0,\quad \forall x\in\rho(\mathfrak{g}). \tag{1}$$

Существует единственная (с точностью до сопряженности) невырожденная кососимметрическая билинейная форма b [5]. Множество всех эндоморфизмов пространства V, сохраняющих невырожденную кососимметрическую билинейную форму b, является алгеброй Ли. Эта алгебра Ли обозначается $\mathfrak{sp}(4,\mathrm{X})$, она представима в следующем виде:

$$\left\{\left.\begin{pmatrix} x & y & u & w \\ z & t & w & v \\ s & p & -x & -z \\ p & r & -y & -t \end{pmatrix}\right| x,y,z,t,u,v,s,w,p,r\in\mathrm{X}\right\}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является подалгеброй в линейной алгебре Ли $\mathfrak{sp}(4,\mathrm{X})$.

Решение проблемы классификации четырехмерных изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой разобьем на следующие части:

1. Классификация с точностью до сопряженности всех подалгебр $\mathfrak{g},^{X}$ удовлетворяющих (1), что равносильно классификации (с точностью до сопряженности) подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4, X)$.

2. Для каждой подалгебры $\mathfrak{g}$ из пункта 1 производим классификацию (с точностью до эквивалентности) изотропно-точных пар $(\bar{\mathfrak{g}}^{X}, \mathfrak{g}^{X})$, у которых изотропное представление сопряжено подалгебре $\mathfrak{g}^{X}$.

3. Для каждой пары $(\bar{\mathfrak{g}}^{X}, \mathfrak{g}^{X})$ находим (с точностью до эквивалентности пар) все вещественные формы $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Описание пункта 1 приведено в работе [4]. Для ссылки на подалгебры, полученные в [4], будем использовать следующее обозначение: *d.n*, где *d* – размерность подалгебры, а *n* – ее порядковый номер. Будем говорить, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ имеет тип (*d.n*), если изотропное представление пары сопряжено подалгебре $\mathfrak{g}$, имеющей номер (*d.n*). Остановимся подробнее на классификации изотропно-точных пар из пункта 2. В качестве примера классификации пар с заданным изотропным представлением рассмотрим пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 2.9, т. е. имеющие подалгебру $\mathfrak{g}$ следующего вида:

$$\boxed{\begin{matrix} x & & & \\ & y & & \\ & & -x & \\ & & & -y \end{matrix}}\,.$$

Теорема. *Любая пара* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ *типа* 2.9 *эквивалентна одной из следующих:*

1	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	u_3	0	0	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	0	0

2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	u_3	0	$-e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	0	0

3	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	e_2
u_3	u_3	0	$-e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	$-e_2$	0	0

Действительно, пусть $(\mathfrak{g}, U)$ – точный обобщенный модуль, $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ – базис пространства U, $\{e_1, e_2\}$ – базис в $\mathfrak{g}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathfrak{h} = \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_2$ – нильпотентная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $(V, \mathfrak{g})$ – виртуальная пара, определенная линейным отображением $q : \mathfrak{g} \to \Lambda(U, \mathfrak{g})$ (т. е. билинейное отображение $B : \mathfrak{g} \times V \to V$ имеет вид

$$x.(y, u) = ([x, y] + q(x)(u), x.u)$$

для всех $x, y \in \mathfrak{g}, u \in U$). Без ограничения общности мы можем считать q примарным. Так как

$$\mathfrak{g}^{(0,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_2,$$

$$U^{(1,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_1, U^{(0,1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_2,$$

$$U^{(-1,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_3, U^{(0,-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_4,$$

то $C(e_1)=C(e_2)=0$. Мы можем считать, что соответствующая виртуальная пара тривиальна и

$$[e_1,u_1]=u_1,[e_1,u_2]=0,[e_1,u_3]=-u_3,[e_1,u_4]=0,$$
$$[e_2,u_1]=0,[e_2,u_2]=u_2,[e_2,u_3]=0,[e_2,u_4]=-u_4.$$

Так как отображение $q:\mathfrak{g}\to\Lambda(U,\mathfrak{g})$, соответствующее виртуальной паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ примарно, то $\bar{\mathfrak{g}}^{\alpha}(\mathfrak{h})=\mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h})\times U^{\alpha}(\mathfrak{h})\forall\ \alpha\in\mathfrak{h}^{*}$. Из того, что

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(0,0)}(\mathfrak{h})=\mathrm{X}e_1+\mathrm{X}e_2,$$

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(1,0)}(\mathfrak{h})=\mathrm{X}u_1,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(0,1)}(\mathfrak{h})=\mathrm{X}u_2,$$

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(-1,0)}(\mathfrak{h})=\mathrm{X}u_3,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(0,-1)}(\mathfrak{h})=\mathrm{X}u_4,$$

следует

$$\begin{array}{ll}
[u_1,u_2]=0, & [u_2,u_3]=0,\\
[u_1,u_3]=b_1e_1+b_2e_2, & [u_2,u_4]=f_1e_1+f_2e_2,\\
[u_1,u_4]=0, & [u_3,u_4]=0.
\end{array}$$

Проверяя тождества Якоби на векторах e_i,u_j,u_k $(1\leq i\leq 2, 1\leq j<k\leq 4)$ и u_i,u_j,u_k $(1\leq i<j<k\leq 4)$, получаем, что пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ имеет вид

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	b_1e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	f_2e_2
u_3	u_3	0	$-b_1e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	$-f_2e_2$	0	0

Рассмотрим следующие случаи:

1. $b_1=f_2=0$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре $(\bar{\mathfrak{g}}_1,\mathfrak{g}_1)$.

2. $b_1^2+f_2^2\neq 0, b_1f_2=0$. Отображение $\pi:\bar{\mathfrak{g}}'\to\bar{\mathfrak{g}}$ такое, что

$$\pi(e_1)=e_2,\ \pi(e_2)=e_1,\ \pi(u_1)=u_2,\ \pi(u_2)=u_1,$$
$$\pi(u_3)=u_4,\ \pi(u_4)=u_3,$$

устанавливает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}',\mathfrak{g}')$, где последняя имеет следующий вид:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	f_2e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	b_1e_2
u_3	u_3	0	$-f_2e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	$-b_1e_2$	0	0

Тогда без ограничения общности можно считать, что $b_1 \neq 0,\ f_2 = 0$ и пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$ при помощи отображения $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$ такого, что

$$\pi(e_1) = e_1,\ \pi(e_2) = e_2,\ \pi(u_1) = \frac{1}{b_1}u_1,$$
$$\pi(u_2) = u_2,\ \pi(u_3) = u_3,\ \pi(u_4) = u_4.$$

3. $b_1 f_2 \neq 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$ при помощи отображения $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_3 \to \bar{\mathfrak{g}}$ такого, что

$$\pi(e_1) = e_1,\ \pi(e_2) = e_2,\ \pi(u_1) = \frac{1}{b_1}u_1,\ \pi(u_2) = \frac{1}{f_2}u_2,$$
$$\pi(u_3) = u_3,\ \pi(u_4) = u_4.$$

Так как $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_2 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_3$, пары $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$, $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$, $(\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$ не эквивалентны.

Применяя аналогичные рассуждения для всех остальных случаев, получаем искомый результат классификации пар.

Таким образом, приведен алгоритм классификации изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой и проведено описание четырехмерных изотропно-точных почти симплектических однородных пространств.

Литература

1. Lichnerowicz A. Les vari´et´es de Poisson et leurs alg`ebres de Lie associ´ees // Journal Differential Geometry. 1977, № 2. P. 253–300.

2. Кириллов А. А. Локальные алгебры Ли // Успехи математических наук. 1976, № 4 (190). С. 57–76.

3. Weinstein A. The local structure of Poisson manifolds // Journal Differential Geom. 1983, № 3. P. 523–557.

4. Можей Н. П. Почти симплектические однородные пространства // Труды БГТУ. Сер. 6, Физ.-мат. науки и информатика. 2009. № 6. С. 17–20.

5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552с.