УДК 519.677

МЕТОД РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКИХ СТЕПЕНЕЙ, ОСНОВАННЫЙ НА ПРИМЕНЕНИИ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЙ

В.М. ИЛЬИН

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 17 февраля 2015

В статье [1] кратко рассмотрена сущность решения алгебраических уравнений 4 и 6 степеней с применением арифметических прогрессий на примерах определения разных вещественных корней. Здесь же дано отражение особенностей решения других видов уравнений, в частности, без x^3.

Ключевые слова: решение, учет особенностей метода, использование арифметических прогрессий, виды алгебраических уравнений.

Анализ решения алгебраических уравнений

В статье [1] в общем виде приведена совокупность арифметических прогрессий, используемых для определения корней алгебраических уравнений высоких степеней, даны примеры применения прогрессий. На ее основании можно конкретизировать связи между корнями укороченного алгебраического уравнения Y_1 и Y_2 и разностью P прогрессий, между корнями решаемого алгебраического уравнения K_1, K_2 и P. В сбалансированных прогрессиях (см. [1]) имеем:

$$\left.\begin{aligned} Y_1 - C_3 + P = C_2 \\ Y_2 - C_3 - P = C_2 \end{aligned}\right\},$$

откуда $\dfrac{Y_2 - Y_1}{2} = P$ или $Y_2 = Y_1 + 2P$.

В силу линейности верхней и средней прогрессий больший корень K_2 второй прогрессии будет проявляться под Y_2, а меньший K_1 под Y_1, т.е. $\dfrac{K_2 - K_1}{2} = P$, следовательно, $K_2 = K_1 + 2P$.

Из приведенных соотношений видна связующая роль разности прогрессий между корнями укороченных алгебраических уравнений, между крайними членами базовой прогрессии Y_2 и Y_1, и видно соотношение внутри пар корней K_2 и K_1. Кроме того, важна роль арифметических прогрессий в том, что они обуславливают парность корней, причем такую, которая соответствует квадратным трехчленам, входящим в состав решаемого алгебраического уравнения высокой степени в качестве его сомножителей. Второй важной особенностью завершенных полностью прогрессий является то, что они формируются из одинаковых частей полусуммы корней C_1, которые не зависят от свободных коэффициентов П трехчленов, входящих в решаемое алгебраическое уравнение. Свободные коэффициенты трехчленов участвуют лишь в выделении искомых корней (как своего рода дискриминанты – сепараторы). Именно такое разделение функций частей C_1 и П упрощает решение алгебраических уравнений высоких степеней.

В примере 1 [1] получены пары корней 1 и 4, 2 и 3 со средним значением 2,5 и произведениями 4 и 6 чему соответствуют уравнения $x^2–5x+4 = 0$; $x^2–5x+6 = 0$. Их решения:

$$x_{1,2} = 2,5 \pm \sqrt{6,25-4} = 2,5 \pm \sqrt{2,25} = 2,5 \pm 1,5 = 4 \text{ и } 1,$$

$$x_{3,4} = 2,5 \pm \sqrt{6,25-6} = 2,5 \pm \sqrt{0,25} = 2,5 \pm 0,5 = 3 \text{ и } 2.$$

Сумма четырех корней этих уравнений $C = 10$, их $\Pi = 24$. Очевидно, что эти величины можно представить как

$$\begin{aligned}(C_1:2) \pm P_1 &= 2,5 \pm \sqrt{6,25-4} = 2,5 \pm \sqrt{2,25} = 2,5 \pm 1,5 = 4 \text{ и } 1,\\ (C_1:2) \pm P_2 &= 2,5 \pm \sqrt{6,25-6} = 2,5 \pm \sqrt{0,25} = 2,5 \pm 0,5 = 3 \text{ и } 2,\end{aligned} \qquad (1)$$

$$[(C_1:2)^2 - P_1^2]\cdot[(C_1:2)^2 - P_2^2] = [6,25 - 1,5^2]\cdot[6,25 - 0,5^2] = 4\cdot 6 = 24, \qquad (2)$$

т.е. сумма корней, их произведения зависят от C_1 и P_1 и P_2.

Произведение трехчленов $(x^2–5x+4)$ $(x^2–5x+6) = x^4–10x^3+35x^2–50x+24 = 0$ есть левая часть заданного, решаемого в примере 1 уравнения. Заметим, что перемножение полученных квадратных уравнений, соответствующих парам корней исходного уравнения четвертой степени, выявляет всю совокупность его членов, а не только отдельных его фрагментов (сумму и произведение). Эти пары уравнений равнозначны уравнениям, получаемым классическим методом через так называемые кубические резольвенты уравнений четвертой степени, путем замены неизвестных и далее определяются корни по способу Феррари или по способу Эйлера [2]. Тогда как методу арифметических прогрессий этого не требуется, что сокращает в значительной мере объем работы [3].

В примере 4 [1]: $C = 15$, $\Pi = 0,5\times4,5\times1\times4\times2\times3 = 54$. Исходное алгебраическое уравнение содержит три пары корней [1], следовательно метод резольвент к нему не применим, как и формула Кардано. По методу же арифметических прогрессий все три пары корней уравнения определяются так же, как и для уравнений четвертой степени сразу, без вспомогательных преобразований. Из примера 4 [1] видно, что это пары: 0,5 и 4,5; 1 и 4; 2 и 3. Их средняя величина: 2,5. Произведения пар корней: 2,25, 4 и 6. Им соответствуют три уравнения:

$$x^2–5x+4 = 0;\ x^2–5x+2,25 = 0;\ x^2–5x+6 = 0. \qquad (3)$$

Решение этих трех уравнений дает корни:

$$x_{1,2} = 2,5 \pm \sqrt{6,25-4} = 2,5 \pm \sqrt{2,25} = 2,5 \pm 1,5 = 4 \text{ и } 1;$$

$$x_{3,4} = 2,5 \pm \sqrt{6,25-2,25} = 2,5 \pm \sqrt{4} = 2,5 \pm 2 = 4,5 \text{ и } 0,5;$$

$$x_{5,6} = 2,5 \pm \sqrt{6,25-6} = 2,5 \pm \sqrt{0,25} = 2,5 \pm 0,5 = 3 \text{ и } 2.$$

Таким образом, из анализа примеров 1–4 статьи [1] получены следующие расчетные соотношения, аналогичные (2) и (1).

Корни: 4 и 1 или $2,5\pm1,5 = C_1:3\pm P_1$; 4,5 и 0,5 или $2,5\pm2 = C_1:3\pm P_2$; 3 и 2 или $2,5\pm0,5 = C_1:3\pm P_3$.

Сумма корней примера 4 равна $C = 15$. Произведение корней

$\Pi = [(C_1:3)^2–P_1^2]\ [(C_1:3)^2–P_2^2]\ [(C_1:3)^2–P_3^2] = 4\times2,25\times6 = 54$,

равное произведению трех свободных членов уравнений (3), как и произведений их корней.

В табл. 1 отображен под №№ 1÷9 комплект совокупностей арифметических прогрессий в функции изменяющейся их разности в пределах $P = 0÷0,5$. В этом интервале отображены попарно шесть корней уравнения [1]: $x^6–15x^5+87,25x^4–247,5x^3+352,75x^2+232,5x+54 = 0$.

Корни располагаются по краям средних горизонтальных прогрессий под №№ 4, 5, 6. Это корни 7–5 = 2; 8–5 = 3; 6–5 = 1; 9–5 = 4 и 5,5–5 = 0,5; 9,5–5 = 4,5. Сумма этих корней 2+3+1+4+0,5+4,5 = 15 (см. второй коэффициент решаемого уравнения). Отметим, что такую же сумму составляют шесть аналогичных коэффициентов других трех прогрессий, но они не являются корнями, т.к. их произведение не есть свободный член решаемого алгебраического уравнения, т.е. 54 = 2×3×1×4×0,5×4,5. Значит, корни отделены совершенно определенно. Характерно также, что кратным корням табл. 1 соответствует $P = 0$, № 1.

Таблица 1. **Совокупности арифметической прогрессии**

№	*P*	Прогрессии					
1	0		7,5	0	7,5	0	7,5
		–					
			2,5	0	2,5	0	2,5
			5	0	5	0	5
2	0,1		7,4	0,1	7,5	0,1	7,6
		–					
			2,4	0,1	2,5	0,1	2,6
			5	0	5	0	5
3	0,3		7,2	0,3	7,5	0,3	7,8
		–					
			2,2	0,3	2,5	0,3	2,8
			5	0	5	0	5
4	0,5		7	0,5	7,5	0,5	8
		–					
			2	0,5	2,5	0,5	3
			5	0	5	0	5
5	1,5		6	1,5	7,5	1,5	9
		–					
			1	1,5	2,5	1,5	4
			5	0	5	0	5
6	2		5,5	2	7,5	2	9,5
		–					
			0,5	2	2,5	2	4,5
			5	0	5	0	5
7	2,1		5,4	2,1	7,5	2,1	9,6
		–					
			0,4	2,1	2,5	2,1	4,6
			5	0	5	0	5
8	2,4		5,1	2,4	7,5	2,4	9,9
		–					
			0,1	2,4	2,5	2,4	4,9
			5	0	5	0	5
9	2,5		5	2,5	7,5	2,5	10
		–					
			0	2,5	2,5	2,5	5
			5	0	5	0	5

Следует отметить, что, например, в прогрессиях совокупности

7,5	0	7,5	0	7,5
–				
3,75	0	3,75	0	3,75
3,75	0	3,75	0	3,75

нулевым значениям разности соответствуют величины 7,5, 7,5, 7,5 – тройной кратности, а величины 3,75, 3,75, 3,75 и еще раз 3,75, 3,75 и 3,75 являются шестикратными, т.е. предельными. Таким образом, наличие в прогрессиях кратных величин говорит об их связи через нулевые значения разностей, что является свойством прогрессий. Оно упрощает построение совокупности всех связей. Как видно из примеров статей: данной и [1], третья горизонтальная прогрессия имеет всегда кратные величины, связанные через $P = 0$. Это же видно из прогрессий табл. 1 и 2. Возможность получения входящих в них величин указывает на высокую гибкость регулирования прогрессий.

Добавим также, что одинаковым парам корней, находящимся в любой прогрессии, соответствуют одинаковые величины *P*, причем $P = \frac{K_2 - K_1}{2}$, где K_2 и K_1 больший и меньший корень. И вообще для любой такой пары корней существует эта зависимость *P* от корней, как отмечалось ранее. Приведенная же диаграмма (см. рисунок) иллюстрирует, что корни решаемого алгебраического уравнения являются линейными функциями параметра *P*, т.е. разности прогрессий.

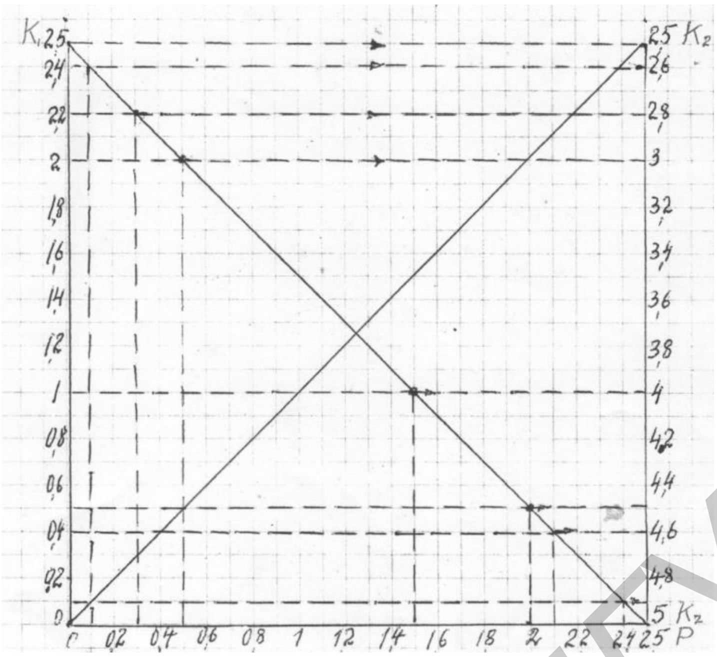

Диаграмма корней алгебраического уравнения

Частные случаи решения алгебраических уравнений высоких степеней

Частный случай 1. Дано уравнение [4] $x^4–42x^2+64x+105 = 0$. Требуется определить его корни. Очевидно, что оно содержит четыре корня: два положительных и два отрицательных. Если взять большим отрицательным корнем –1, тогда меньшим отрицательным корнем будет только –7 и тогда: (–1) (–7) = 7, а 105/7 = 15 = 3×5; откуда 3+5+(–1)+(–7) = 0, что подтверждает отсутствие в заданном уравнении члена с x^3, а наличие в нем корней –7, –1, 3, 5 подтверждают прогрессии:

		–7	3	–4	3	–1
	–					
		–5	3	–2	3	1
		–2	0	–2	0	–2
и						
		3	1	4	1	5
	–					
		1	1	2	1	3
		2	0	2	0	2

Обычная базовая прогрессия для определения четырех корней здесь разделена на две прогрессии, в которых содержится по два корня: отрицательные –7, –1, положительные 3 и 5.

По сравнению с прогрессиями, отображающими только положительные корни 1, 3, 5, 7, их сумма 16, произведение П = 1×3×5×7 = 105, имеем

		7	1	8	1	9
	–					
		3	1	4	1	5
		4	0	4	0	4
и:						
		5	3	8	3	11
	–					
		1	3	4	3	7
		4	0	4	0	4

Таким образом, в разделенных прогрессиях:

1) корни –7, –1, 3 и 5 выявились в верхних строках;

2) не изменились разности прогрессий, зависящие от корней, а также прогрессия с корнями 3 и 5.

Вывод: разделение прогрессий при отсутствии в заданном алгебраическом уравнении x^3 на прогрессии с отрицательными и положительными корнями не вызывает затруднений, но способствует решению – определению корней.

В табл. 2 приведена зависимость отрицательных корней от разности прогрессий P. Ее можно использовать для определения отрицательных корней.

Таблица 2. Прогрессии с отрицательными корнями

№	*P*	Прогрессии				
1	3	–7	3	–4	3	–1
		–5	3	–2	3	1
		–2	0	–2	0	–2
2	2	–6	2	–4	2	–2
		–4	2	–2	2	0
		–4	2	–2	2	0
3	1	–5	1	–4	1	–3
		–3	1	–2	1	–1
		–2	0	–2	0	–2
4	0	–4	0	–4	0	–4
		–2	0	–2	0	–2
		–2	0	–2	0	–2
5	1	–5	1	–4	1	–3
		–3	1	–2	1	–1
		–2	0	–2	0	–2
6	2	–6	2	–4	2	–2
		–4	2	–2	2	0
		–2	2	–2	0	–2
7	3	–7	3	–4	3	–1
		–5	3	–2	3	–1
		–2	0	–2	0	–2

Частный случай 2. Требуется решить уравнение [2]: $x^4–6x^2+8x–3 = 0$. Как и в первом случае, в этом уравнении отсутствует x^3, но есть своя специфика, и оно решается с применением арифметических прогрессий.

Свободный член –3, равный произведению всех четырех корней, значит, один корень отрицательный – он есть –3, но так как $x^3 = 0$, то $x_1+x_2+x_3$–П=0, а $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, т.е. 1+1+1–3 = 0. Поэтому четыре корня разделены парами 1+1 и 1–3. Им соответствуют два уравнения: $x^2–2x+1 = 0$ и $x^2+2x–3 = 0$. Их решение: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1; 1;$ $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{1+3} = 1; -3$.

Заметим, что двум кратным корням при построении арифметических прогрессий соответствуют разности $P = 0$, как указано в табл. 1 (№1) и в табл. 2 (№ 4).

Арифметические прогрессии и в этом частном случае четко отображают два кратных корня 1 и 1 и корни –3 и +1. Это полностью совпадает с тем, что дает раздельное решение двух квадратных уравнений:

	1	0	1	0	1
–					
	0,5	0	0,5	0	0,5
	0,5	0	0,5	0	0,5

и:

	–3	2	–1	2	1
–					
	–2,5	2	–0,5	2	1,5
	–0,5	0	–0,5	0	–0,5

Как итог обеих статей, [1] и этой, надо отметить, что благодаря использованию арифметических прогрессий появилась возможность формировать из совокупностей всех коэффициентов алгебраических уравнений высоких степеней и из разностей арифметических прогрессий контролируемые пары корней решаемых уравнений с помощью формулы $K_2 = K_1 + 2P$, где K_2 и K_1 – корни, P – соответствующие им разности арифметических прогрессий.

В рассмотренных здесь примерах контроль выявляет следующее.

Частный случай 1, корни -1, –7, P = 3, 5 и 3, P = 1;

$-1 = -7 + 2 \times 3 = -1,$

$5 = 3 + 2 \times 1 = 5.$

Частный случай 2, корни 1 и 1, P = 0, 1 и –3, P = 2;

$1 = 1 + 2 \times 0 = 1,$

$1 = -3 + 2 \times 2 = 1.$

Имеем полное совпадение.

Заключение

В табл. 1 отображен под №№ 1÷9 комплект совокупностей арифметических прогрессий в функции изменяющейся их разности в пределах P = 0÷0,5. В этом интервале отображены попарно шесть корней уравнения (см. [1]): $x^6 - 15x^5 + 87{,}25x^4 - 247{,}5x^3 + 352{,}75x^2 + 232{,}5x + 54 = 0$. Корни располагаются по краям средних горизонтальных прогрессий под №№ 4, 5, 6. Сумма этих корней 2+3+1+4+0,5+4,5 = 15. Такую же сумму составляют шесть членов других прогрессий, но они, как отмечалось, не являются корнями, т.к. их произведение не есть свободный член решаемого алгебраического уравнения, т.е. 54 = 2×3×1×4×0,5×4,5. Значит, корни отделены совершенно определенно. Прогрессии в четко сбалансированном виде включают пары корней решаемого алгебраического уравнения, как в документе. Метод применим как к полным алгебраическим уравнениям высоких степеней, так и к тем которые не содержат x^3. Приведенная же диаграмма иллюстрирует, что корни решаемого алгебраического уравнения являются линейными функциями параметра P, разности прогрессий.

SOLVING METHOD OF HIGH DEGREE ALGEBRAIC EQUATIONS BASED ON ARITHMETIC PROGRESSIONS APPLICATION

V.M. ILYIN

Abstract

The solving of 4 and 6 degrees algebraic equations with the use of arithmetic progressions with examples of different definitions of real roots was considered in article [1]. The solution singularities of the other types equations, in particular, without x^3 are described in this article.

Список литературы

1. *Ильин В.М.* // Докл. БГУИР. 2014. № 3 (81). С. 112–117.
2. *Мишина А.П., Проскуряков И.В*. Высшая алгебра. М., 1962.
3. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. СПб., 2008.
4. Малая математическая энциклопедия. Будапешт, 1976.