УДК 519.711
https://doi.org/10.37661/1816-0301-2021-18-2-33-47

Оригинальная статья
Original Paper

Минимизация булевых функций в классе ортогональных дизъюнктивных нормальных форм

Ю. В. Поттосин

Объединенный институт проблем информатики
Национальной академии наук Беларуси,
ул. Сурганова, 6, Минск, 220012, Беларусь
E-mail: pott@newman.bas-net.by

Аннотация. Ортогональные дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ) булевых функций имеют широкое применение в логическом проектировании дискретных устройств. Задача ортогонализации ДНФ состоит в том, чтобы для заданной функции получить ДНФ, любые две элементарные конъюнкции которой ортогональны, т. е. их конъюнкция тождественно равна нулю. Предлагается подход к решению данной задачи с помощью средств теории графов. Подход рассчитан на представление функции в виде совершенной ДНФ. Предполагается получение всех интервалов булева пространства, на которых заданная функция имеет значение 1, и рассматривается граф пересечения этих интервалов. Рассматриваются два метода получения минимальной ортогональной ДНФ. Один из них сводит данную задачу к получению наименьшего доминирующего множества в графе путем покрытия его вершин их замкнутыми окрестностями, другой – к получению максимального независимого множества с помощью лексикографического перебора. Показывается, как предлагаемый подход распространяется на не полностью определенные булевы функции.

Ключевые слова: булева функция, дизъюнктивная нормальная форма, ортогональность элементарных конъюнкций, задача о кратчайшем покрытии, граф пересечения, доминирующее множество, независимое множество

Для цитирования. Поттосин, Ю. В. Минимизация булевых функций в классе ортогональных дизъюнктивных нормальных форм / Ю. В. Поттосин // Информатика. – 2021. − Т. 18, № 2. – С. 33–47. https://doi.org/10.37661/1816-0301-2021-18-2-33-47

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию | Received 03.03.2021
Подписана в печать | Accepted 15.04.2021
Опубликована | Published 26.06.2021

Minimization of Boolean functions in the class of orthogonal disjunctive normal forms

Yuri V. Pottosin

The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, st. Surganova, 6, Minsk, 220012, Belarus
E-mail: pott@newman.bas-net.by

Abstract. The orthogonal disjunctive normal forms (DNFs) of Boolean functions have wide applications in the logical design of discrete devices. The problem of DNF orthogonalization is to get for a given function such a DNF that any two its terms would be orthogonal, i. e. the conjunction of them would be equal identically to zero. An approach to solve the problem using the means of graph theory is suggested. The approach is proposed by representation of the function as perfect DNF. Obtaining all the intervals of the Boolean space where the given function has value 1 is supposed, and the intersection graph of those intervals is considered. Two methods to obtain a minimum orthogonal DNF are considered. One of them reduces the problem toward finding out the smallest dominating set in the graph by covering its vertices with their closed neighborhoods, the other – to obtain the maximum independent set by lexicographic enumeration. It is shown how the suggested approach can be extended on incompletely specified Boolean functions.

Keywords: Boolean function, disjunctive normal form, orthogonal terms, short cover problem, intersection graph, dominating set, independent set

For citation. Pottosin Yu. V. Minimization of Boolean functions in the class of orthogonal disjunctive normal forms. *Informatics*, 2021, vol. 18, no. 2, pp. 33–47 (In Russ.). https://doi.org/10.37661/1816-0301-2021-18-2-33-47

Conflict of interest. The author declare of no conflict of interest.

Введение. Под ортогональной ДНФ булевой функции понимается такая ДНФ, в которой все ее члены – элементарные конъюнкции – попарно ортогональны, т. е. конъюнкция двух любых ее членов тождественно равна нулю. Более общей задачей является ортогонализация системы булевых функций, которая формулируется следующим образом. Пусть задана некоторая система полностью определенных булевых функций $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ и требуется найти совокупность взаимно ортогональных булевых функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$, такую, что любую $f_i \in F$ можно было бы выразить дизъюнкцией некоторых из φ_j ($j = 1, 2, \ldots, N$), причем общее число N этих функций было бы минимальным. Под ортогональностью здесь также понимается справедливость выражения $\varphi_j \wedge \varphi_k = 0$ при любых значениях аргументов. В таком виде эта задача была поставлена в статье [1]. Ортогонализацию ДНФ можно считать частным случаем ортогонализации системы булевых функций, где каждая функция из заданной системы представляется одной элементарной конъюнкцией.

Задача ортогонализации системы булевых функций имеет ряд приложений. Одним из ее приложений является минимизация числа столбцов таблицы переходов автомата при получении ее по заданному микропрограммному автомату [2] или по автомату с абстрактным состоянием [3]. Метод минимизации числа столбцов таблицы переходов автомата описан в работе [4]. Ортогональные ДНФ используются при синтезе схем из программируемых логических матриц [5]. Для вычисления вероятности сложного события удобно использовать ортогональную ДНФ алгебры событий [6, 7]. Как показано в статье [8], применение ортогональных ДНФ при синтезе логических схем позволяет улучшить их диагностические свойства и обеспечивает построение самопроверяемых схем.

В работе [1] представлены два метода ортогонализации системы булевых функций. Один из них заключается в нахождении всех 2^m конъюнкций вида $f_1^{\sigma_1} f_1^{\sigma_2} \ldots f_1^{\sigma_m}$, где $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ – константы 0 или 1 и $f_i^{\sigma_i} = \overline{f_i}$, если $\sigma_i = 0$, и $f_i^{\sigma_i} = f_i$, если $\sigma_i = 1$. Ненулевые конъюнкции составят решение. Другой метод рассчитан на задание каждой функции множеством наборов значений аргументов, на которых она принимает значение 1, и заключается в получении всех непустых пересечений этих множеств и их дополнений. Там же доказано, что число получаемых взаимно ортогональных функций минимально.

Ясно, что задача минимизации булевых функций в классе ортогональных ДНФ имеет неполиномиальную сложность. Были предложены эвристические методы ортогонализации системы функций и ДНФ [6, 7, 9–12]. Рассматриваемый в работах [6, 7, 9, 12] метод основан на идее дизъюнктивного разложения элементарной конъюнкции на серию других конъюнкций, каждая из которых либо ортогональна всем конъюнкциям из некоторой совокупности, либо поглощается одной из них. Ряд методов основан на дизъюнктивном разложении Шеннона, они описаны в работах [6, 7, 10–12]. В статье [13] представлен метод, применяющий аппарат, который связан с понятием покрытия троичной матрицы, используемого при декомпозиции булевых функций. Для не полностью определенных функций данная задача рассматривалась в докладе [14]. Предложенный в нем метод ортогонализации ДНФ не гарантирует минимальности получаемой ДНФ. В работе [15] задача ортогонализации системы не полностью определенных булевых функций, как она поставлена для полностью определенных функций в статье [1], сведена к раскраске графа.

Далее представлен подход к решению задачи минимизации ортогональной ДНФ, обеспечивающий точное решение с помощью средств теории графов.

Описание подхода. Предусматривается задание булевой функции в виде совершенной ДНФ, т. е. в виде двоичной матрицы, где строки представляют наборы значений аргументов, на которых она принимает значение 1. С помощью операции простого склеивания получим все интервалы пространства аргументов, где заданная функция имеет значение 1. Понятие интервала связано с отношением «больше» или «меньше» на множестве булевых векторов [7]. Считается, что $1 > 0$, и полагается, что между булевыми векторами $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ имеет место соотношение $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$, если $a_i > b_i$ или $a_i = b_i$ для любой пары одноименных компонент векторов. Интервал – это множество векторов, где есть минимальный вектор, максимальный вектор и все векторы, меньшие максимального и большие минимального. Процесс получения всех интервалов, на которых заданная функция принимает значение 1, присутствует также в классическом методе Квайна – МакКласки минимизации ДНФ. Интервал соответствует элементарной конъюнкции переменных с отрицаниями или без них. Если элементарные конъюнкции ортогональны, то соответствующие интервалы не пересекаются и, наоборот, пересекающиеся интервалы соответствуют неортогональным элементарным конъюнкциям. В методе Квайна – МакКласки рассматриваются только максимальные интервалы, т. е. те, которые не являются собственными подмножествами других интервалов. Задача минимизации ДНФ сводится к получению кратчайшего покрытия элементов булева пространства, где заданная функция имеет значение 1, максимальными интервалами. В случае минимизации ортогональной ДНФ надо рассматривать все интервалы и находить такое покрытие, элементы которого не пересекаются.

В терминах теории графов задачу можно сформулировать следующим образом. Отношение пересечения на множестве всех интервалов, куда включаются и одноэлементные интервалы, т. е. отдельные векторы-строки заданной матрицы, представим в виде неориентированного графа, вершинам которого соответствуют интервалы. Две его вершины связаны ребром, если и только если соответствующие интервалы находятся в отношении пересечения. Назовем такой граф *графом пересечения интервалов*.

Независимое доминирующее множество в полученном графе соответствует ортогональной ДНФ. Независимым множеством графа называется множество вершин, никакие две из которых не связаны ребром [16]. Доминирующим множеством графа является такое множество вершин, что если какая-то вершина не содержится в нем, то она смежна с некоторой вершиной из этого множества [16]. Следовательно, независимым доминирующим множеством графа является доминирующее множество, обладающее свойством независимости. Минимальная ортогональная ДНФ соответствует *наименьшему независимому доминирующему множеству* графа пересечения интервалов.

Любому независимому множеству в графе пересечения интервалов соответствует ортогональная ДНФ. Независимое множество максимальное в графе, если оно не является собственным подмножеством другого независимого множества. Минимальная ортогональная ДНФ соответствует независимому множеству графа пересечения интервалов, обладающему минимальной мощностью. Такое множество назовем *наименьшим максимальным независимым множеством*. Следует заметить, что всякое максимальное независимое множество является доминирующим. Действительно, если предположить, что какая-то вершина в заданном графе не вошла в некоторое максимальное независимое множество S, то она смежна по крайней мере с одной вершиной из S. Таким образом, наименьшее независимое доминирующее множество является также наименьшим максимальным независимым множеством. В решении задачи минимизации ортогональной ДНФ можно использовать методы нахождения как доминирующих, так и независимых множеств.

Нахождение наименьшего независимого доминирующего множества в графе. Доминирующее множество графа $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и множеством ребер E находится с помощью решения задачи о кратчайшем покрытии [7]. Множество вершин V покрывается его подмножествами вида $\{v_i\} \cup N(v_i)$, где $N(v_i)$ – окрестность вершины v_i, т. е. множество вершин, смежных с v_i. Множество $\{v_i\} \cup N(v_i)$ называют замкнутой окрестностью вершины v_i и обозначают $N[v_i]$. Для получения независимого доминирующего множества к такому покрытию добавляется еще требование, чтобы принадлежащие ему подмножества не пересекались.

Удобно рассматривать матричную формулировку задачи о кратчайшем покрытии, при которой в заданной двоичной матрице надо выделить минимальное количество строк так, чтобы в каждом столбце имелась единица хотя бы в одной из выделенных строк. При нахождении наименьшего доминирующего множества графа такой матрицей является его матрица смежности, нулевые элементы главной диагонали которой заменены единицами (i-я строка и i-й столбец матрицы представляют множество $N[v_i]$).

Точный метод решения задачи о кратчайшем покрытии представляет собой обход дерева поиска [7]. Вершины дерева поиска сопоставляются с ситуациями, которые можно достичь в данном процессе, а ребра – варианты очередного шага выполняемого процесса. Текущая ситуация, соответствующая некоторой вершине дерева поиска, представляется переменной матрицей $\boldsymbol{X}$, содержащей столбцы заданной матрицы, которые еще не покрыты, и строки, которые можно использовать для их покрытия. В этой ситуации выбирается первый из столбцов с минимальным числом единиц, так минимизируется число вариантов продолжения поиска. Очередной шаг процесса состоит в выборе покрывающей строки для этого столбца и включении ее в получаемое решение. Таким образом, вершины дерева поиска соответствуют некоторым столбцам исходной матрицы, а ребра – выбираемым для их покрытия строкам. Включаемая в решение строка удаляется из матрицы $\boldsymbol{X}$ вместе с покрываемыми ею столбцами. Удаляются также строки, смежные со строкой, которая включается в решение. Под *смежными строками* будем понимать строки, соответствующие смежным вершинам заданного графа.

В работе [7] сформулированы два правила редукции, которые следует выполнять для сокращения размерности задачи. Одно из них позволяет исключать из рассмотрения столбцы, если в матрице $\boldsymbol{X}$ имеются другие столбцы, покрываемые ими. Это правило можно применять и при поиске независимого доминирующего множества. В исходном значении матрицы $\boldsymbol{X}$ каждый i-й столбец представляет множество $N[v_i]$. В графе пересечений интервалов $G = (V, E)$ для двух вершин v_i и v_j справедливо $N[v_i] \subseteq N[v_j]$, если вершина v_i соответствует элементу булева пространства, а v_j – интервалу, содержащему этот элемент. Следовательно, в исходной матрице $\boldsymbol{X}$ можно оставить для покрытия только те столбцы, которые соответствуют отдельным элементам булева пространства.

Второе правило, по которому из рассмотрения исключаются строки, покрываемые другими строками, неприменимо в рассматриваемой задаче из-за требования, чтобы элементы покрытия не пересекались.

Нахождение наименьшего максимального независимого множества в графе. В работе [7] описан способ перебора максимальных независимых множеств в лексикографическом порядке. Предлагаемый метод получения наименьшего максимального независимого множества заключается в выборе его в процессе данного перебора.

Пусть $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – множество вершин графа G. Весь процесс нахождения максимальных независимых множеств можно разбить на n этапов, каждый из которых связан с определенной вершиной $v_i \in V$. На i-м этапе находятся максимальные независимые множества, содержащие вершину v_i и не содержащие вершин с меньшими номерами, т. е. таких v_j, для которых $j < i$. В качестве решения сохраняется множество, которое обладает наименьшей мощностью.

Пусть S_i – одно из независимых множеств графа G, формируемых на i-м этапе. За начальное значение множества S_i принимается множество, состоящее из единственной вершины v_i. Множество S_i расширяется за счет поочередного включения в него элементов $v_j \in V$, удовлетворяющих условиям

$$i < j \le n,\ \ v_j \in \bigcap_{v \in S_i} \{V \setminus N(v)\},$$

где $N(v)$ – окрестность вершины v.

Каждый раз при соблюдении данных условий выбирается v_j с минимальным j. Это расширение множества S_i продолжается до тех пор, пока выполняется одно из условий:

1) $\bigcap\limits_{v \in S_i} \{V \setminus N(v)\} \ne \varnothing$;

2) мощность множества S_i достигает значения, на единицу меньшего мощности хранимого множества, а проверка на максимальность показывает, что S_i не является максимальным.

Формируемое множество S_i проверяется на максимальность согласно следующему свойству: независимое множество S является максимальным тогда и только тогда, когда $S \cup N(S) = V$, где $N(S) = \bigcup\limits_{v \in S} N(v)$. Множество S_i в этом случае сохраняется как промежуточное решение.

Заметим, что наибольшее независимое множество (независимое множество наибольшей мощности) графа пересечения интервалов является единственным и состоит из вершин, соответствующих одноэлементным интервалам. Поэтому для получения наименьшего максимального независимого множества указанный перебор надо начинать с вершин, соответствующих наибольшим интервалам. Искомое множество будет получено быстрее, если вершины графа пересечения интервалов упорядочить по невозрастанию мощностей соответствующих им интервалов, а внутри подмножеств вершин с одним и тем же таким показателем – по неубыванию степеней вершин.

Для проверки второго из указанных выше условий можно руководствоваться следующими соображениями. Есть возможность оценить окончательную мощность множества S_i перед тем, как вводить в него вершину v_j, соответствующую одноэлементному интервалу. Пусть m – число элементов булева пространства, на которых заданная функция имеет значение 1; k – число вершин, принадлежащих S_i; l – число элементов, принадлежащих интервалам, соответствующим вершинам из S_i. Тогда мощность множества S_i может достигнуть величины $k + m - l$.

Чтобы построить следующее по порядку независимое множество, из полученного S_i (сохраненного или не сохраненного в качестве решения) удаляется вершина v_p, присоединенная к S_i последней, и выполняется та же процедура с вершинами v_q, где $q > p$.

На k-м этапе проверяется условие $A_k \cup B_k = V$, где $A_k = \{v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ и $B_k = \bigcup\limits_{j=k}^{n} N(v_j)$. Если оно не выполняется, то данный процесс надо прекратить, так как никакое подмножество множества A_k не составит максимального независимого множества.

Примеры получения минимальной ортогональной ДНФ. Рассмотрим булеву функцию $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, заданную следующим множеством векторов (одноэлементных интервалов), на которых она имеет значение 1:

	$x_1x_2x_3x_4x_5$		$x_1x_2x_3x_4x_5$		$x_1x_2x_3x_4x_5$		$x_1x_2x_3x_4x_5$		$x_1x_2x_3x_4x_5$
1	0 0 1 0 1	4	0 1 1 0 0	7	0 1 0 1 1	10	1 0 1 1 0	13	1 0 1 1 1
2	0 0 1 1 0	5	1 0 0 1 0	8	0 1 1 0 1	11	1 1 0 1 0	14	1 1 0 1 1
3	0 1 0 1 0	6	0 0 1 1 1	9	1 0 0 1 1	12	1 1 1 0 0	15	1 1 1 1 0

С помощью простого склеивания получим все интервалы, представляемые следующими троичными векторами:

	$x_1x_2x_3x_4x_5$		$x_1x_2x_3x_4x_5$		$x_1x_2x_3x_4x_5$		$x_1x_2x_3x_4x_5$		$x_1x_2x_3x_4x_5$
16	0 0 1 – 1	21	– 1 0 1 0	26	1 – 0 1 0	31	1 0 1 1 –	36	– 0 1 1 –
17	0 – 1 0 1	22	0 1 1 0 –	27	– 0 1 1 1	32	1 – 1 1 0	37	– 1 0 1 –
18	0 0 1 1 –	23	– 1 1 0 0	28	– 1 0 1 1	33	1 1 0 1 –	38	1 0 – 1 –
19	– 0 1 1 0	24	1 0 0 1 –	29	1 0 – 1 1	34	1 1 – 1 0	39	1 – 0 1 –
20	0 1 0 1 –	25	1 0 – 1 0	30	1 – 0 1 1	35	1 1 1 – 0	40	1 – – 1 0

Граф пересечений, содержащий 40 вершин, удобно задать перечислением списков окрестностей вершин, где вершины обозначены номерами соответствующих интервалов:

1:	16,17	21:	3,11,20,26,33,34,37,39,40
2:	18,19,36	22:	4,8,17,23
3:	20,21,37	23:	4,12,22,35
4:	22,23	24:	5,9,25,26,29,30,38,39,40
5:	24,25,26,38,39,40	25:	5,10,19,24,26,31,32,36,38,39,40
6:	16,18,27,36	26:	5,11,21,24,25,33,34,37,38,39,40
7:	20,28,37	27:	6,13,16,18,29,31,36,38
8:	17,22	28:	7,14,20,30,33,37,39
9:	24,29,30,38,39	29:	9,13,24,27,30,31,36,38,39
10:	19,25,31,32,36,38,40	30:	9,14,24,28,29,33,37,38,39
11:	21,26,33,34,37,39,40	31:	10,13,19,25,27,29,32,36,38,40
12:	23,35	32:	10,15,19,25,31,34,35,36,38,40
13:	27,29,31,36,38	33:	11,14,21,26,28,30,34,37,39,40
14:	28,30,33,37,39	34:	11,15,21,26,32,33,35,37,39,40
15:	32,34,35,40	35:	12,15,32,34,40
16:	1,6,17,18,27,36	36:	2,6,10,13,16,18,19,25,27,29,31,32,38,40
17:	1,8,16,22	37:	3,7,11,14,20,21,26,28,30,33,34,39,40
18:	2,6,16,19,27,36	38:	5,9,10,13,19,24,25,26,27,29,30,31,32,36,39,40
19:	2,10,25,31,32,36,38,40	39:	5,9,11,14,21,24,25,26,28,29,30,33,34,37,38,40
20:	3,7,21,28,37	40:	5,10,11,15,19,21,24,25,26,31,32,33,34,35,36,37,38,39

Матрицу $\boldsymbol{X}$ зададим в виде табл. 1, где по правилу редукции оставлены только те столбцы, которые соответствуют одиночным векторам, а для удобства чтения нули представлены пустыми клетками.

Одним из столбцов, обладающих минимальным числом единиц, является столбец 1, который покрывают строки 1, 16 и 17. Эти варианты выбора строки для покрытия столбца 1 определяют три ветви дерева поиска с начальными вершинами, обозначенными номерами строк. Из покрывающих строк какого-либо столбца рекомендуется выбирать в первую очередь ту, которая содержит максимальное число единиц. Выбрав строку 16 и включив ее в текущее решение, придем к ситуации, представленной в табл. 2. Она получена из табл. 1 удалением покрываемых ею столбцов 1 и 6 и строк, соответствующих интервалам, с которыми пересекается интервал, соответствующий строке 16.

Таблица 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1														
2		1													
3			1												
4				1											
5					1										
6						1									
7							1								
8								1							
9									1						
10										1					
11											1				
12												1			
13													1		
14														1	
15															1
16	1					1									
17	1							1							
18		1				1									
19		1								1					
20			1				1								
21			1								1				
22				1				1							
23				1								1			
24					1				1						
25					1					1					
26					1						1				
27						1							1		
28							1							1	
29									1				1		
30									1					1	
31										1			1		
32										1					1
33											1			1	
34											1				1
35												1			1
36		1				1				1			1		
37			1				1				1			1	
38					1				1	1			1		
39					1				1		1			1	
40					1					1	1				1

В ситуации, представленной в табл. 2, рассмотрим два варианта покрытия столбца 2 – строку 2 и строку 19. Выбираем строку 19 и, двигаясь дальше по дереву поиска, проходим его вершины в последовательности 16, 19, 22, 35, 29, 37, 5 до получения покрытия, которое соответствует следующей ортогональной ДНФ, представленной в виде троичной матрицы (нумерация интервалов сохранена):

$$\begin{array}{c c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - & 1 \\ - & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & - \\ 1 & 0 & - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - & 0 \\ - & 1 & 0 & 1 & - \end{bmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 16 \\ 19 \\ 22 \\ 29 \\ 35 \\ 37 \end{matrix} \end{array}$$

Ветвь дерева поиска с начальной вершиной 16 изображена на рис. 1. Движение вниз по ветвям прекращается, когда видно, что длина получаемого покрытия не меньше длины уже полученного. Например, пройдя последовательность 16, 19, 22, 35, 13, видим, что в соответствующей таблице нет строки, покрывающей все столбцы. Следовательно, длина получаемого нового покрытия не может быть меньше семи. Эта ситуация представлена в табл. 3.

Таблица 2

	3	4	5	7	8	9	11	12	13	14	15
3	1										
4		1									
5			1								
7				1							
8					1						
9						1					
11							1				
12								1			
13									1		
14										1	
15											1
19											
20	1			1							
21	1						1				
22		1			1						
23		1						1			
24			1			1					
26			1				1				
28				1						1	
29						1			1		
30						1				1	
33							1			1	
34							1				1
35								1			1
37	1			1			1			1	
39			1			1	1			1	

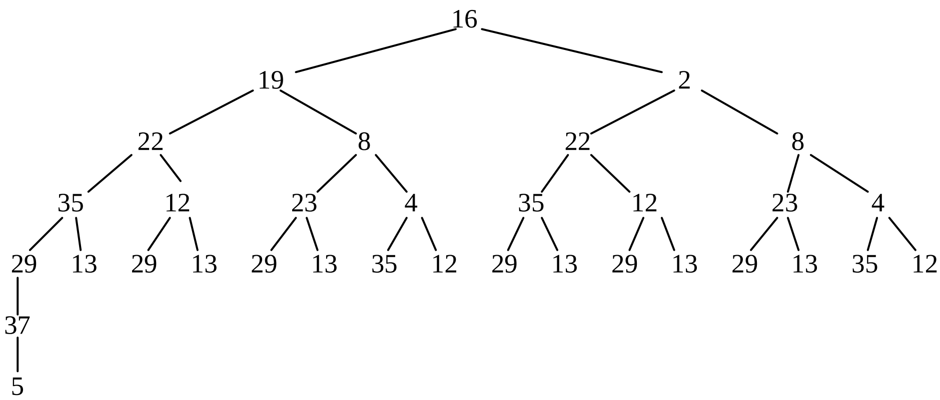

Рис. 1. Ветвь дерева поиска с начальной вершиной 16

Дальнейший обход ветви дерева поиска с начальной вершиной 16 не приводит к меньшему покрытию. Перейдя к ветви с началом в вершине 17, действуем аналогичным образом. Эта ветвь изображена на рис. 2. Двигаясь в последовательности 17, 23, 36, 34, видим, что не получим покрытия с числом строк, меньшим семи. Кратчайшее покрытие дает последовательность 17, 23, 36, 15, 37, 24. Дальнейший обход ветви с началом в вершине 17 так же, как и обход ветви с началом в вершине 1, не дает покрытия с меньшим числом строк. Минимальная ортогональная ДНФ заданной функции представлена матрицей

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & - & 1 & 0 & 1 \\ - & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & - \\ - & 0 & 1 & 1 & - \\ - & 1 & 0 & 1 & - \end{bmatrix} & \begin{matrix} 15 \\ 17 \\ 23 \\ 24 \\ 36 \\ 37 \end{matrix} \end{array}$$

Таблица 3

	3	5	7	9	11	13	14
3	1						
5		1					
7			1				
9				1			
11					1		
13						1	
14							1
20	1		1				
21	1				1		
24		1		1			
26		1			1		
28			1				1
29				1		1	
30				1			1
33					1		1
37	1		1		1		1
39		1		1	1		1

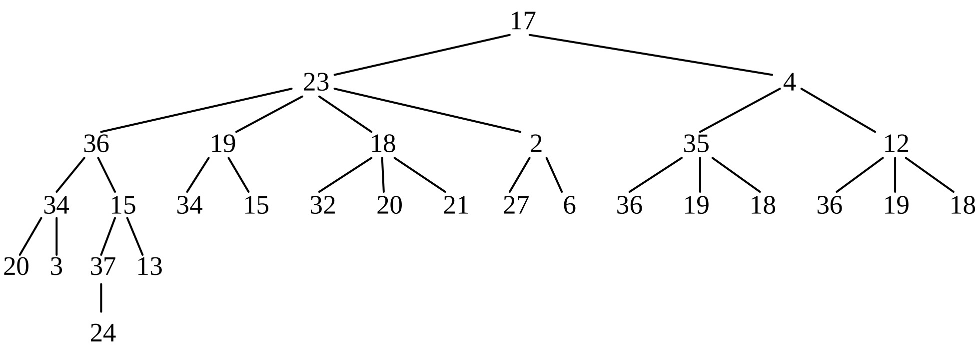

Рис. 2. Ветвь дерева поиска с начальной вершиной 17

Рассмотрим приведенный выше пример булевой функции, применив к нему метод нахождения наименьшего максимального независимого множества. Как было указано ранее, для применения лексикографического перебора необходимо переупорядочить интервалы и, соответственно, вершины графа. Интервалы выстроим в следующем порядке:

	$x_1x_2x_3x_4x_5$		$x_1x_2x_3x_4x_5$		$x_1x_2x_3x_4x_5$		$x_1x_2x_3x_4x_5$		$x_1x_2x_3x_4x_5$
1	– 1 0 1 –	9	0 1 0 1 –	17	1 0 0 1 –	25	1 – 0 1 0	33	0 0 1 1 1
2	– 0 1 1 –	10	1 1 1 – 0	18	1 0 – 1 1	26	0 0 1 0 1	34	1 1 1 1 0
3	1 0 – 1 –	11	0 0 1 – 1	19	1 – 0 1 1	27	0 1 1 0 0	35	1 1 0 1 1
4	1 – 0 1 –	12	0 0 1 1 –	20	1 0 1 1 –	28	0 1 1 0 1	36	1 0 0 1 1
5	1 – – 1 0	13	– 1 0 1 1	21	1 – 1 1 0	29	1 1 1 0 0	37	1 0 1 1 1
6	0 – 1 0 1	14	– 0 1 1 1	22	1 1 0 1 –	30	0 1 0 1 1	38	1 0 0 1 0
7	0 1 1 0 –	15	0 1 1 0 –	23	1 1 – 1 0	31	0 0 1 1 0	39	1 0 1 1 0
8	– 1 1 0 0	16	– 1 0 1 0	24	1 0 – 1 0	32	0 1 0 1 0	40	1 1 0 1 0

Задание графа пересечения интервалов списком окрестностей вершин представлено ниже:

1: 4,5,9,13,16,19,22,23,25,30,32,35,40
2: 3,5,11,12,14,15,18,20,21,24,31,33,37,39
3: 2,4,5,14,15,17,18,19,20,21,24,25,36,37,38,39
4: 1,3,5,13,16,17,18,19,22,23,24,25,35,36,38,40
5: 1,2,3,4,10,15,16,17,20,21,22,23,24,25,34,38,39,40
6: 7,11,26,28
7: 6,8,27,28
8: 7,10,27,29
9: 1,13,16,30,32
10: 5,8,23,29,34
11: 2,6,12,14,26,33
12: 2,11,14,15,31,33

13: 1,4,9,19,22,30,35
14: 2,3,11,12,18,20,33,37
15: 2,3,5,12,20,21,24,31,39
16: 1,4,5,9,22,23,25,32,40
17: 3,4,5,18,19,24,25,36,38
18: 2,3,4,14,17,19,20,36,37
19: 1,3,4,13,17,18,22,35,36
20: 2,3,5,14,15,18,21,24,37,39
21: 2,3,5,10,15,20,23,24,34,39
22: 1,4,5,13,16,19,23,25,35,40
23: 1,4,5,10,16,21,22,25,34,40
24: 2,3,4,5,15,17,20,21,25,38,39
25: 1,3,4,5,16,17,22,23,24,38,40
26: 6,11
27: 7,8
28: 6,7
29: 8,10
30: 1,9,13
31: 2,12,15
32: 1,9,16
33: 2,11,12,14
34: 5,10,21,23
35: 1,4,13,19,22
36: 3,4,17,18,19
37: 2,3,14,18,20
38: 3,4,5,17,24,25
39: 2,3,5,15,20,21,24
40: 1,4,5,16,22,23,25

При таком упорядочении вершин уже первым в лексикографическом порядке максимальным независимым множеством является $\{1, 2, 6, 8, 17, 34\}$. Продолжение процесса не даст максимального независимого множества меньшей мощности. Соответствующая ортогональная ДНФ представлена матрицей

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 1 & - \\ - & 0 & 1 & 1 & - \\ 0 & - & 1 & 0 & 1 \\ - & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & - \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 8 \\ 17 \\ 34 \end{matrix} \end{array}$$

Распространение подхода на не полностью определенные функции. Задача минимизации не полностью определенной (частичной) булевой функции ставится как задача получения минимальной ДНФ, реализующей заданную функцию, т. е. принимающей значение, которое совпадает со значением этой функции везде, где оно определено. Обычно частичная булева функция задается двумя множествами: областью M^1 булева пространства аргументов, где функция имеет значение 1, и областью M^0, где функция имеет значение 0. Область, где значение функции неопределено (остальная часть булева пространства), обозначается символом M^-. Классический метод минимизации частичной функции предполагает нахождение всех максимальных интервалов в множестве $M^1 \cup M^-$ и покрытие ими элементов множества M^1. Для получения ортогональной ДНФ кроме максимальных надо рассматривать и все немаксимальные интервалы, а также учитывать их пересечение. Метод оказывается малоэффективным при слабой определенности заданной функции, поскольку многие интервалы являются бесполезными, находясь целиком в области M^-. В связи с этим выделен класс слабо определенных функций и для них разработан метод минимизации [3]. Данный класс определяется соотношением мощностей множеств $|M^1 \cup M^0| << |M^-|$. Метод использует понятие *интервально покрываемого множества*, которое представляет собой подмножество множества M^1, такое, что существует интервал, содержащий все его элементы и не пересекающийся с множеством M^0. Максимальное интервально покрываемое множество представляет собой интервально покрываемое множество, которое не является собственным подмножеством другого такого множества. Метод из работы [3] сводит задачу минимизации слабо определенной булевой функции к получению кратчайшего покрытия элементов множества M^1 максимальными интервально покрываемыми множествами.

Предлагаемый подход можно применять и для минимизации частичных, в том числе слабо определенных, функций в классе ортогональных ДНФ. Рассматриваются интервалы, связанные с интервально покрываемыми множествами, и граф пересечения этих интервалов. Получение минимальной ортогональной ДНФ сводится к нахождению в данном графе наименьшего доминирующего независимого множества, или наименьшего максимального независимого множества. При этом если интервально покрываемое множество M_j^1 является собственным подмножеством интервально покрываемого множества M_i^1, а соответствующие им интервалы совпадают, то M_j^1 исключается из рассмотрения. Далее рассматриваются только интервалы, связанные с интервально покрываемыми множествами. Пусть частичная булева функция задана следующими матрицами, которые обозначены символами соответствующих множеств:

$$M^1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}, \quad M^0 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Ниже представлены интервально покрываемые множества, полученные путем лексикографического перебора, и связанные с ними интервалы в виде троичных векторов. Некоторые множества в этом списке отсутствуют. Например, отсутствует множество {2, 9}, поскольку оно является подмножеством множества {2, 8, 9}, а обоим этим множествам соответствует один и тот же интервал, представляемый троичным вектором (– 1 1 – 0):

		$x_1x_2x_3x_4x_5$			$x_1x_2x_3x_4x_5$			$x_1x_2x_3x_4x_5$
1	{1}	0 0 1 0 1	8	{3,6}	1 0 – 1 0	15	{6,9}	1 – 1 1 0
2	{1,4}	0 0 1 – 1	9	{3,6,7,8,9}	1 – – – 0	16	{7}	1 1 0 1 0
3	{2}	0 1 1 0 0	10	{3,6,7,9}	1 – – 1 0	17	{7,8,9}	1 1 – – 0
4	{2,8}	– 1 1 0 0	11	{4}	0 0 1 1 1	18	{7,9}	1 1 – 1 0
5	{2,8,9}	– 1 1 – 0	12	{5}	1 0 0 1 1	19	{8}	1 1 1 0 0
6	{3}	1 0 0 1 0	13	{6}	1 0 1 1 0	20	{8,9}	1 1 1 – 0
7	{3,5}	1 0 0 1 –	14	{6,8,9}	1 – 1 – 0	21	{9}	1 1 1 1 0

Граф пересечений интервалов представлен списками окрестностей вершин:

1:	2	12:	7
2:	1,11	13:	8,9,10,14,15
3:	4,5	14:	4,5,8,9,10,13,15,17,18,19,20,21
4:	3,5,9,14,17,19,20	15:	5,8,9,10,13,14,17,18,20,21
5:	3,4,9,10,14,15,17,18,19,20,21	16:	9,10,17,18
6:	7,8,9,10	17:	4,5,9,10,14,15,16,18,19,20,21
7:	6,8,9,10,12	18:	5,9,10,14,15,16,17,20,21
8:	6,7,9,10,13,14,15	19:	4,5,9,14,17,20
9:	4,5,6,7,8,10,13,14,15,16,17,18,19,20,21	20:	4,5,9,10,14,15,17,18,19,21
10:	5,6,7,8,9,13,14,15,16,17,18,20,21	21:	5,9,10,14,15,17,18,20
11:	2		

Начальная ситуация в поиске решения представлена в табл. 4. Дальнейшие действия выполняются так же, как в случае полностью определенных функций. Дерево поиска изображено на рис. 3. Первое независимое доминирующее множество, полученное в процессе поиска, составляют вершины 2, 4, 7, 15 и 16. Затем получено наименьшее независимое доминирующее множество {2, 5, 8, 12}, которому соответствует следующая матрица:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & - & 1 \\ - & 1 & 1 & - & 0 \\ 1 & 0 & - & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \\ 2 \\ 5 \\ 8 \\ 12 \end{array}$$

Таблица 4

	1	3	6	11	12	13	16	19	21
1	1								
2	1			1					
3		1							
4		1						1	
5		1						1	1
6			1						
7			1		1				
8			1			1			
9			1				1	1	1
10			1			1	1		1
11				1					
12					1				
13						1			
14						1		1	1
15						1			1
16							1		
17							1	1	1
18							1		1
19								1	
20								1	1
21									1

Рис. 3. Дерево поиска минимальной ортогональной ДНФ

Далее необходимо выполнить упрощение ДНФ, если это возможно, путем расширения интервалов. Естественно, что каждый интервал не должен пересекаться с множеством M^0 и ни с одним из интервалов, вошедших в решение. При таком расширении переменная x_4 оказалась несущественным аргументом:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & - & 1 \\ - & 1 & 1 & - & 0 \\ 1 & 0 & - & - & 0 \\ - & 0 & 0 & - & 1 \end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \\ 2 \\ 5 \\ 8 \\ 12 \end{array}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_5 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ - & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & - & 1 \\ - & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
\end{array}.$$

На рассмотренном выше примере продемонстрируем действие метода, использующего нахождение наименьшего максимального независимого множества. Для лексикографического перебора упорядочим интервально покрываемые множества и соответствующие им интервалы следующим образом:

		$x_1x_2x_3x_4x_5$			$x_1x_2x_3x_4x_5$			$x_1x_2x_3x_4x_5$
1	{3,6,7,8,9}	1 – – – 0	8	{3,6}	1 0 – 1 0	15	{5}	1 0 0 1 1
2	{2,8,9}	– 1 1 – 0	9	{2,8}	– 1 1 0 0	16	{2}	0 1 1 0 0
3	{7,8,9}	1 1 – – 0	10	{7,9}	1 1 – 1 0	17	{3}	1 0 0 1 0
4	{6,8,9}	1 – 1 – 0	11	{8,9}	1 1 1 – 0	18	{7}	1 1 0 1 0
5	{3,6,7,9}	1 – – 1 0	12	{6,9}	1 – 1 1 0	19	{6}	1 0 1 1 0
6	{1,4}	0 0 1 – 1	13	{1}	0 0 1 0 1	20	{8}	1 1 1 0 0
7	{3,5}	1 0 0 1 –	14	{4}	0 0 1 1 1	21	{9}	1 1 1 1 0

Нумерацию вершин графа пересечения интервалов приведем в соответствие с нумерацией интервалов:

1:	2,3,4,5,7,8,9,10,11,12,17,18,19,20,21	12:	1,2,3,4,5,8,10,11,19,21
2:	1,3,4,5,9,10,11,12,16,20,21	13:	6
3:	1,2,4,5,9,10,11,12,18,20,21	14:	6
4:	1,2,3,5,8,9,10,11,12,19,20,21	15:	7
5:	1,2,3,4,7,8,10,11,12,17,18,19,21	16:	2,9
6:	13,14	17:	1,5,7,8
7:	1,5,8,15,17	18:	1,3,5,10
8:	1,4,5,7,12,17,19	19:	1,4,5,8,12
9:	1,2,3,4,11,16,20	20:	1,2,3,4,9,11
10:	1,2,3,4,5,11,12,18,21	21:	1,2,3,4.5,10,11,12
11:	1,2,3,4,5,9,10,12,20,21		

Первым независимым множеством в процессе перебора оказалось {1, 6, 15, 16}. Дальнейший перебор не приводит к множеству с меньшей мощностью. Можно заметить, что поиск решения должен быть прекращен на этапе 7, так как A_7 = {7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21}, B_7 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21} и $A_7 \cup B_7 \neq V$. Ортогональная ДНФ, построенная в соответствии с полученным наименьшим независимым множеством, и результат расширения интервалов имеют следующий вид:

$$\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} & \\
\begin{bmatrix} 1 & - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 12 \end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - & 1 \\ - & 0 & 0 & - & 1 \\ 0 & - & - & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Заключение. Рассмотренные методы ортогонализации ДНФ гарантируют получение минимального числа элементарных конъюнкций в ортогональных ДНФ. В работе показано, как для решения данной задачи можно применить аппарат теории графов. В отличие от многих методов ортогонализации ДНФ, предполагающих задание функции в произвольной ДНФ, предлагаемый подход рассчитан на представление функции в виде совершенной ДНФ. Данный подход распространяется также на не полностью определенные булевы функции. Задача минимизации ортогональной ДНФ имеет неполиномиальную сложность [1], поэтому практическое применение любого метода, получающего точное решение этой задачи, весьма ограничено. Полезность точного метода, в частности, заключается в том, что с его помощью можно оценивать качество эвристических методов, а также определять направление процесса решения задачи при создании эвристического метода. В качестве эвристического метода ортогонализации ДНФ можно предложить метод, который использует упорядочение вершин графа пересечения интервалов и получение в этом графе первого в лексикографическом порядке максимального независимого множества.

Список использованных источников

1. Кузнецов, О. П. Ортогональные системы булевых функций и их применение к анализу и синтезу логических сетей / О. П. Кузнецов // Автоматика и телемеханика. – 1970. – № 10. – С. 117–128.

2. Баранов, С. И. Синтез микропрограммных автоматов / С. И. Баранов. – Л. : Энергия, 1979. – 232 с.

3. Закревский, А. Д. Логический синтез каскадных схем / А. Д. Закревский. – М. : Наука, 1981. – 416 с.

4. Синтез асинхронных автоматов на ЭВМ / А. Д. Закревский [и др.]. – Минск : Наука и техника, 1975. – 184 с.

5. Бибило, П. Н. Синтез комбинационных ПЛМ-структур для СБИС / П. Н. Бибило. – Минск : Навука і тэхніка, 1992. – 323 с.

6. Закревский, А. Д. Расчет надежности технической системы при заданных критических наборах событий / А. Д. Закревский, Ю. В. Поттосин // Логическое проектирование. – Минск : Ин-т техн. кибернетики АН Беларуси, 1996. – С. 123–131.

7. Закревский, А. Д. Логические основы проектирования дискретных устройств / А. Д. Закревский, Ю. В. Поттосин, Л. Д. Черемисинова. – М. : Физматлит, 2007. – 592 с.

8. Матросова, А. Ю. О вероятностном моделировании дискретных устройств / А. Ю. Матросова // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 3. – С. 156–164.

9. Гаврилов, М. А. Логическое проектирование дискретных автоматов (языки, методы, алгоритмы) / М. А. Гаврилов, В. В. Девятков, Е. И. Пупырев. – М. : Наука, 1977. – 352 с.

10. Бибило, П. Н. Синтез комбинационных схем методом функциональной декомпозиции / П. Н. Бибило, С. В. Енин. – Минск : Наука и техника, 1987. – 189 с.

11. Кардаш, С. Н. Ортогонализация системы ДНФ булевых функций / С. Н. Кардаш // Информационные технологии и системы 2020 (ИТС 2020) : материалы Междунар. науч. конф., Минск, Беларусь, 18 нояб. 2020 г. – Минск : БГУИР, 2020. – С. 41–42.

12. Поттосин, Ю. В. Методы дискретной математики в проектировании цифровых устройств / Ю. В. Поттосин. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. – 176 с.

13. Поттосин, Ю. В. Ортогонализация системы полностью определенных булевых функций / Ю. В. Поттосин, Е. А. Шестаков // Логическое проектирование. – Минск : Ин-т техн. кибернетики НАН Беларуси, 2000. – С. 107–115.

14. Паршина, Н. А. Минимизация частичных булевых функций в классе ортогональных ДНФ / Н. А. Паршина // Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур : докл. Второй Всерос. конф. – Екатеринбург : УрО РАН, 1998. – С. 181–184.

15. Поттосин, Ю. В. Ортогонализация системы не полностью определенных булевых функций / Ю. В. Поттосин // Вопросы синтеза логики ЦВМ : в 3 ч. – Каунас : КПИ, 1976. – Ч. III. – С. 39–42.

16. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев [и др.]. – М. : Наука, 1990. – 384 с.

References

1. Kuznetsov O. P. *Orthogonal systems of Boolean functions and their applications in analysis and synthesis of logical networks*. Avtomatika i telemehanika [*Automatics and Remote Control*], 1970, no. 10, pp. 117–128 (In Russ.).

2. Baranov S. I. Sintez mikroprogrammnyh avtomanov. *Synthesis of Microprogrammed Automata*. Leningrad, Energia, 1979, 232 p. (In Russ.).

3. Zakrevskij A. D. Logicheskij sintez kaskadnyh shem. *Logical Synthesis of Cascaded Circuits*. Moscow, Nauka, 1981, 416 p. (In Russ.).

4. Zakrevskij A. D., Balaklej L. I., Eliseeva N. A., Oranov A. M., Pottosin Yu. V., …, Jankovskaja A. E. Sintez asinhronnyh avtomatov na EVM. *Synthesis of Asynchronous Automata in a Computer*. Minsk, Nauka i tehnika, 1975, 184 p. (In Russ.).

5. Bibilo P. N. Sintez kombinatsionnyh PLM-struktur dl’a SBIS. *Synthesis of Combinational PLA-structures for VLSI*. Minsk, Navuka i tehnika, 1992, 323 p. (In Russ.).

6. Zakrevskij A. D., Pottosin Yu. V. *Calculation of engineering system reliability when the critical set of events is given*. Logicheskoe proektirovanie [*Logical Design*]. Minsk, Institut tehnicheskoj kibernetiki Akademii nauk Belarusi, 1996, pp. 123–131 (In Russ.).

7. Zakrevskij A. D., Pottosin Yu. V., Cheremisinova L. D. Logicheskie osnovy proektirovanija diskretnyh ustrojstv. *Logical Fundamentals of Discrete Devices Design*. Moscow, Fizmatlit, 2007, 592 p. (In Russ.).

8. Matrosova A. Yu. *On probabilistic simulation of discrete devices*. Avtomatika i telemehanika [*Automatics and Remote Control*], 1995, no. 3, pp. 156–164 (In Russ.).

9. Gavrilov M. A., Devjatkov V. V., Pupyrev E. I. Logicheskoe proektirovanie diskretnyh avtomatov (jazyki, metody, algoritmy). *Logical Design of Discrete Automata (Languages, Methods, Algorithms).* Moscow, Nauka, 1977, 352 p. (In Russ.).

10. Bibilo P. N., Enin S. V. Sintez kombinatsionnyh shem metodom funkcional’noj dekompozicii. *Synthesis of Combinational Circuits by the Method of Functional Decomposition*. Minsk, Nauka i tehnika, 1987, 189 p. (In Russ.).

11. Kardash S. N. *Orthogonalization of a DNF system of Boolean functions*. Informacionnye tehnologii i sistemy 2020 (ITS 2020): materialy Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, Minsk, Belarus’, 18 nojabrja 2020 g. [*Informational Technologies and Systems 2020 (ITS 2020): Proceedings of International Scientific Conference, Minsk, Belarus, 18 November 2020*], Minsk, Belorusskij gosudarstvennyj universitet informatiki i radiojelektroniki, 2020, pp. 41–42 (In Russ.).

12. Pottosin Yu. V. Metody diskretnoj matematiki v proektirovanii cifrovyh ustrojstv. *Discrete Mathematics Methods in Digital Devices Design*. Saarbrücken, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017, 176 p. (In Russ.).

13. Pottosin Yu. V., Shestakov E. A. *Orthogonalization of a system of completely specified Boolean functions*. Logicheskoe proektirovanie [*Logical Design*]. Minsk, Institut tehnicheskoj kibernetiki Nacional'noj akademii nauk Belarusi, 2000, pp. 107–115 (In Russ.).

14. Parshina N. A. *Minimization of partial Boolean functions in the class of orthogonal DNFs*. Novye informacionnye tehnologii v issledovanii diskretnyh struktur: doklady Vtoroj Vserossijskoj konferencii [*Novel Information Technologies in the Research of Discrete Structures: Proceedings of the Second All-Russian Conference*]. Ekaterinburg, Ural’skoe otdelenie Rossijskoi akademii nauk, 1998, pp. 181–184 (In Russ.).

15. Pottosin Yu. V. *Orthogonalization of a system of incompletely specified Boolean functions*. Voprosy sinteza logiki CVM [*The Problems of Digital Computer Logic Synthesis*]. Kaunas, KPI, 1976, part III, pp. 39–42 (In Russ.).

16. Emelichev V. A., Mel’nikov O. I., Sarvanov V. I., Tyshkevich R. I. Lekcii po teorii grafov. *Lectures on Graph Theory*. Moscow, Nauka, 1990, 384 p. (In Russ.).

Информация об авторе

Поттосин Юрий Васильевич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
E-mail: pott@newman.bas-net.by

Information about the author

Yuri V. Pottosin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Leading Researcher, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
E-mail: pott@newman.bas-net.by