

С.А. БОГДАНОВИЧ
 БГПУ (Минск, Беларусь)
А.А. ЕРМОЛИЦКИЙ
 БГУИР (Минск, Беларусь)

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Пусть M — любое паракомпактное, гладкое, действительное многообразие размерности n , $M^2 = M \times M = \{(x; y) \mid x, y \in M\}$, $M^4 = M^2 \times M^2 = \{(x; y; u; v) \mid x, y, u, v \in M\}$; $\Delta(M^2) = \{(x; x) \in M^2\}$, $\Delta(M^4) = \{(x; x; x; x) \in M^4\}$ — диагонали в M^2, M^4 соответственно. Очевидно, что многообразия $\Delta(M^2)$ и $\Delta(M^4)$ диффеоморфны M ($\Delta(M^2) \cong \Delta(M^4) \cong M$).

Теорема 1 [1]. Пусть (M, ∇) — многообразие со связностью, $\pi : TM \rightarrow M$ — каноническая проекция. Тогда существует такая окрестность N_0 нулевого сечения O_M в TM , что отображение

$$\varphi : \pi \times \text{Exp} : X \rightarrow (\pi(X), \text{Exp}_{\pi(x)} X)$$

является диффеоморфизмом N_0 на окрестность N_Δ диагонали $\Delta(M^2)$.

Например, в качестве связности ∇ можно взять каноническую связность любой римановой метрики на многообразии M .

Некоторые результаты, полученные в [2], могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Существует окрестность N_0 нулевого сечения $O_M \cong M$ в TM и почти эрмитова структура (\bar{J}, \bar{g}) на N_0 такая, что (N_0, \bar{J}, \bar{g}) — кэлерово многообразие и $O_M \cong M$ — вполне геодезическое подмногообразие (N_0, \bar{J}, \bar{g}) .

Комбинируя теоремы 1, 2, получаем следующую теорему.

Теорема 3. Диффеоморфизм φ индуцирует кэлерову структуру на окрестности N_Δ диагонали $\Delta(M^2)$, при этом диагональ $\Delta(M^2) \cong M$ является вполне геодезическим подмногообразием многообразия N_Δ .

Замечание 1. Комплексная структура кэлерова многообразия N_Δ не совместима со структурой произведения на M^2 . Это значит, что если $z_l, l = \overline{1, n}$, — комплексные координаты точки $(x; y) \in N_\Delta$, то, вообще говоря, не существует таких действительных координат $x_l, y_l, l = \overline{1, n}$, точек $x; y \in M$ соответственно, что $z_l = x_l + iy_l, i^2 = -1$.

Отдельные результаты, полученные в [3], могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 4. Пусть (M, J, g) — кэлерово многообразие. Тогда существует окрестность N_0 нулевого сечения $O_M \cong M$ в TM и гиперкэлерова структура (J_1, J_2, J_3, \bar{g}) на N_0 такие, что $O_M \cong M$ является вполне геодезическим

подмногообразием гиперкэлерова многообразия $(N_0, J_1, J_2, J_3, \bar{g})$,
 $\bar{g}|_{O_M} = g, J_2|_{O_M} = J$.

Комбинируя теоремы 1, 3, 4, получаем следующую теорему.

Теорема 5. Существует гиперкэлерова структура на окрестности \bar{N}_Δ диагонали $\Delta(M^4)$, при этом диагональ $\Delta(M^4) \cong M$ является вполне геодезическим подмногообразием гиперкэлерова многообразия \bar{N}_Δ .

Замечание 2. Гиперкомплексная структура гиперкэлерова многообразия \bar{N}_Δ не совместима со структурой произведения M^4 . Это значит, что если $q_l, l = \overline{1, n}$, — гиперкомплексные координаты $(x; y; u; v) \in \bar{N}_\Delta$, то, вообще говоря, не существует таких действительных координат $x_l, y_l, u_l, v_l, l = \overline{1, n}$, точек $x, y, u, v \in M$ соответственно, что $q_l = x_l + iy_l + ju_l + kv_l, i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Громол, Д. Риманова геометрия в целом / Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер. – М., 1971. – 343 с.
2. Ermolitski, A.A. Deformations of structures, embedding of Riemannian manifold in a Kahlerian one and geometric antigravitation / A.A. Ermolitski. – Warszawa, Banach Center Publications, v. 76, 2007. – p. 505–514.
3. Ermolitski, A.A. Embeddings of Almost Hermitian Manifolds in Almost Hyper Hermitian Manifold and Complex (Hypercomplex) Numbers in Riemannian Geometry / A.A. Ermolitski. – Applied mathematics, vol. 5, Number 16, 2014. – P. 2464-2475.