

УДК 621.391.13

## РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ И ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМ СВЯЗИ С МНОГОПОЗИЦИОННОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ КОМБИНИРОВАННЫМ КАСКАДНЫМ КОДИРОВАНИЕМ

Э.Б. ЛИПКОВИЧ, Е.А. БЕЛОКОНЬ

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Республика Беларусь**Поступило в редакцию 1 ноября 2021*

**Аннотация.** Предложены математические модели расчета помехоустойчивости и эффективности систем связи с многопозиционными видами модуляции и комбинированным каскадным кодированием на базе несистематических сверточных кодов и недвоичных блочных кодов Рида-Соломона без необходимости привлечения в расчетах сложных процедур компьютерного моделирования и графических построений кривых помехоустойчивости.

**Ключевые слова:** помехоустойчивость, многокаскадное комбинированное кодирование, энергетическая и информационная эффективность, достоверность приема.

### Введение

В работе [1] представлены расчетные соотношения для прямого определения помехоустойчивости и энергетической эффективности систем связи с многопозиционной модуляцией и каскадным сверточным кодированием в зависимости от параметров кодов, характеристик модуляции и требуемой достоверности приема. Показано, что при использовании двух и более каскадов кодирования представляется возможным снизить отношение сигнал/шум (ОСШ) за счет выбора параметров режимов работы первой ступени декодирования и обеспечить требуемую достоверность приема за счет исправления ошибок принятым во внимание последующими ступенями.

В данной статье предложены расчетные модели для определения помехоустойчивости, энергетического выигрыша от кодирования (ЭВК) и информационной эффективности систем связи, использующих многопозиционные виды модуляции и каскадное комбинированное кодирование на базе несистематических сверточных кодов и блочных кодов Рида-Соломона (РС). Во внимание принято, что для борьбы с образованием блочных ошибок используется перемежение/деперемежение символов.

### Расчетные модели

Основываясь на работах [1, 2], общее уравнение, увязывающее вероятность ошибки в информационном бите  $P_{bN}$  на выходе приемной системы с многокаскадным декодированием и многопозиционной модуляцией с величиной отношения ОСШ  $h_k$  на ее входе, представляется в следующем виде:

$$P_{bN} = \frac{C_i \cdot \mu_{ipN}}{q_i \cdot R_{pN}} \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\mu_{ipN} \cdot h_k}\right); \quad (1)$$

$$\mu_{ipN} = \prod_{j=1}^N \mu_{ijN} = \mu_{i1N} \cdot \mu_{i2N} \cdot \mu_{i3N} \cdot \dots \cdot \mu_{iNN}, \quad (2)$$

где  $C_i$  – параметр, зависящий от вида и порядка модуляции;  $\mu_{ipN}$  – результирующий показатель эффективности  $N$ -ступенчатого декодирования;  $\mu_{ijn}$  – показатель эффективности декодирования  $j$ -й ступени;  $R_{pN}$  – результирующая кодовая скорость  $N$ -каскадного кодирования;  $q_i = d_0 / 4E_0$  – квадрат коэффициента помехоустойчивости;  $d_0$  – минимальное расстояние между символами сигнального созвездия;  $E_0$  – средняя энергия, переносимая битом информации;  $h_k' = E_0 / N_0$  – отношение энергии  $E_0$  к спектральной плотности мощности шума  $N_0$ ;  $N$  – число ступеней кодирования;  $j$  – номер ступени декодирования;  $i$  – индекс, указывающий на принятый формат модуляции;  $\operatorname{erfc}(Z)$  – функция определяемая выражением:

$$\operatorname{erfc}(Z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_Z^{\infty} \exp(-u^2) du \cong \frac{1}{Z\sqrt{\pi}} \cdot 10^{-Z^2/2,3}. \quad (3)$$

С учетом (3) уравнение (1) приводится к виду:

$$P_{bN} = \frac{C_i \sqrt{\mu_{ipN}}}{q_i \cdot R_{pN} \sqrt{\pi \cdot h_k'}} \cdot 10^{-\mu_{ipN} \cdot h_k' / 2,3}. \quad (4)$$

Расчетные формулы для определения значений  $C_i$  и  $q_i$  при использовании М-позиционных сигналов с квадратурной амплитудой (КАМ-М), фазовой (ФМ-М), частотной (ЧМ-М), амплитудной (АМ-М) и относительной фазовой (ОФМ-М) модуляцией приведены в работе [1].

Согласно [1] для систем связи с многопозиционной модуляцией и  $N$  – каскадным сверточным кодированием результирующий показатель эффективности  $N$  – ступенчатого декодирования определяется следующим образом:

$$\mu_{ipN}^{(CK)} = q_i \prod_{j=1}^N d_{cj} \cdot \beta_{ijn}^{(CK)} \cdot R_{jN}^{(CK)} = \left( q_i \cdot d_{c1} \cdot \beta_{i1N}^{(CK)} \cdot R_{1N}^{(CK)} \right) \cdot \left( d_{c2} \cdot \beta_{i2N}^{(CK)} \cdot R_{2N}^{(CK)} \right) \cdot \dots \cdot \left( d_{cN} \cdot \beta_{iNN}^{(CK)} \cdot R_{NN}^{(CK)} \right); \quad (5)$$

$$R_{jN}^{(CK)} = \prod_{j=1}^N R_j^{(CK)}; R_{1N}^{(CK)} = R_{pN}^{(CK)} = R_1 \cdot R_2 \cdot \dots \cdot R_N; R_{2N}^{(CK)} = R_2 \cdot R_3 \cdot \dots \cdot R_N, \quad (6)$$

где  $d_{cj}$  – свободное расстояние СК  $j$ -й ступени декодирования;  $\beta_{ijn}^{(CK)}$  – функция взаимосвязи между параметрами  $j$ -й ступени декодирования;  $R_{jN}^{(CK)}$  – кодовая скорость, учитываемая при оценке эффективности  $j$ -й ступени декодирования;  $R_j = k_j / n_j$  – кодовая скорость  $j$ -го каскада на стороне передачи, номер которого отсчитывается от внутреннего каскада кодирования в сторону источника сигнала;  $k_j, n_j$  – число символов на входе и выходе  $j$ -го каскада кодирования.

Входящая в (5), функция взаимосвязи между параметрами  $j$ -й ступени декодирования при  $N$ -каскадном сверточном кодировании рассчитывается по формуле:

$$\beta_{ijn}^{(CK)} = \left( 1 - \frac{\lg \left( R_{jN}^{(CK)} \cdot d_{cj} \right)}{\left( n_j - k_j \right) \cdot \left( -\lg P_{bj} \right)} \right) / \left[ 1 + \frac{R_{jN}^{(CK)} \cdot \sqrt{P_{bj}}}{1 - R_{jN}^{(CK)}} \right], \quad (7)$$

где  $P_{bj}$  – вероятность ошибки на выходе  $j$ -й ступени декодирования.

#### Значения свободного расстояния кода $d_{cj}$

$K_j$	Значения $d_{cj}$ при кодовой скорости $R_j^{(CK)}$						
	1/4	1/3	1/2	2/3	3/4	5/6	7/8
5	16	12	8	5	4	3	2
7	20	15	10	7	5	4	3
9	24	18	12	8	6	5	4

В таблице приведены значения  $d_{cj}$  для избыточных сверточных кодов с  $R_j^{(CK)} = 1/n_j$  и перфорированных кодов с  $R_j^{(CK)} = (n_j - 1)/n_j$  в зависимости от  $K_j$  при использовании оптимальных порождающих полиномов.

Из анализа (7) следует, что величина  $\beta_{ijN}^{(CK)}$  зависит не только от параметров соответствующей ступени декодирования, но и значения вероятности ошибки  $P_{bj}$  на ее выходе. Диапазон изменения  $\beta_{ijN}^{(CK)}$  составляет от величин, близких к нулю при  $P_{bj} \geq 5 \cdot 10^{-2}$ , до единицы при  $P_{bj} \rightarrow 0$ . Чем меньше  $\beta_{ijN}^{(CK)}$ , тем ниже эффективность декодирования  $\mu_{ijN}$  рассматриваемой ступени.

Если каскадная кодовая конструкция строится на базе блочных недвоичных кодов РС, то результирующий показатель эффективности декодирования  $\mu_{ipN}^{(PC)}$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_{ipN}^{(PC)} &= q_i \prod_{j=1}^N \beta_{ijN}^{(PC)} \cdot (t_j + 1) \cdot R_{jN}^{(PC)} = \\ &= \left( q_i \cdot \beta_{i1N}^{(PC)} (t_1 + 1) \cdot R_{1N}^{(PC)} \right) \cdot \left( \beta_{i2N}^{(PC)} (t_2 + 1) \cdot R_{2N}^{(PC)} \right) \cdot \dots \cdot \left( \beta_{iNN}^{(PC)} (t_N + 1) \cdot R_{NN}^{(PC)} \right); \end{aligned} \quad (8)$$

$$R_{jN}^{(PC)} = \prod_{j=1}^N R_j^{(PC)}, \quad (9)$$

где  $t_j = (n_j - k_j) / 2$  – количество гарантированно исправляемых символов  $j$ -й ступени декодирования;  $n_j = (2^l - 1)$  – общее число символов в кодовом слове;  $l = \log_2(n_j + 1)$  – число бит в слове;  $k_j$  – число информационных символов в кодовом слове.

Минимальное кодовое расстояние для кодов РС:

$$d_{mj} = \lceil 2t_j + 1 \rceil = \lceil n_j - k_j + 1 \rceil. \quad (10)$$

Расчетная формула для определения функции взаимосвязи между параметрами  $j$ -й ступени декодирования кодов РС следующая:

$$\beta_{ijN}^{(PC)} = \left( 1 - \frac{1,61 \lg(R_{jN}^{(PC)} \cdot d_{mj})}{(-\lg P_{bj}) + t_j \sqrt{P_{bj}}} \right) / \left[ 1 + \lg \frac{(t_j + 1)}{(1 - R_{jN}^{(PC)}) \cdot (-\lg P_{bj})} \right]. \quad (11)$$

Исследование поведения функции  $\beta_{ijN}^{(PC)}$  показывает, что ее величина в области Заметных ошибок ( $P_{bj} \geq 10^{-3}$ ) при условии  $R_{jN}^{(CK)} \cdot d_{cj} = R_{jN}^{(PC)} \cdot (t_j + 1)$  существенно ниже значения  $\beta_{ijN}^{(PC)}$  сверточных кодов, поскольку в выражении (11) с ростом ошибок увеличивается вес его знаменателя, снижающего  $\beta_{ijN}^{(CK)}$  и, соответственно, – значение эффективности декодирования  $\mu_{ijN}^{(PC)}$ . Поэтому в первых каскадах декодирования, работающих в режиме с умеренным и большим уровнем ошибок, предпочтительно использовать сверточные коды, позволяющие обеспечить лучшую компенсацию ошибок и рост  $\mu_{ijN}$ .

При расчете характеристик систем с комбинированным кодированием на базе сверточных и блочных кодов РС вычисление осуществляется с использованием формул (5) – (7) или (8) – (11) в зависимости от рассматриваемого типа кода в соответствующих ступенях.

Базируясь на уравнении (4) представляется возможным выразить значение  $h_k$  в зависимости от вероятности ошибки  $P_{bj}$  на выходе заданной ступени декодирования  $N$ -

каскадного кодирования и получить расчетные формулы для прямого определения энергетической эффективности систем с многопозиционной модуляцией и каскадным однотипным или комбинированным кодированием:

$$h'_k = \frac{2,3}{\mu_{ipj}} \left( D_{ij} - 0,5 \lg \frac{2,3(D_{ij} - V_{ij})}{\mu_{ipj}} \right); \quad (12)$$

$$D_{ij} = -\lg P_{bj} + \lg(\sqrt{\mu_{ipN}} \cdot x_i); \quad V_{ij} = 0,5 \cdot \lg(2,3 D_{ij} / \mu_{ipj}); \quad (13)$$

$$x_i = C_i / R_{pN} \cdot q_i \cdot \sqrt{\pi}, \quad (14)$$

где  $\mu_{ijN}$  – результирующий показатель эффективности для учитываемых  $j$ -ступеней декодирования при использовании  $N$ -каскадного кодирования.

При незначительных и умеренных ошибках ( $P_{bj} \leq 10^{-4}$ ) на выходах рассматриваемых ступеней декодирования выражения (12) могут упростить и записать в виде:

$$h'_k = \frac{2,3}{\mu_{ipj}} \left[ D_{ij} - 0,5 \cdot \lg(2,2 \cdot D_{ij} / \mu_{ipj}) \right]. \quad (15)$$

Из анализа соотношений (12) – (15) можно сделать следующие выводы:

- приведенные соотношения являются достаточно общими для определения ОСШ системы в зависимости от числа и параметров каскадных кодов, их результирующей эффективности декодирования  $\mu_{ipj}$ , заданных значений  $P_{bj}$  на выходах учитываемых ступеней, характеристик модуляции ( $q_i, C_i$ ) и кодовой скорости  $R_{pN}$ ;

- для минимизации значений ОСШ, при которых требуется помехоустойчивость необходимо повышать эффективность  $\mu_{i1N} = \mu_{ip1}$  первой ступени декодирования, выбирать режим ее работы в области относительно больших уровней ошибок ( $P_{b1} = 10^{-2} \dots 10^{-3}$ ) и возлагать их исправление на следующие за ней ступени;

- для рационального построения многокаскадных кодовых конструкций необходимо, чтобы эффективность декодирования  $\mu_{i1N}$  первой ступени превышала значения  $\mu_{ijN}$  следующих ступеней в предположении их работы на месте предыдущей;

- число каскадов в кодовой конструкции ограничивается компромиссом между ее сложностью и величиной приращения энергетической эффективности от их использования, поскольку с увеличением числа каскадов растет избыточность на стороне передачи и снижается эффективность декодирования  $\mu_{ijN}$  каждой из ступеней.

- при одноступенчатом декодировании каскадного кода значение ОСШ однозначно связано с величиной  $P_{b1}$  на выходе первой ступени;

- с увеличением числа ступеней декодирования величина  $h'_k$  при фиксированном значении  $P_{bj} = P_{b1}$  снижается за счет роста эффективности декодирования  $\mu_{ipj}$ , а при фиксированном значении  $h'_k$  снижаются значения  $P_{bj}$  на выходах учитываемых ступеней декодирования за счет исправления ошибок каждой из них.

Если в (12) – (15) принять  $\mu_{ipj} = q_i$  и, следовательно исключить параметры, связанные с кодированием, то получим соотношения для определения ОСШ без кодирования

$$h'_0 = \frac{2,3}{q_i} \left( A_i - \lg \sqrt{2,3(A_i - V_{i0}) / q_i} \right); \quad (16)$$

$$A_i = -\lg P_{b0} + \lg \frac{C_i}{\sqrt{\pi \cdot q_i}}; \quad V_{i0} = 0,5 \cdot \lg(2,3 \cdot A_i / q_i), \quad (17)$$

где  $P_{b0}$  – вероятность ошибки на выходе устройства при отсутствии кодирования.

Различие между уровнями ОСШ при отсутствии и наличии кодирования для равных параметров модуляций и значений ошибок ( $P_{b0} = P_{bj}$ ) на выходах сравниваемых устройств определяет энергетический выигрыш от кодирования

$$\Delta G_{(0-j)} = 10 \lg \left( h'_0 / h'_{kj} \right) = h_0 - h_{kj} = 10 \lg (\mu_{ipj} \cdot \varepsilon_{oj} / q_i), \text{ дБ}; \quad (18)$$

$$\varepsilon_{oj} = \left( A_i - \lg \sqrt{2,3(A_i - V_{i0}) / q_i} \right) / \left( D_{ij} - \lg \sqrt{2,3(D_{ij} - V_{ij}) / \mu_{ipj}} \right), \quad (19)$$

где  $h_0 = 10 \lg h'_0$ ,  $h_{kj} = 10 \lg h'_{kj}$  – уровни ОСШ на входе приемной системы при отсутствии и наличии кодирования с учетом  $j$ -й ступени декодирования, дБ.

Из (18) – (19) видно, что величина ЭВК в основном зависит от отношения  $\mu_{ipj} / q_i$  растет, согласно (2), с ростом числа и эффективности декодирования отдельных ступеней. При  $P_{bi} \rightarrow 0$  значения  $\varepsilon_{oj} \rightarrow 1$ ,  $\beta_{ijN} \rightarrow 1$  и асимптотическая величина ЭВК в случае использования трехкаскадного комбинированного кодирования по схеме СК+РС+СК с учетом (5) – (6) и (8) – (9) определяется следующим образом:

$$\Delta G_{(0-3)}^{(\max)} = 10 \lg \left[ dc_1(t_2 + 1) \cdot dc_3 \cdot R_1 \cdot R_2^2 \cdot R_3^3 \right], \text{ дБ}. \quad (20)$$

Например, при  $dc_1 = 5$ ,  $t_2 = 8$ ,  $dc_3 = 8$ ,  $R_1 = 3/4$ ,  $R_2 = 239/255$ ,  $R_3 = 7/8$  значение  $\Delta G_{(0-3)}^{(\max)} = 17,75$  дБ.

Основываясь на полученных соотношениях (12) – (15) несложно определить рост ЭВК от наращивания ступеней декодирования, при условии равенства вероятностей ошибок на их выходах. Выполнив сравнение уровней ОСШ в системах с  $j$  и  $N$ -ступеней декодирования, получим:

$$\Delta G_{(j-N)} = 10 \lg \left( h'_{kj} / h'_{kN} \right) = h_{kj} - h_{kN} = 10 \lg (\mu_{ipN} \cdot \varepsilon_{iN} / \mu_{ipj}), \text{ дБ}; \quad (21)$$

$$\varepsilon_{iN} = \left( D_{ij} - \lg \sqrt{2,3(D_{ij} - V_{ij}) / \mu_{ipj}} \right) / \left( D_{iN} - \lg \sqrt{2,3(D_{iN} - V_{iN}) / \mu_{ipN}} \right), \quad (22)$$

где  $h_{kj}$ ,  $h_{kN}$  – уровни ОСШ при использовании  $j$  и  $N$ -ступеней декодирования, дБ.

Из (21) – (22) видно, что величина  $\Delta G_{(j-N)}$  в основном определяется отношением результирующих эффективностей декодирования при использовании  $N$  и  $j$ -ступеней. Значения  $\mu_{ipN}$  и  $\mu_{ipj}$  для сверточного и блочного декодирования рассчитываются на основании формул (5) – (6) и (8) – (9).

При использовании многокаскадного кодирования из-за вносимой на стороне передачи избыточности увеличивается по сравнению с режимом без кодирования величина  $P_{b, \text{вх}}$  на входе первой ступени декодирования, значение которой согласно (4) при  $\mu_{ipN} = q_i R_{pN}$  определяется по формуле:

$$P_{b, \text{вх}} = \frac{C_i}{\sqrt{q_i \cdot R_{pN} \cdot \pi \cdot h'_k}} \cdot 10^{-q_i \cdot R_{pN} \cdot h'_k / 2,3}. \quad (23)$$

Рост  $P_{b, \text{вх}}$  на входе первой ступени декодирования увеличивает  $P_{b,1}$  на ее выходе и сокращает исправляющую способность  $H_1$  определяется следующим образом:

$$H_1 = P_{b, \text{вх}} / P_{b1} = \left( \sqrt{q_i \cdot R_{pN} / \mu_{i1N}} \right) \cdot 10^{-q_i \cdot R_{pN} \cdot h'_k / 2,3}. \quad (24)$$

Анализ выражения (24) показывает, что при условиях  $d_{c1} \cdot \beta_{ijN}^{(CK)} \leq 1$  для СК и  $(t_1 + 1)\beta_{ijN}^{(PC)} \leq 1$  для РС величина  $H_1 \leq 1$  и исправление ошибок первой ступенью декодирования отсутствует. Выполнение этих условий возможно в режиме с достаточно большим уровнем ошибок ( $p_{b1} \geq 10^{-2}$ ), когда  $\beta_{ijN} \rightarrow 0$ .

Исправляющая способность каждой последующей ступени декодирования;  $\mu_{ip(j-1)}$  – результирующая эффективность декодирования от использования  $(j-1)$ -ступеней.

$$H_i = P_{(j-1)} / P_{bj} = \left( \sqrt{1 / \mu_{i1N}} \right) \cdot 10^{h_k' \cdot \mu_{ip(j-1)} (\mu_{ipN} - 1) / 2,3}. \quad (25)$$

Взаимосвязь между значениями вероятностей ошибок на выходах  $N$ -й и  $j$ -й ступеней декодирования при известном значении ОСШ определяется согласно отношения

$$P_{bN} = P_{bj} \left( \sqrt{\mu_{ipN} / \mu_{ipj}} \right) \cdot 10^{-h_k' (\mu_{ipN} - \mu_{ipj}) / 2,3}. \quad (26)$$

Основываясь на полученных расчетных выражениях, представляется возможным определить информационную эффективность каналов связи, использующих многопозиционную модуляцию и комбинированное составное кодирование с одной или группой ступеней декодирования.

$$\eta_{\text{инф}} = B_0 / C = 0,3\gamma_0 / \lg(1 + h_k' \cdot \gamma_0), \quad (27)$$

где  $\gamma_0 = m \cdot R_{pN}$  – удельная скорость передачи данных, бит/симв.;  $C$  – пропускная способность канала связи по Шеннону.

### Заключение

Предложенные математические модели расчета помехоустойчивости, энергетического выигрыша от кодирования и исправляющей способности отдельных ступеней декодирования систем связи, использующих многопозиционные виды модуляции и комбинированное каскадное кодирование на базе сверточных и блочных кодов РС. Базируясь на расчетных моделях возможных расширенных исследования по обеспечению высокой достоверности приема и низких значений ОСШ за счет вариации числа каскадов и параметров кодирования, структуры кодовой конструкции и режима работы использующих ступеней кодирования.

## CALCULATION MODELS FOR DETERMINING THE IMMUNITY AND EFFICIENCY OF COMMUNICATION SYSTEMS WITH MULTIPOSITIONAL MODULATION BY COMBINED CASCADE CODING

E.B. LIPKOVICH, E.A. BELAKON

**Abstract.** Mathematical models are proposed for calculating the noise immunity and efficiency of communication systems with multi-position modes of modulation and combined concatenated coding based on unsystematic convolutional codes and non-binary block Reed-Solomon codes without the need to involve complex computer modeling procedures and graphical constructions of noise immunity curves in the calculations.

*Keywords:* noise immunity, multistage combined coding, energy and information efficiency, reception reliability.

### **Список литературы**

1. Липкович Э.Б., Белоконь Е.А. // Кодирование и цифровая обработка сигналов в инфокоммуникациях: материалы международной научно-практической конференции (Республика Беларусь, Минск, 19 апреля 2021 года). Минск: БГУИР, 2021. С. 47–51.
2. Липкович Э.Б., Серченя А.А. // *Электросвязь*. 2020. № 10, С.62–66.